中国科学: 数学　2021 年　第 51 卷　第 10 期: 1595～1626
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
论 文

西志村簇的 Kudla 纲领

献给冯克勤教授 80 华诞

贺乔, 石友晟, 杨同海*

Department of Mathematics, University of Wisconsin Madison, Madison, WI 53706, USA
E-mail: qhe36@wisc.edu, shi58@wisc.edu, thyang@math.wisc.edu

收稿日期: 2021-01-03; 接受日期: 2021-08-20; 网络出版日期: 2021-09-30; * 通信作者
美国国家科学基金 (批准号: DMS-1762289) 资助项目

摘要　本文首先回顾和总结关于酉志村簇的 Kudla 纲领的最新研究进展. 本文展示局部算术 Siegel-Weil 公式如何推导出 $\mathrm{U}(n,1)$ 的非退化系数整体算术 Siegel-Weil 公式. 特别地, 本文证明 $\mathrm{U}(1,1)$ 的非退化系数整体算术 Siegel-Weil 公式.

关键词　志村簇　Rapoport-Zink 空间　局部密度　特殊闭链　Kudla 纲领　Kudla-Rapoport 猜想　算术 Siegel-Weil 公式

MSC (2020) 主题分类　11G18, 14G35

1　引言

Kudla [1] 开创性的工作开启了所谓 Kudla 纲领的一系列研究. 这一纲领旨在研究 (算术) 特殊闭链与 Eisenstein 级数以及 L- 函数的特殊值/导数之间的关系. 以低维正交志村簇上的研究为开端 (参见文献 [2–4]), 这一领域近些年在正交志村簇和酉志村簇的情形都有长足的进展. 例如, 几何 theta 级数的模性被 Borcherds [5]、Zhang [6] 及 Bruinier 和 Westerholt-Raum [7] 所证明; Kudla 和 Rapoport [8] 提出了非分歧素数处的局部算术 Siegel-Weil 公式的猜想, 这一猜想最近被 Li 和 Zhang [9] 所证明 (文献 [10] 证明了一个特殊情形); 酉志村簇上的无穷远处算术 Siegel-Weil 公式被 Liu [11] 所证明, 正交志村簇的情形被 Bruinier 和 Yang [10] 所证明. Garcia 和 Sankaran [12] 证明了更一般的无穷远处算术 Siegel-Weil 公式, 包括退化系数的情形. 酉志村簇上的算术 theta 级数的模性最近由 Bruinier 等 [13] 所证明. 正交志村簇的情形由 Howard 和 Pera [14] 所证明. Li 和 Liu [15] 最近得到了一个算术内积公式, 推广了之前 Liu [16] 对 $\mathrm{U}(1,1)$ 所取得的结果. 以上只列举了近年来的部分进展, 这里列出更多其他的相关工作, 尤其是关于算术 Siegel-Weil 公式的工作 (参见文献 [16–31]). Kudla [32] 以正交志村簇为主要例子概述了他的整个研究纲领. 本文首先总结有关酉志村簇的最新研究进展, 并且对于 $\mathrm{U}(1,1)$

英文引用格式: He Q, Shi Y S, Yang T H. Kudla program for unitary Shimura varieties (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1595–1626, doi: 10.1360/SSM-2021-0002

证明了算术 Siegel-Weil 公式的非退化系数的情形. 同时我们还描述对于非退化系数的情形, 如何基于局部 Siegel-Weil 公式和局部算术 Siegel-Weil 公式推导出整体算术 Siegel-Weil 公式 (参见第 3 节).

本文第 2 节回顾关于 $\mathrm{U}(n,n)$ 上的 Eisenstein 级数及其 Fourier 系数以及 Siegel-Weil 公式的基础知识. 唯一较新的结果是局部 Siegel-Weil 公式 (定理 2.3), 这一公式描述了局部 Whittaker 函数与局部轨道积分的关系. 此公式在正交群的类比已在文献 [4,10] 中证明. 第 3.1 小节讨论特殊闭链所生成的几何 theta 级数与 Kudla 的几何 Siegel-Weil 公式. 第 3.2 小节描述文献 [13] 中所证明的算术 theta 级数的模性. 对于高维的算术闭链的认知目前还有所欠缺, 甚至关于它的合理定义也不甚清楚. 第 3.3 小节描述目前已知的结果并且讨论有哪些基础的问题仍待解决. 值得注意的一点是, 余维数为最高的情形反而相对简单并且人们所知更多. 第 3.4 小节描述非退化系数的算术 Siegel-Weil 公式和局部算术 Siegel-Weil 公式. 对于该情形, 我们证明算术 Siegel-Weil 公式本质上是局部的, 并且可以由局部算术 Siegel-Weil 公式和局部 Siegel-Weil 公式推导出来 (参见定理 3.4 和 3.5). 事实上, 有限素点处和无穷远处的论证是相同的. 关于无穷远处的局部算术 Siegel-Weil 公式参见定理 3.3. 关于有限素点处的猜想参见猜想 3.3. 特别地, 我们在猜想 3.3 中提出了一个在分歧素数处的局部算术 Siegel-Weil 公式. 第 4 节主要聚焦于 $\mathrm{U}(1,1)$ 所引出的志村曲线. 这时, 我们可以使猜想 3.3 变精确并且证明这一猜想, 继而对于所有素点证明算术 Siegel-Weil 公式.

2 Eisenstein 级数

2.1 $\mathrm{U}(n,n)$ 上的 Eisenstein 级数

本小节回顾 $G'=\mathrm{U}(n,n)$ 上的退化 Eisenstein 级数及其 Fourier 系数. 设 F 为 $\mathbb{Q}$ 的一个虚二次扩张而 $\mathcal{O}_F$ 为其整数环. 将 $\mathbb{Q}$ 的 Adele 环记为 $\mathbb{A}$ 而将 F 的 Adele 环记为 $\mathbb{A}_F$. 对于 $\mathbb{Q}$ 上的一个代数群 G, 将 $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ 记为 $[G]$. 设 Her_n 为在 $\mathbb{Z}$ 上定义的一个代数群, 它的 R 点由所有在 $\mathcal{O}_F\otimes R$ 中取值的 $n\times n$ Hermite 矩阵所构成. 设 $G'=\mathrm{U}(n,n)$ 为在 $\mathbb{Z}$ 上定义的代数群, 它的 R 点为

$$G'(R)=\{g\in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F\otimes R): gw{}^t\bar{g}=w\},$$

这里

$$w=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

而 I_n 是 n 阶单位矩阵. 设 $P'=N'M'$ 为 G' 的标准 Siegel 抛物子群, 这里

$$N'(R)=\left\{n(b)=\begin{pmatrix}I_n & b\\ 0 & I_n\end{pmatrix}:\ b\in \mathrm{Her}_n(R)\right\},$$

$$M'(R)=\left\{m(a)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & {}^t\bar{a}^{-1}\end{pmatrix}: a\in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F\otimes R)\right\}.$$

事实上, M' 与 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$ 同构. 更一般地, 对于 $0\leqslant r\leqslant n$, 设

$$N'_r=\left\{n_r(b)=n\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right):\ b\in \mathrm{Her}_r(F)\right\}$$

以及

$$w_r=\begin{pmatrix} I_{n-r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_r \\ 0 & 0 & I_{n-r} & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特别地, 当 $r=n$ 时, $w_r=w$ 并且 $n_r(b)=n(b)$. 为了方便起见, 设 $N'=N'(\mathbb{Q})$, $N'_r=N'_r(\mathbb{Q})$, 以及 $M'=M'(\mathbb{Q})$.

现在回顾 Bruhat 分解

$$G'=\bigcup_{r=0}^{n}P'w_rP'. \tag{2.1}$$

引理 2.1　对于 $0\leqslant r\leqslant n$, 设 Q_r 为 GL_n 的标准抛物子群. 它由 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ 这种形式的矩阵构成, D 是 r 阶方阵. 设

$$M'_r=\{m(a):a\in Q_r(F)\backslash\,\mathrm{GL}_n(F)\},$$

则

$$P'(\mathbb{Q})\backslash G'(\mathbb{Q})=\bigcup_{r=0}^{n}w_rN'_rM'_r.$$

上式中 $r=0$ 的那项为 $\{1\}$, $r=n$ 的那项为 wN. 这里的要点是通过计算验证

$$P'\backslash P'w_rP'=w_rN'_rM'_r,$$

具体的论证留给读者.

设

$$\mathbb{H}_n^u=\left\{\tau\in M_n(\mathbb{C}):\frac{\tau-{}^t\bar{\tau}}{2\mathrm{i}}>0\right\}$$

为 $G'(\mathbb{R})$ 的 Hermite 对称区域. 每个 $\tau\in\mathbb{H}_n^u$ 可以被唯一地写为

$$\tau=u+\mathrm{i}v,\quad u\in\mathrm{Her}_n(\mathbb{R}),\quad v\in\mathrm{Her}_n^+(\mathbb{R}),$$

使得 $u=\frac{1}{2}(\tau+{}^t\bar{\tau})$ 并且 $v=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\tau-{}^t\bar{\tau})$, 这里 $\mathrm{Her}_n^+(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶正定 Hermite 矩阵的集合. 我们将 $v\in\mathrm{Her}_n^+(\mathbb{R})$ 简记作 $v>0$. $G'(\mathbb{R})$ 通过以下方式作用在 $\mathbb{H}_n^u$ 上:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}(\tau)=(A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}. \tag{2.2}$$

此时 i 的稳定子群为 $G'(\mathbb{R})$ 的一个极大紧子群, 具体形式如下:

$$K'_\infty=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}:\ A{}^t\bar{A}+B{}^t\bar{B}=I,\ A{}^t\bar{B}=B{}^t\bar{A}\right\}=\mathrm{U}(2n)\cap\mathrm{U}(n,n)=\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n).$$

这里采用如下等价 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ -B & A \end{smallmatrix}\right)\mapsto(A+\mathrm{i}B,A-\mathrm{i}B)$. 令 $g_\tau=n(u)m(a)$ 使得 $a{}^t\bar{a}=v$. 本文一直选择行列式大于 0 的 a. 注意到 $g_\tau(\mathrm{i})=\tau$. 因此 $G'(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{H}^u$ 上的作用是传递的, 并且

$$G'(\mathbb{R})=P'(\mathbb{R})K'_\infty=N'(\mathbb{R})M'(\mathbb{R})K'_\infty.$$

设 $\chi=\prod\chi_v$ 为 $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$ 的一个酉 Idele 特征 (Hecke 特征), 并且通过 $\chi(n(b)m(a))=\chi(\det a)$ 将其扩展到 $P'(\mathbb{Q})\backslash P'(\mathbb{A})$ 上. 考虑诱导表示 $I(s,\chi)=\mathrm{Ind}_{P'(\mathbb{A})}^{G'(\mathbb{A})}\chi|\,|_{\mathbb{A}}^{s}$, 它由 $G'(\mathbb{A})$ 上满足以下性质的光滑函数 Φ 所构成:

$$\Phi(n(b)m(a)g,s)=\chi(\det a)|\det a|^{s+\rho_n}\Phi(g,s),\quad \rho_n=\frac{n}{2}.$$

其中的一个元素 $\Phi\in I(s,\chi)$ 通常被称为截面 (section) 函数. 称它为可因式化的 (factorizable), 如果 $\Phi=\prod\Phi_p$, 其中 $\Phi_p\in I(s,\chi_p)$ (局部诱导表示). 如果对于所有的 $k=\left(\begin{smallmatrix}A&B\\-B&A\end{smallmatrix}\right)\in K'_\infty$, 有

$$\Phi_\infty(gk,s)=\Phi(g,s)(\det(A+\mathrm{i}B))^{m_1}(\det(A-\mathrm{i}B))^{m_2},\tag{2.3}$$

则称 Φ_∞ 的权为 $m=(m_1,m_2)$. 我们将唯一的权为 $m=(m_1,m_2)$ 且 $\Phi_\infty^m(1)=1$ 的截面函数记作 Φ_∞^m. 将 Φ_∞^m 限制在 Sp_{2n} 上所得到截面函数的权为 m_1-m_2.

给定一个截面函数 $\Phi\in I(s,\chi)$, 我们将与其对应的 Eisenstein 级数定义为

$$E(g,s,\Phi)=\sum_{\gamma\in P'(\mathbb{Q})\backslash G'(\mathbb{Q})}\Phi(\gamma g,s).\tag{2.4}$$

当 $\Re(s)$ 很大时上式绝对收敛, 该级数在整个复 s- 平面上有亚纯延拓, 并且在 $\Re(s)=0$ 上是全纯的.

Eisenstein 级数有以下 Fourier 展开:

$$E(g,s,\Phi)=\sum_{T\in\mathrm{Her}_n(\mathbb{Q})}E_T(g,s,\Phi),\tag{2.5}$$

这里

$$E_T(g,s,\Phi)=\int_{[\mathrm{Her}_n]}E(n(b)g,s,\Phi)\psi(-\mathrm{tr}(bT))db\tag{2.6}$$

是 $E(g,s,\Phi)$ 的第 T 次 Fourier 系数而 $\psi=\prod\psi_p$ 是 $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ 上的 "典范" 加性特征.

对于一个 Hermite 矩阵 T 以及一个同阶的可逆矩阵 a, 设 $T[a]=aTa^*$ 和 $a^*={}^t\bar{a}$.

定理 2.1 假设 $0\leqslant r\leqslant n$ 和 $T\in\mathrm{Her}_n(\mathbb{Q})$. 设

$$A_r(T)=\left\{A\in Q_r(F)\backslash\mathrm{GL}_n(F):T[{}^t\bar{a}^{-1}]=\begin{pmatrix}0&0\\0&T_a\end{pmatrix},\ \text{对于某个 } a\in A\right\},$$

这里 T_a 为 r 阶 Hermite 矩阵. 最后, 对于 $T'\in\mathrm{Her}_r(\mathbb{Q})$, 令

$$W_{T'}^{(r)}(g,s,\Phi)=\int_{\mathrm{Her}_r(\mathbb{A})}\Phi(w_rn_r(b)g,s)\psi(-\mathrm{tr}(bT'))db,$$

即层级 (level) 为 r 的局部 Whittaker 函数的乘积, 则

$$E_T(g,s,\Phi)=\sum_{r\geqslant r(T)}\sum_{[a]\in A_r(T)}W_{T_a}^{(r)}(m(a)g,s,\Phi),$$

其中 $r(T)$ 为 T 的秩. 特别地, 当 T 是非退化的且 Φ 是可因式化的时,

$$E_T(g,s,\Phi)=W_T(g,s,\Phi)=\prod_p W_{T,p}(g,s,\Phi_p)$$

是局部 Whittaker 函数的乘积.

证明　由引理 2.1 和变量替换 $b[a]\mapsto b$ 可得

$$\begin{aligned}E_T(g,s,\Phi)&=\sum_{r=0}^{n}\int_{[\mathrm{Her}_n]}\sum_{c\in\mathrm{Her}_r,m(a)\in M_r}\Phi(w_rn_r(c)m(a)n(b)g,s)\psi(-\operatorname{tr}(bT))db\\&=\sum_{r=0}^{n}\int_{[\mathrm{Her}_n]}\sum_{c\in\mathrm{Her}_r,m(a)\in M_r}\Phi(w_rn_r(c)n(b)m(a)g,s)\psi(-\operatorname{tr}(bT[{}^t\bar{a}^{-1}]))\,db.\end{aligned}$$

令 $b=\left(\begin{smallmatrix}b_1&b_{12}\\b_{12}^*&b_2\end{smallmatrix}\right)$, 并且注意到

$$w_rn\left(\begin{pmatrix}b_1&b_{12}\\b_{12}^*&0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}=n\left(\begin{pmatrix}b_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)m\left(\begin{pmatrix}1&-b_{12}\\0&1\end{pmatrix}\right),$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{[\mathrm{Her}_n]}\sum_{c\in\mathrm{Her}_r,m(a)\in M_r}\Phi(w_rn_r(c)n(b)m(a)g,s)\psi(-\operatorname{tr}(bT[{}^t\bar{a}^{-1}]))\,db\\&\quad=\int_{\mathrm{Her}_r(\mathbb{A})}\int_{\substack{b_1\in[\mathrm{Her}_{n-r}]\\b_{12}\in[\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}M_{n-r,r}]}}\sum_{m(a)\in M_r}\Phi(w_rn_r(b_2)m(a)g,s)\psi(-\operatorname{tr}(bT[{}^t\bar{a}^{-1}]))\,db\\&\quad=\sum_{[a]\in A_r(T)}W_{T_a}^{(r)}(m(a)g,s,\Phi).\end{aligned}$$

定理得证. □

令

$$j_r:\mathrm{U}(r,r)\to\mathrm{U}(n,n),\qquad\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}I_{n-r}&0&0&0\\0&A&0&B\\0&0&I_{n-r}&0\\0&C&0&D\end{pmatrix}\tag{2.7}$$

为一个自然的嵌入. 我们在 $I^{(r)}(s,\chi)$ 上加一个上标以强调它是 $\mathrm{U}(r,r)$ 上的诱导表示. 特别地, $I^{(n)}(s,\chi)=I(s,\chi)$. 此时对于每个 $g\in G'(\mathbb{A})$, j_r 都诱导一个关于 $\mathrm{U}(r,r)$ 等变的映射

$$j_{r,g}^*:I^{(n)}(s,\chi)\to I^{(r)}\left(s+\frac{n-r}{2},\chi\right),\quad(j_{r,g}^*\Phi)(h,s)=\Phi(j_r(h)g,s).\tag{2.8}$$

以下命题是显然的.

命题 2.1　沿用定理 2.1 中的记号. 假设 $T[{}^t\bar{a}^{-1}]=\operatorname{diag}(0,T_a)$. 那么对于 $\Phi\in I(s,\chi)$ 和 $g\in G'(\mathbb{A})$,

$$W_T^{(r)}(g,s,\Phi)=W_{T_a}\left(m(a),s+\frac{n-r}{2},j_{r,g}^*\Phi\right)$$

是一个关于截面函数 $j_{r,g}^*\Phi\in I^{(r)}(s+\frac{n-r}{2},\chi)$ 的 Whittaker 函数.

命题 2.2　假设 T 是半正定的并且秩为 $r(T)=n-1$. 选取 $a\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $T[{}^t\bar{a}^{-1}]=\operatorname{diag}(0,T_a)$. 那么

$$E_T(g,s,\Phi)=W_{T_a}\left(1,s+\frac{1}{2},\Phi_{m(a)g}^{(1)}\right)+W_{T_a}\left(1,s-\frac{1}{2},\Phi_{m(a^{-1})g}^{(2)}\right)$$

是关于 $\Phi_g^{(1)}=j_{n-1,g}^*\Phi\in I^{(n-1)}(s+\frac{1}{2},\chi)$ 和 $\Phi_g^{(2)}\in I^{(n-1)}(s-\frac{1}{2},\chi)$ 的 Eisenstein 级数的第 T_a 次 Fourier 系数的和, 这里

$$\Phi_g^{(2)}(h)=\int_{b_1\in\mathbb{A}}\int_{b_{12}\in\mathbb{A}_F^{n-1}}\Phi\left(w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)w_{n-1}^{-1}j_{n-1}(h)g,s\right)db_1\,db_{12}. \tag{2.9}$$

证明 对于 $c\in\mathrm{Her}_r$, 设 $n_-(c)=\left(\begin{smallmatrix}I_r & 0\\ c & I_r\end{smallmatrix}\right)$ 和 $n(c)=\left(\begin{smallmatrix}I_r & c\\ 0 & I_r\end{smallmatrix}\right)$. 那么 $j_r(n(c))=n(\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right))$. 在以下证明中, 令 $r=n-1$. 不难验证

$$\begin{aligned}&w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}j_r(n(c))\\&=w_nn_-\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}\right)w_n^{-1}w_nn_-\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\right)n\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)n_-\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}\\&=n\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\right)w_nm\left(\begin{pmatrix}1 & -b_{12}c\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)w_n^{-1}w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1-b_{12}cb_{12}^* & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Phi_g^{(2)}(n(c)h)&=\int_{\mathbb{A}}\int_{\mathbb{A}_F^r}\Phi\left(w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1-b_{12}cb_{12}^* & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}j_r(h)g,s\right)db_1\,db_{12}\\&=\Phi_g^{(2)}(h).\end{aligned}$$

类似地, 对于 $a\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$, 有

$$w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}j_r(m(a))=m\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\right)w_nn\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_{12}a\\ (b_{12}a)^* & 0\end{pmatrix}\right)w_r^{-1}.$$

这意味着

$$\Phi_g^{(2)}(m(a)h)=|\det a|^{s+\frac{n}{2}}|\det a|^{-1}\Phi_g^{(2)}(h)=|\det a|^{s-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}}\Phi_g^{(2)}(h).$$

所以 $\Phi_g^{(2)}\in I^{(n-1)}(s-\frac{1}{2},\chi)$. 变量替换 $b\mapsto b[a]$ 给出

$$\begin{aligned}W_T(g,s,\Phi)&=\int_{\mathrm{Her}_n(\mathbb{A})}\Phi(wn(b)g,s)\psi(-\operatorname{tr}bT)db\\&=\int_{\mathrm{Her}_r(\mathbb{A})}\int_{b_1\in\mathbb{A}}\int_{b_{12}\in\mathbb{A}_F^r}\Phi(w_nm(a)n(b)m(a^{-1})g,s)\psi(-\operatorname{tr}(b_2T_a))db_{12}\,db_1\,db_2\\&=\int_{\mathrm{Her}_r(\mathbb{A})}\Phi_{m(a^{-1})g}^{(2)}(wn(b_2))\psi(-\operatorname{tr}(b_2T_a))db_2\\&=W_{T_a}\left(1,s-\frac{1}{2},\Phi_{m(a^{-1})g}^{(2)}\right).\end{aligned}$$

根据 $T_a>0$, 容易验证 $A_r(T)$ 由单个元素 $[a]$ 组成. 此时命题可由定理 2.1 和命题 2.1 推导得到. □

2.2 Weil 表示、Rallis 映射以及 Eisenstein 级数

设 V_p 为 F_p 上的一个 (非退化的) m 维酉空间. 设 χ 为 $\mathbb{A}_F^\times$ 上的一个 Idele 类特征使得 $\chi|_{\mathbb{A}^\times} = \epsilon_{F/\mathbb{Q}}^m$, 这里 $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}$ 是由 $F/\mathbb{Q}$ 诱导出的 $\mathbb{A}^\times$ 上的二次 Idele 特征 (也即由 $F/\mathbb{Q}$ 诱导出的 Dirichelet 特征). 设 $K' = K^{(n)} = \prod_p K'_p$ 为 $\mathrm{U}(n,n)(\mathbb{A})$ 的极大紧子群, 使得

$$K'_p = \begin{cases} \mathrm{U}(n,n)(\mathbb{Z}_p), & \text{如果 } p < \infty, \\ \mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n), & \text{如果 } p = \infty. \end{cases}$$

约化对偶对 $(\mathrm{U}(V_p), \mathrm{U}(n,n)(\mathbb{Q}_p))$ 给出一个定义在 Schwartz 函数空间上的 $\mathrm{U}(n,n)(\mathbb{Q}_p)$ 的 Weil 表示 $\omega_{\chi_p} = \omega_{V_p,\chi}$. 特别地,

$$\begin{aligned} &\omega_{\chi_p}(n(b))\phi(x) = \psi_p(\mathrm{tr}(b(x,x)))\phi(x), \\ &\omega_{\chi_p}(m(a))\phi(x) = \chi_p(\det a)|\det a|_{F_p}^{\frac{n}{2}}\phi(xa), \\ &\omega_{\chi_p}(w)\phi(x) = \gamma_p(V_p^n)\int_{V_p^r}\phi(y)\psi(-\mathrm{tr}_{F_p/\mathbb{Q}_p}\mathrm{tr}(x,y))dy, \end{aligned} \tag{2.10}$$

此处 $\gamma(V_p^n)$ 是某种局部 Weil 指标 (一个单位根). 另一方面, $\mathrm{U}(V_p)$ 在 $S(V_p^n)$ 上有一个线性的作用. 根据上述公式, 我们可以看出存在一个与 $\mathrm{U}(n,n)$ 的作用交换的算子—Rallis 映射

$$\lambda_p:\ S(V_p^n) \to I(s_n,\chi_p), \quad \lambda_p(\phi)(g) = \omega_{\chi_p}(g)\phi(0), \tag{2.11}$$

这里 $s_n = \frac{m-n}{2}$. 设 $\Phi = \Phi_\phi \in I(s,\chi_p)$ 为对应的标准截面函数 (也即 $\Phi|_{K_p}$ 不取决于 s) 使得 $\Phi(s_n) = \lambda_p(\phi)(g)$. 为简便起见, 将其记作 $\lambda_p(\phi)$. 首先, 叙述一些有独立意义并且更加一般的关于局部 Weil 表示和 Rallis 映射的结果.

设 F/F_0 为 F_0 的一个二次平展扩张, 此处 F_0 是剩余域特征为 p 的一个局部域. 设 V 为 F 上的一个 m 维非退化酉空间. 设 χ 为 $F^\times$ 的一个特征使得 $\chi|_{F_0^\times} = \epsilon_{F/F_0}^m$, 此处 ϵ_{F/F_0} 是 $F_0^\times$ 上由 F/F_0 诱导出的特征. 当 $p < \infty$ 时, 设 ψ 为 F_0 的一个非分歧特征并且 $\psi_F(x) := \psi(\mathrm{tr}_{F/F_0}(x))$. 当 $p = \infty$ 时, $F_0 = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$, 令 $\psi(x) = e(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$. 设 $\omega_\chi = \omega_{V,\chi,\psi}$ 为对应的定义在 $S(V^n)$ 上 $\mathrm{U}(n,n)$ 的 Weil 表示, λ 为对应的 Rallis 映射.

引理 2.2 假设 $p < \infty$ 并且设 $\mathcal{H} = \partial^{-1} \oplus \mathcal{O}_F$ 为双曲平面, 其 Hermite 二次型为

$$(y,z) = y_1\bar{z}_2 + y_2\bar{z}_1,$$

这里 $\partial = \partial_{F/F_0}$ 为 F/F_0 的相对差别 (relative different) 理想. 我们有以下结果:

(1) $K' = \mathrm{U}(n,n)(\mathcal{O}_{F_0})$ 在 $\mathrm{Char}(\mathcal{H}^r)$ 上通过 Weil 表示 ω_1 诱导的作用是平凡的, 此处 1 代表 $F^\times$ 的平凡特征.

(2) 设 $V_t = V \oplus (\mathcal{H}\otimes_{\mathcal{O}_F} F)^t$, $\phi^{(t)} = \phi\otimes\phi_t$, 并且 $\phi_t = \mathrm{Char}((\mathcal{H}^t)^n)$. 设 Φ 和 $\Phi^{(t)}$ 分别为由 ϕ 和 $\phi^{(t)}$ 所诱导的 $I(s,\chi)$ 中的标准截面函数, 则

$$\Phi(g, s_n + t) = \Phi^{(t)}(g, s_n + t) = \omega_\chi(g)\phi^{(t)}(0).$$

特别地,

$$W_T(g, s_n + t, \phi) = W_T(g, s_n + t, \phi^{(t)}).$$

证明 (概要) (1) $K' = \mathrm{U}(n,n)(\mathcal{O}_{F_0})$ 由 Weyl 群中的元素 w_j 和 $n(b)$ 以及 $m(a)$ 所生成, 这里 $b \in \mathrm{Her}_n(\mathcal{O}_{F_0})$, $a \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$. 因为 $\mathcal{H}$ 是单位模的, 容易验证对于 $\phi_1 = \mathrm{Char}(\mathcal{H}^n)$, 有

$$\omega_1(w_j)\phi_1 = \phi_1.$$

同时, 易见

$$\omega_1(n(b))\phi_1(x) = \psi(\mathrm{tr}\, b(x,x))\phi_1(x) = \phi_1(x),$$
$$\omega_1(m(a))\phi_1(x) = |\det a|_F^{\frac{n}{2}}\phi_1(xa) = \phi_1(x).$$

(1) 由此得证. 关于 (2), 注意到每个 $g \in \mathrm{U}(n,n)$ 都可被写为 $g = n(b)m(a)k$, 这里 $k \in K'$. 此时,

$$\begin{aligned}\Phi^{(t)}(g, s_n + t) &= \omega_\chi \phi^{(t)}(0)\\ &= \omega_\chi(g)\phi(0)\omega_1(n(b)m(a)k)\phi_r(0)\\ &= \omega_\chi(g)\phi(0)|\det a|_F^t\\ &= \Phi(g, s_n + t).\end{aligned}$$

证毕. □

上述引理是文献 [1, 附录] 的一个类比. 类似地, Kudla 和 Millson[33] 证明了如下结果.

引理 2.3 (1) 假设 V_∞ 的符号差为 (p,q), $p+q=m$. 对于一个整数 $\kappa(\chi)$, 设 $\chi(z) = (\frac{z}{|z|})^{\kappa(\chi)}$ (使得 $\chi(-1) = (-1)^{\kappa(\chi)}$). 给定一个正交分解

$$V_\infty = V^+ \oplus V^-, \quad x = x^+ + x^-,$$

这里 $V^\pm$ 为 V_∞ 的正定 (负定) 子空间. Gauss 强函数 (Gauss majorant)

$$\phi_\infty(x) = \mathrm{e}^{-\pi\, \mathrm{tr}[(x^+,x^+)-(x^-,x^-)]}$$

是 Weil 表示 ω_χ 的一个 $K' = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$- 特征函数. 对应的标准截面函数 $\Phi_\infty^\ell \in I(s,\chi)$ 的权为 $\ell = (\frac{p-q+\kappa(\chi)}{2}, \frac{-p+q+\kappa(\chi)}{2})$. 特别地, 正定空间 V_∞ 上的 Gauss 强函数 ϕ_∞ 给出了 $\mathrm{U}(n,n)(\mathbb{R})$ 上一个权为 $\ell = (\frac{\kappa(\chi)+m}{2}, \frac{\kappa(\chi)-m}{2})$ 的标准截面函数.

(2) 设 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ 为由 Hermite 二次型 $(y,z) = y_1\bar{z}_1 - y_2\bar{z}_2$ 给出的双曲平面. 设 $\phi_t = \phi_\infty^{\otimes t} \in S(\mathcal{H}^t)$, $\phi^{(t)} = \phi \otimes \phi_t$, 这里 ϕ_∞ 为由 $\mathcal{H}$ 诱导出的 Gauss 强函数, $\phi \in S(V^n)$. 令 Φ 和 $\Phi^{(t)} \in I(s,\chi)$ 为对应于 ϕ 和 $\phi^{(t)}$ 的标准截面函数, 则

$$\Phi(g, s_n + t) = \Phi^{(t)}(g, s_n + t).$$

特别地,

$$W_T(g, s_n + t, \phi) = W_T(g, s_n + t, \phi^{(t)}).$$

引理 2.4 假设 F/F_0 是非分歧的, $L \subset V$ 是一个 $\mathcal{O}_F$- 单位模格 (unimodular lattice). 那么 $\Phi = \lambda(\mathrm{Char}(L^n)) \in I(s,\chi)$ 满足 $\Phi_p|_{K_p} = 1$, 这里 χ 是 $F^\times$ 的一个非分歧特征, 并且

$$\chi|_{F_0^\times} = \epsilon_{F/F_0}^m, \quad m = \dim V.$$

现在令 V 为 F 上的一个整体 (非退化的) m 维酉空间, 令

$$\lambda = \otimes \lambda_p : S(V^n(\mathbb{A})) \to I(s_n, \chi)$$

为关于 $\mathrm{U}(n,n)(\mathbb{A})$ 等变的映射. 给定一个 Schwartz 函数 $\phi = \otimes \phi_p \in S(V^n(\mathbb{A}))$, 可以造出两种对应的 $[\mathrm{U}(n,n)]$ 上的模形式: 一种是 Eisenstein 级数 $E(g,s,\phi) = E(g,s,\lambda(\phi))$, 另一种是所谓的 theta 积分. 回顾 theta 核函数

$$\theta(g,h,\phi) = \sum_{x \in V^n(F)} \omega_\chi(g)\phi(h^{-1}x).$$

它是 $[\mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(n,n)]$ 上的一个自守函数. 如果收敛, 则通过在 $[\mathrm{U}(V)]$ 上取平均而得到的 theta 积分

$$I(g,\phi) = \frac{1}{\mathrm{Vol}([\mathrm{U}(V)])} \int_{[\mathrm{U}(V)]} \theta(g,h,\phi) dh \tag{2.12}$$

是一个 $\mathrm{U}(n,n)$ 上的自守形式. 下述定理为著名的 Siegel-Weil 公式的一个特例. 这个公式先后由 Siegel、Weil、Kudla 和 Rallis、Ichino 以及 Gan-Qiu-Takeda 所发展.

定理 2.2 (Siegel-Weil 公式) 此处沿用上文记号, 并假设 $r = 0$ 或者 $m - r > n$ (Weil 收敛条件), 这里 r 是 V 的 Witt 分裂指数. 那么对应的 theta 积分 $I(g,\phi)$ 绝对收敛, Eisenstein 级数在 $s = s_n$ 处全纯, 并且

$$I(g,\phi) = \kappa E(g, s_n, \phi),$$

这里 $\kappa = 2$ 或者 $\kappa = 1$ 取决于 $s_n = 0$ 成立或不成立.

现在描述上述公式的局部类比—局部 Siegel-Weil 公式. 我们将在第 3 节证明算术 Siegel-Weil 公式的过程中用到它. 对于更详细的关于局部 Siegel-Weil 公式的讨论, 参见文献 [10, 第 2 节] 和 [4, 第 5.3.1 小节]. 设 F_0 为 $\mathbb{R}$ 或一个 p 进域, 设 F 为 F_0 的一个二次扩张. 令 ψ 为一个非平凡、非分歧的加性特征. 设 V 为 F 上的一个 n 维非退化酉空间. 令 $H = \mathrm{U}(V)$, $G' = \mathrm{U}(n,n)$. 给定一个 $n \times n$ Hermite 矩阵 T, 令

$$\Omega(T) = \{x \in V^n : T(x) := (x,x) = T\}.$$

那么对于非退化的 T, 有

$$H \cong \Omega(T) : h \mapsto hx.$$

通过动量映射 (moment map)

$$T : V^n \to \mathrm{Her}_n : x \mapsto T(x) = (x,x)$$

以及上述等价 $H \cong \Omega(T)$, 可以证明对于之前已经固定好的 V^n 和 $\mathrm{Her}_n(F_0)$ 上的 Haar 测度, 存在一个唯一的 Haar 测度 dh, 使得对于任意 $\phi \in S(V^n)$, 有

$$\int_{V^n} \phi(v) dv = \int_{\mathrm{Her}_n(F_0)} O_T(\phi) dT, \tag{2.13}$$

这里

$$O_T(\phi) = \int_{h \in H} \phi(h^{-1}x) dh \tag{2.14}$$

是 ϕ 在 $\Omega(T)$ 上的轨道积分, x 为 $\Omega(T)$ 中的任意元素.

定理 2.3 (局部 Siegel-Weil 公式) 令 V^n 以及 $\mathrm{Her}_n(F_0)$ 上的测度为关于 ψ 的自对偶 (self-dual) 测度. 设 dh 为 H 上满足 (2.13) 的 Haar 测度. 则对于任意 $\phi \in S(V^n)$, 任意非退化的 $T \in \mathrm{Her}_n(F_0)$, 有

$$W_T(1,0,\phi) = \gamma(V^n)O_T(\phi), \tag{2.15}$$

而且,

(1) 当 F_0 是一个 p 进域时, $L \subset V$ 是一个格. 设 $K_L = \{h \in H : hL = L\}$, $\phi_L = \mathrm{Char}(L^n)$. 令 T 为 L 的 Gram 矩阵, 则

$$W_T(1,0,\phi_L) = \gamma(V^n)\,\mathrm{Vol}(K_L, dh).$$

(2) 当 $F_0 = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$, 并且 V 是正定的, 令 $\phi(x) = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{tr}(x,x)} \in S(V^n)$. 这时, $H = \mathrm{U}(n)$. 那么对于任意 n 阶正定矩阵 T, 有

$$W_T(\tau,0,\phi) = \gamma(V^n)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)q^T, \quad q^T = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(T\tau)}.$$

证明 (概要) (2.15) 可如下得出:

$$\begin{aligned} W_T(1,0,\phi) &= \int_{\mathrm{Her}_n(F_0)} \gamma(V^n) \int_{V^n} \phi(x)\psi(\mathrm{tr}(b(x,x)))dx\psi(-\,\mathrm{tr}(bT))db \\ &= \int_{\mathrm{Her}_n(F_0)} \gamma(V^n) \int_{\mathrm{Her}_n(F_0)} O_{T'}(\phi)\psi(\mathrm{tr}(b(T'-T)))dT'db \\ &= \gamma(V^n)O_T(\phi). \end{aligned}$$

(1) 可根据 (2.15) 和以下事实得出: 如果 $(x,x) = T$, $x \in L^n$, 那么 x_i 为一组 L 的基.

关于 (2), 令 $\tau = u + \mathrm{i}v$ 以及 $v = a^t\bar{a}$, $\det a > 0$. 那么

$$\begin{aligned} W_T(\tau,0,\phi) &= (\det v)^{-n/2} W_T(n(u)m(a),0,\phi) \\ &= \psi(\mathrm{tr}(Tu))W_T(1,0,\phi_a) \\ &= \gamma(V^n)\psi(\mathrm{tr}(Tu))O_T(\phi_a) \\ &= \gamma(V^n)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)q^T, \end{aligned}$$

这里 $\phi_a(x) = \phi(xa)$. 定理得证. □

2.3 非连贯酉空间和非连贯 Eisenstein 级数

如 Kudla[1] 所观察到的, $m = n$ 的情形更加有趣. 令 $R(V_p)$ 为 λ_p 在 $I(0,\chi_p)$ 中的像, 它是不可约的. 若 p 在 F 中分裂, 那么局部地, 只有一个非退化的 n 维酉空间 (将其记作 V_p^+) 并且 $I(0,\chi_p) = R(V_p^+)$. 若 p 是有限的并且在 F 不分裂, 那么局部地, 存在两个 n 维非退化酉空间 $V_p^{\pm}$, 取决于

$$\epsilon(V_p) = \epsilon_{F_p/\mathbb{Q}_p}((-1)^{n(n-1)/2}\det V_p), \tag{2.16}$$

并且

$$I(0,\chi_p) = R(V_p^+) \oplus R(V_p^-).$$

当 $p = \infty$ 时, 有

$$I(0,\chi_\infty) = \bigoplus_{q=0}^{n} R(V_\infty^{p,q}),$$

这里 $V_\infty^{p,q}$ 是 $\mathbb{C}$ 上符号为 (p,q) 的酉空间. 综上所述, 我们有

$$I(0,\chi)=\oplus_V R(V)\oplus(\oplus_{\mathcal{C}\text{非连贯}}R(\mathcal{C})). \tag{2.17}$$

上式第一个和取遍所有满足 $R(V)=\otimes R(V_p)$ 的 F 上的 n 维酉空间 V, 而第二个和取遍所有 $\mathbb{A}_F$ 上的 n 维非连贯酉空间. 此处非连贯指 $\mathcal{C}$ 无法由 F 上的一个酉空间诱导, 也即 $\epsilon(\mathcal{C})=\prod_p\epsilon(\mathcal{C}_p)=-1$. Siegel-Weil 公式关心 $R(V)$ 中的截面函数. 而由 $R(\mathcal{C})$ 中的截面函数所诱导 "非连贯" Eisenstein 级数 (如 Kudla 所称) 则更加有趣. 令 $\phi=\otimes\phi_p\in S(\mathcal{C}^n)$, $E(g,s,\phi)$ 为 $\lambda(\phi)$ 所对应的 Eisenstein 级数. Kudla 观察到它的中心值自动为 0: $E(g,0,\phi)=0$. 此时, 一个非常自然的问题是, 它的导数 $E'(g,0,\phi)$ 是否有什么意义?

假设 $\mathcal{C}_\infty$ 是正定的, 则存在一个符号为 $(n-1,1)$ 的整体酉空间 V 使得 $V_{\mathbb{A}_f}\cong\mathcal{C}_{\mathbb{A}_f}$ 以及存在一个对应的志村簇 (Shimura variety) M (关于更多细节, 参见第 3 节). Kudla 猜想了一个公式, 即所谓的算术 Siegel-Weil 公式 (参见文献 [1,32]), 试图通过 M 的整模型 (integral model) 上的算术闭链来解释中心导数 $E'(g,0,\phi)$. 我们将在第 3 节中回顾志村簇以及特殊除子. 在此之前, 首先回顾以下事实. 当 $r(T)=n$ 时, T 是非退化的, 定理 2.1 给出

$$E_T(g,s,\phi)=\prod_{p\leqslant\infty}W_{T,p}(g_p,s,\phi_p).$$

设

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\left\{p\leqslant\infty:\frac{\det\mathcal{C}_p}{\det T}\notin\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}F_p^\times\right\}. \tag{2.18}$$

命题 2.3　我们有下述结论.

(1) $|\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)|\geqslant1$ 是一个奇数.

(2) 如果 $p\in\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)$, 那么对于所有的 $\phi\in S(\mathcal{C}^n)$, 局部 Whittaker 函数在中心 $s=0$ 处消失: $W_{T,p}(g,0,\phi)=0$. 当 $p<\infty$ 时, 上述结论反之也成立.

(3) 我们有

$$\mathrm{ord}_{s=0}E_T(g,s,\phi)\geqslant|\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)|.$$

(4) $E'_T(g,0,\phi)=0$ 除非 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$ 只由单个 p 构成. 此时

$$E'_T(g,0,\phi)=\frac{W'_{T,p}(g_p,0,\phi_p)}{W_{T,p}(g_p,0,\tilde{\phi}_p)}E_T(g,0,\tilde{\phi}).$$

此处 $\tilde{\phi}_p\in S(\tilde{V}_p^n)$ 满足 $W_{T,p}(g_p,0,\tilde{\phi}_p)\neq0$, 并且 $\tilde{\phi}=\otimes\tilde{\phi}_q$ 满足 $\tilde{\phi}_q=\phi_q$, 如果 $q\neq p$. 这里 $\tilde{V}$ 是一个与 $\mathcal{C}$ 相邻的整体酉空间. 相邻指当 $q\neq p$ 时, $\tilde{V}_q\cong\mathcal{C}_q$ 并且 $\tilde{V}_p$ 和 $\mathcal{C}_p$ 给出两个相同维数但不同构的 F_p 上的酉空间.

3　酉志村簇和算术闭链

本节回顾 $\mathrm{U}(n-1,1)$ 所对应的酉志村簇以及上面的算术闭链. 除了 Green 函数 [1,32] 以及 Green 流动形 (current) 的定义 (参见文献 [12]), 我们将主要参考文献 [13]. 然后将讨论 Kudla 纲领在模性以及算术 Siegel-Weil 公式方面的进展.

设 W_0 和 W 是 F 上的酉空间, 它们的符号分别为 $(1,0)$ 和 $(n-1,1)$. 设 $V=\mathrm{Hom}_F(W_0,W)$, 它的 Hermite 二次型被定义为

$$(f_1(x_1),f_2(x_2))=(x_1,x_2)(f_1,f_2),\quad x_i\in W_0,\quad f_i\in V.$$

此定义不依赖于 x_1 和 x_2 的选取. 设 G 是 $\mathrm{GU}(W_0)\times\mathrm{GU}(W)$ 上的子群, 它的元素由拥有相同相似因子 (similitude factor) 的 (g_0,g) 构成. 记它们共同的相似因子特征为 $\nu: G\to\mathbb{G}_m$, 注意到 $\nu(G(\mathbb{R}))\subset\mathbb{R}_{>0}$.

令 $\mathcal{D}(W_0)=\{y_0\}$ 为一个单点集合. 定义

$$\mathcal{D}(W)=\{\text{负定 }\mathbb{C}\text{- 直线 } y\subset W_{\mathbb{R}}\}.\tag{3.1}$$

$H(\mathbb{R})$ 作用在连通 Hermite 对称区域

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(W_0)\times\mathcal{D}(W)$$

上. 注意到, 我们可以将 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}(V)$ 等同起来, 后者由 $V_{\mathbb{R}}$ 上的负定 $\mathbb{C}$- 直线构成: 固定住 W_0 上的一组 F- 基 $\{v_0\}$ 以及 $a=(v_0,v_0)>0$, 则

$$(V,(\cdot,\cdot))\cong(W,a^{-1}(\cdot,\cdot)).$$

这给出了 $\mathcal{D}\cong\mathcal{D}(W)\cong\mathcal{D}(W_0)\times\mathcal{D}(W)$. 注意到 G 通过 $(gf)(x)=g(f(g^{-1}x))$ 作用在 V 上, 这给出了以下正合列:

$$1\to\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m\to G\to H:=\mathrm{U}(V)\to 1.\tag{3.2}$$

所以 H 在 $\mathcal{D}(V)$ 上的作用与 H 在 $\mathcal{D}$ 上的作用是相符合的. 设 K 为 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个紧开子群, 轨形 (orbifold)

$$M_K(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{D}\times G(\mathbb{A}_f)/K$$

是一个 $n-1$ 维光滑 F- 栈 (stack) $M=M_K$ 的复数点集合. 我们使用 (G,V) 而不是群 $\mathrm{GU}(W)$ 的原因将会在定义这个栈的整模型和特殊闭链时变得显而易见.

设

$$\omega=\{v\in V_{\mathbb{R}}:\ (v,v)<0\}$$

为 $\mathcal{D}$ 上带有 Hermite 度量 $\|v\|^2=-(v,v)$ 的重言线丛 (tautological line bundle). 这个度量化线丛诱导出 M_K 上的一个线丛, 我们将其记为 $\hat{\omega}=(\omega,\|\cdot\|)$- 权为 1 的度量化线丛.

3.1 Kudla 的几何 Siegel-Weil 公式

设 $1\leqslant i\leqslant m$. 给定 $x=(x_1,\dots,x_m)\in V^m$ 使得 $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 生成的子空间 $V(x)$ 为 r 维正定. 设 $h\in G(\mathbb{A}_f)$, 并且令 $\mathcal{D}_x$ 为 $V_{\mathbb{R}}$ 中与 $V(x)$ 垂直的负定直线组成的集合. 设 x 在 G 中的稳定子群为 G_x 以及 $K_{x,h}=G_x(\mathbb{A}_f)\cap hKh^{-1}$. 那么将余维数为 r 的特殊闭链 $Z(x,h)\subset M$ 定义为

$$Z(x,h)=G_x(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{D}_x\times G_x(\mathbb{A}_f)/K_{x,h}\to M.\tag{3.3}$$

对于秩为 r 的半正定矩阵 $T\in\mathrm{Her}_m(\mathbb{Q})$ 和 $\phi\in S(V_{\mathbb{A}_f}^m)$, 如果存在 $x\in V^m$ 使得 $T(x)=((x_i,x_j))=T$, Kudla 定义了以下加权闭链:

$$Z^{\mathrm{Naive}}(T,\phi)=\sum_{h\in G_x(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K}\phi(h^{-1}x)Z(x,h)\in\mathrm{CH}^r(M).$$

设 $Z(T,\phi)=Z^{\mathrm{Naive}}(T,\phi)\cdot(\omega^{-1})^{m-r}\in\mathrm{CH}^m(M)$. 并且设 $(\tau\in\mathbb{H}_m^u)$

$$\theta_m^{\mathrm{geo}}(\tau,\phi)=\sum_{T\in\mathrm{Her}_m(\mathbb{Q}),T\geqslant0}Z(T,\phi)q^T\in\mathbb{C}[[q]]\otimes\mathrm{CH}^m(M),\quad q^T=e(\mathrm{tr}(T\tau))\tag{3.4}$$

为余维数为 m 的特殊闭链的生成级数. Kudla 猜想此级数是取值在 Chow 群 $\mathrm{CH}_{\mathbb{C}}^m(M)$ 中的权为 n 的酉模形式 (参见文献 [32]). 特别地, $Z(T,\phi)$ 生成了 $\mathrm{CH}_{\mathbb{C}}^m(M)$ 的有限维子空间. 正交志村簇上对应的猜想被 Zhang[6] (形式模性) 及 Bruinier 和 Westerholt-Raum[7] (形式模性导出模性) 所证明. Kudla[32] 的几何 Siegel-Weil 公式陈述了以下事实:

$$\theta_m^{\mathrm{geo}}(\tau,\phi)\cdot(\omega^{-1})^{n-m}=C\cdot E^{(m)}(\tau,s_n,\phi),\tag{3.5}$$

这里 C 是一个可以显式计算的非零常数. 这些 theta 函数满足以下兼容性:

$$\theta_{m_1}^{\mathrm{geo}}(\tau_1,\phi_1)\cdot\theta_{m_2}^{\mathrm{geo}}(\tau_2,\phi_2)=\theta_{m_1+m_2}^{\mathrm{geo}}(\mathrm{diag}(\tau_1,\tau_2),\phi_1\otimes\phi_2).\tag{3.6}$$

假设 $n=2r$ 为偶数. 对于任意 $\mathrm{U}(r,r)$ 的尖点自守表示 π, Li 和 Liu[15] 证明了, θ_r^{geo} 的 π- 部分是上同调平凡的, 并且它和自己的高度配对是某些 “双倍” L- 函数在对称中心的导数 (在加上某些技术性假设之后).

3.2　特殊除子的算术 theta 级数

我们将基本参考文献 [13]. 假设 $\mathfrak{a}_0$ 是 W_0 中的一个自对偶 $\mathcal{O}_F$ 格, $\mathfrak{a}$ 是 W 中的一个自对偶 $\mathcal{O}_F$ 格, 并且设 $L=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a})\subset V$ 为 V 中的一个自对偶 $\mathcal{O}_F$ 格. 设

$$K=\{(h_0,h_1)\in G(\mathbb{A}_f):\ h_0\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_0,h_1\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\}.\tag{3.7}$$

那么志村簇 $M=M_K$ 有一个在 $\mathcal{O}_F$ 上的整模型 $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\mathrm{Kra}}$. 设 $\mathcal{M}_{(1,0)}$ 为拥有 $\mathcal{O}_F$ 复乘的椭圆曲线的模空间, 它是 $\mathcal{O}_F$ 上的光滑栈. 设 $\mathcal{M}_{(n-1,1)}^{\mathrm{Kra}}$ 为 $\mathcal{O}_F$ 上的光滑模空间栈, 使得对于任意 $\mathcal{O}_F$- 概形 S, 它分类由元组 $(A,\iota,\psi,\mathcal{F}_A)$ 组成的广群范畴 (groupoid), 这些元组满足以下条件:

(1) $A\to S$ 是一个相对维数为 n 的 Abel 概形;

(2) $\iota:\mathcal{O}_F\to\mathrm{End}(A)$ 是 $\mathcal{O}_F$ 的作用;

(3) $\lambda:A\to A^\vee$ 是对于任意 $\alpha\in\mathcal{O}_F$ 满足 $\iota(\alpha)^\dagger=\iota(\overline{\alpha})$ 的主极化;

(4) $\mathcal{F}_A\subset\mathrm{Lie}(A)$ 是一个 $\mathcal{O}_F$- 稳定秩为 $n-1$ 的 $\mathcal{O}_S$- 模, 局部为 $\mathrm{Lie}(A)$ 的直和项, 满足 Krämer 条件[34]: $\mathcal{O}_F$ 通过结构同态 $\mathcal{O}_F\to\mathcal{O}_S$ 作用在 $\mathcal{F}_A$ 上, 通过结构同态的共轭作用在 $\mathrm{Lie}(A)/\mathcal{F}_A$ 上.

在 F 上, Krämer 条件是自动满足的. 设 $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\mathrm{Kra}}$ 为分类以下对象的模栈:

$$(A_0,A)\in\mathcal{M}_{(1,0)}(S)\times\mathcal{M}_{(n-1,1)}^{\mathrm{Kra}}(S),\tag{3.8}$$

这里 S 依旧为任意 $\mathcal{O}_F$- 概形, 同时我们要求对于 S 的任意特征为 p 的几何点 s, 存在一个 Hermite 模同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(T_\ell A_{0,s},T_\ell A_s)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a})\otimes\mathbb{Z}_\ell,\tag{3.9}$$

这里 ℓ 为任意不为 p 的素数. 注意到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(A_0,A)$ 上有一个正定的 Hermite 二次型

$$(f_1,f_2)=\lambda_{A_0}^{-1}\circ f_2^\vee\circ\lambda_A\circ f_1\in\mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(A_0)=\mathcal{O}_F. \tag{3.10}$$

对于正整数 $m>0$, 设 $\mathcal{Z}(m)$ 为分类元组 (A_0,A,x) 的模栈, 这里要求 $(A_0,A)\in\mathcal{M}$ 并且

$$x\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(A_0,A),\quad (x,x)=m. \tag{3.11}$$

容易验证 $\mathcal{Z}(m)(\mathbb{C})=Z(m)=Z(m,\mathrm{Char}(L))$.

设 (A_0,A) 为 $\mathcal{M}$ 上的万有对象, 设 $\mathcal{F}_A\subset\mathrm{Lie}(A)$ 为 Krämer 条件中的万有子层. 用以下等式定义权为 1 的模形式组成的线丛 $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}^{-1}=\mathrm{Lie}(A_0)\otimes\mathrm{Lie}(A)/\mathcal{F}_A. \tag{3.12}$$

文献 [13, 第 2 节] 证明了 $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{C}}\cong\omega$. 通过这一对应以及 ω 上的度量, 我们得到了 $\mathcal{O}_F$ 上的一个度量化线丛 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$.

$\mathcal{M}$ 拥有一个典范的环形紧化 (toroidal compactification) $\mathcal{M}^*$. 除子 $\mathcal{Z}(m)$ 可以延拓到 $\mathcal{M}^*$ 上成为 $\mathcal{Z}^*(m)$. $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 也可以被延拓 (我们仍用同一个符号表示). 边界 $\mathcal{B}=\mathcal{M}^*-\mathcal{M}$ 的连通分支被 "尖点" Φ 所标记 (参见文献 [13, 定义 3.1.1]): $\mathcal{B}=\sum\mathcal{B}_\Phi$. 设

$$\mathcal{B}(m)=\sum b_\Phi(m)\mathcal{B}_\Phi,\quad b_\Phi(m)=\frac{m}{n-2}\#\{x\in L_0:(x,x)=m\},$$

这里 $(L_0,(\cdot,\cdot))$ 为取决于 Φ 的符号差为 $(n-2,0)$ 的 Hermite $\mathcal{O}_F$- 模. 最后, 对于 $m>0$, 设 $\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m)=\mathcal{Z}^*(m)+\mathcal{B}(m)$ 以及

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(0)=\boldsymbol{\omega}^{-1}+\mathrm{Exc}\in\mathrm{CH}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}^*),$$

这里 Exc 是 $\mathcal{M}$ 上的例外除子 (exceptional divisor) (参见文献 [13]).

定理 3.1 设 $\epsilon_{F/Q}:(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times\to\{\pm1\}$ 为 $F/\mathbb{Q}$ 决定的 Dirichlet 特征. 形式生成级数

$$\sum_{m\geqslant0}\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m)\cdot q^m\in\mathrm{CH}^1(\mathcal{M}^*)[[q]]$$

在以下意义下是权 (weight) 为 n、层级 (level) 为 $\Gamma_0(D)$ 和特征为 $\epsilon_{F/Q}^n$ 的模形式: 对于任意 $\mathbb{Q}$- 线性泛函 $\alpha:\mathrm{CH}^1(\mathcal{M}^*)\to\mathbb{C}$, 级数

$$\sum_{m\geqslant0}\alpha(\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m))\cdot q^m\in\mathbb{C}[[q]]$$

是一个拥有以上权、层级和特征的经典模形式的 q 展开.

Bruinier [35] 在他的毕业论文 (也可参见文献 [36]) 中用正规化 theta 对应构造了一个 $Z(m)$ 的自守 Green 函数 $\mathrm{Gr}^B(m)$. $\mathrm{Gr}^B(m)$ 的性质在文献 [37] 已被研究, 它在 $\mathcal{M}^*$ 中的除子是 $\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m)(\mathbb{C})$ (这正是我们如此定义 $\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m)(\mathbb{C})$ 的原因). 设 $\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}_B(m)=(\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m),\mathrm{Gr}^B(m))$ 以及

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(0)=\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{-1}+(\mathrm{Exc},-\log(D)).$$

以下是文献 [13, 定理 B] 的主定理.

定理 3.2 以下算术除子的算术 theta 级数:

$$\theta_B^{ar}(\tau) = \sum_{m \geqslant 0} \widehat{\mathcal{Z}}_B^{\mathrm{tot}}(m) q^m \tag{3.13}$$

是取值在 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{M}^*)$ 中权为 n、层级为 $\Gamma_0(D)$ 和特征为 $\epsilon_{F/Q}^n$ 的模形式.

模性具有重要应用 (参见文献 [38,39]). 事实上, 存在另一种系统性地构造 $Z(m)$ 的 Green 函数的方法, 该方法起源于 Kudla [1], 并与本文的关系更加紧密. 我们给出如下简略描述.

对于任意 $z \in \mathcal{D}$, 有以下直和分解:

$$V_{\mathbb{R}} = z \oplus z^{\perp}, \quad x = x_z + x_{z^{\perp}}.$$

参见文献 [1], 定义 $R(x,z) = -(x_z, x_z)$ 以及

$$\xi_0(x,z) = \Gamma(1, 2\pi R(x,z)), \tag{3.14}$$

这里对于 $a > 0$ 和 $\Re(s) > 0$, 定义

$$\Gamma(s,a) = \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^s \frac{dt}{t}.$$

容易验证 $\xi(x,z)$ 在 $\mathcal{D} - \mathcal{D}_x$ 上是光滑的而沿着 $\mathcal{D}_x$ 有对数形的奇点 (log singularity). 事实上, Kudla [1] 证明了 $\xi_0(x,z)$ 是 $\mathcal{D}_x$ 的 Green 函数:

$$dd^c \xi_0(x,z) + \delta_{\mathcal{D}_x} = [\phi_{KM,0}(x,z)], \tag{3.15}$$

这里 $\phi_{KM,0}$ 是光滑的 Kudla-Millson $(1,1)$- 微分形式, 它是 $\mathcal{D}_x$ 的 Poincaré 对偶 (参见文献 [1, 命题 11.1]).

最后, 对于 $m \in \mathbb{Z}$、$v > 0$ 和 $(z,h) \in M$, 定义

$$\Xi(m,v,z,h) = \sum_{\substack{x \in V \\ (x,x)=m}} \varphi(h^{-1}x) \cdot \xi_0(x\sqrt{v}, z). \tag{3.16}$$

它是 $\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m)(\mathbb{C})$ 的 Green 函数. 当 $m \leqslant 0$ 时, 它在 M^* 上是光滑的. 设

$$\widehat{\mathcal{Z}}_K^{\mathrm{tot}}(m,v) = \begin{cases} (\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(m), \Xi(m,v)), & \text{如果 } m > 0, \\ (0, \Xi(m,v)), & \text{如果 } m < 0, \\ \widehat{\omega}^{-1} + (\mathrm{Exc}, -\log(|Dv|) + \Xi(0,v)), & \text{如果 } m = 0. \end{cases}$$

根据文献 [40, 定理 1.3] 可知, Kudla 的算术 theta 函数

$$\theta_K^{ar}(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{Z}}_K^{\mathrm{tot}}(m,v) q^m \tag{3.17}$$

是在 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{M}^*)$ 中取值的权为 n、层级为 $\Gamma_0(D)$ 和特征为 $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}^n$ 的一个 (非全纯的) 模形式.

3.3 高余维数的算术闭链的生成函数

本小节在很大程度上是猜测性的. 对于一个正定的 Hermite 矩阵 $T \in \mathrm{Her}_m(\mathbb{Z})$, 设 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)$ 为 $\mathcal{O}_F$ 上的模栈, 它分类元组 $(A_0, A, f = (f_1, \ldots, f_m))$, 这里 $(A_0, A) \in \mathcal{M}(S)$, $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(A_0, A)$ 使得

$$T(f) = ((f_i, f_j)) = T.$$

它是一个 Deligne-Mumford 栈, 它的一般纤维是 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)/F = Z(T, \mathrm{Char}(L^m))$, 被记为 $Z(T)$. 但是 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)$ 在某些 p 上的特殊纤维可能拥有低于预期的余维数, 所以一般不是等维数的. 为了构造 $\mathrm{CH}^m(\mathcal{M})$ 中的一个元素, 我们将 $\mathrm{CH}^m(\mathcal{M})$ 视为某些 K 群滤链的商群, 并且将 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(T)}$ 定义为 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(t_i)}$ 支撑在 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)$ 上的导出张量积,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(T)} = (\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(t_1)} \otimes^{\mathbb{L}} \cdots \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(t_m)})_{\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)},$$

这里 t_i 是 T 的第 i 个对角元素, $\otimes^{\mathbb{L}}$ 代表导出张量积, 并且我们只取支撑在 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)$ 上的部分 (参见文献 [14]). 这样, $\mathcal{Z}(T)$ 是 $\mathrm{CH}^m(\mathcal{M})$ 中的一个元素. 对于半正定的秩为 r 的矩阵 T, 我们需将上述操作得到的结果乘以 $(\boldsymbol{\omega}^{-1})^{m-r}$ 以得到 $\mathrm{CH}^m(\mathcal{M})$ 中的元素 $\mathcal{Z}(T)$.

至于 Kudla Green 流动形, 星号积

$$\xi_0^m(x, z) = \xi_0(x_1) * \xi_0(x_2) * \cdots * \xi_0(x_m)$$

是 $\mathcal{D}_x = \{z \in \mathcal{D} : z \perp x_i\}$ 的一个 Green 流动形. 对于一个正定的 Hermite 矩阵 $v = a^t \bar{a}$, $Z(T, \phi)$ 的 Kudla Green 流动形被定义为

$$\Xi^{\mathrm{Naive}}(T, v, \phi)(z, h) = \sum_{\substack{x \in V^r \\ (x,x)=T}} \varphi(h^{-1}x) \cdot \xi_0^m(xa, z). \tag{3.18}$$

这给出了 $\hat{Z}^{\mathrm{Naive}}(T, v, \phi) = (Z^{\mathrm{Naive}}(T), \Xi^{\mathrm{Naive}}(T, v, \phi)) \in \widehat{\mathrm{CH}}^r(M)$, 这里 r 是 T 的秩. 定义

$$\hat{Z}(T, v, \phi) = (Z(T), \Xi(T, v, \phi)) = \hat{Z}^{\mathrm{Naive}}(T, v, \phi) \otimes ((\hat{\boldsymbol{\omega}})^{-1})^{m-r} \in \widehat{\mathrm{CH}}^m(M).$$

当 ϕ 是 $\mathrm{Char}(L^m)$ 时, 我们省略 ϕ. 最近, Garcia 和 Sankaran[12] 发现了一个更加概念性的方法可以用来定义 Green 流动形 $\mathcal{Z}(T)$ 的 $\Xi_{GS}(T, v)$. 这个 Green 流动形和 Kudla 的 Green 流动形在算术 Chow 群中是等价的. 我们将它们等同起来都视作 $\Xi(T, v)$. 事实上, $\Xi(T, v)$ 对于所有 Hermite 矩阵 T 都是良定义的, 并且当 T 不是半正定时它是光滑的. 一个基本的问题是理解它的边界行为, 然后证明它是 M^* 上对应于

$$Z^{\mathrm{tot}}(T) = Z(T) + Z_B(T)$$

的 Green 流动形, 这里 $Z_B(T)$ 是某个 (未知的) 边界闭链. 假设 $Z_B(T)$ 有一个典范的整模型 $\mathcal{Z}_B(T)$, 如此可定义整闭链 $\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(T) = \mathcal{Z}(T) + \mathcal{Z}_B(T)$ 和算术闭链 $\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) = (\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}(T), \Xi(T, v)) \in \widehat{\mathrm{CH}}^m(\mathcal{M}^*)$. 第 0 项 $\mathcal{Z}^{\mathrm{mod}}(0, v)$ 也许需要更多的修改, 这里忽略这一点.

猜想 3.1 生成级数

$$\theta_m^{ar}(\tau) = \sum_T \widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) q^T$$

是 $\mathrm{U}(m, m)$ 上权为 n 的模形式.

另一个基本的问题是构造一个 Bruinier 类型的 Green 流动形 $\mathrm{Gr}^B(T)$, 从而构造出一个类似的生成级数

$$\theta_m^{ar,B}(\tau) = \sum_{T \geqslant 0} \widehat{\mathcal{Z}}^B(T) q^T, \tag{3.19}$$

此生成函数将是权为 n 的全纯模形式, 这里

$$\widehat{\mathcal{Z}}^B(T) = (\mathcal{Z}^{\mathrm{tot}}, \mathrm{Gr}^B(T)).$$

我们期待以下兼容性:

$$\theta_{m_1}^{ar}(\tau_1) \cdot \theta_{m_2}^{ar}(\tau_2) = \theta_{m_1+m_2}^{ar}(\mathrm{diag}(\tau_1, \tau_2)).$$

3.4　算术 Siegel-Weil 公式

尽管前一小节的内容猜测性很强, $m = n$ 的情形下一些更加精确的结果已经被得到. 在这个情形下, 存在算术度数映射

$$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}^n(\mathcal{M}^*) \to \mathbb{C}.$$

Kudla 的算术 Siegel-Weil 公式, 大致上是以下猜想.

猜想 3.2　除去在分歧素数上需要做的一些修改,

$$\widehat{\mathrm{Deg}} \theta_n^{ar}(\tau) = CE'(\tau, 0, \lambda(\phi), \Phi_\infty^\ell),$$

这里 $C \neq 0$ 是一个可以被显式计算的常数, $\phi = \mathrm{Char}(L^n)$, 而 $\Phi_\infty^\ell \in I(s, \chi_\infty)$ 是权为

$$\ell = \left(\frac{n + \kappa(\chi_\infty)}{2}, \frac{-n + \kappa(\chi_\infty)}{2}\right)$$

的 (被 $S(\mathcal{C}_\infty^n)$ 中的 Gauss 函数诱导的) 标准截面函数. 更加准确地, 对于任意 $n \times n$ Hermite 矩阵 T, 以下等式成立:

$$\widehat{\mathrm{Deg}} \widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) q^T = CE_T'(\tau, 0, \lambda(\phi)\Phi_\infty^\ell). \tag{3.20}$$

这一猜想只在符号为 $(0, 2)$ 以及 $(1, 2)$ 的正交志村簇情形下已被完全证明 (参见文献 [2,4,21,25]). 对于非退化的 T, 相当一般的情形已被证明, 这本质上是局部算术 Siegel-Weil 公式以及经典 Siegel-Weil 公式的推论.

引理 3.1　假设 T 是非退化的秩为 n 的 Hermite 矩阵. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{A}_F$ 上的非连贯酉空间, 与第 2.3 小节中一样, 假设 $\mathcal{C}_{\mathbb{A}_f} \cong V_{\mathbb{A}_f}$ 以及 $\mathcal{C}_\infty$ 是正定的. 我们有以下结果:

(1) 如果 $|\mathrm{Diff}(\mathcal{C}, T)| > 1$, 那么 $\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) = 0$.

(2) 如果 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C}, T) = \{\infty\}$, 那么 T 非正定, 并且

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) = (0, \Xi(T, v)).$$

(3) 如果 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C}, T) = \{p\}$ 并且 $p < \infty$, 那么 p 在 F 中非分裂, 并且

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{\mathrm{tot}}(T, v) = (\mathcal{Z}(T), 0)$$

是支撑在 p 上的特殊纤维上的.

证明 (概要)　首先注意到 $Z(T)=0$. 这是因为, 如果存在 $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in V^n$ 使得 $(x,x)=T$, 那么 x_i 构成 V 的一组基并且 $D_{\vec{x}}=\emptyset$. 根据文献 [41, 引理 2.7] 可知, 如果 T 非正定, 那么 $\mathcal{Z}(T)=\emptyset$. 这证明了 (2). 如果 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 拥有一个元素 $(A_0,A,\dots,\vec{x})$, 那么 $\mathbb{V}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(A_0,A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 可以代表 T. 除了 p 和 ∞ 以外, 根据 $\mathcal{M}$ 的定义知 $\mathbb{V}_q\cong V_q$. 同时 (2) 告诉我们 $\mathbb{V}_\infty$ 是正定的. 因为 $\mathcal{C}$ 是非连贯的, $\mathbb{V}_p$ 和 $V_p=\mathcal{C}_p$ 拥有 "相反" 的行列式, 所以 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$. 这证明了 (1). 最后, 当 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$, $\Xi(T,v)=0$, $\mathcal{Z}(T)$ 没有边界, 这推导出了 (3). □

根据算术度数的定义以及以上引理, 对于非退化的 Hermite 矩阵, 有

$$\widehat{\deg}\hat{\mathcal{Z}}(T,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{X_K}\Xi(T,v)dx, & \text{如果 } \mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{\infty\},\\ \chi(\mathcal{Z}^{\mathrm{Naive}}(T),\mathcal{Z}(t_1)\otimes^{\mathbb{L}}\cdots\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{Z}(t_n))\log \mathrm{N}(\mathfrak{p}), & \text{如果 } \mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\},\\ 0, & \text{其他情形,}\end{cases}\tag{3.21}$$

这里 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_F$ 中唯一在 p 之上的素理想, 而 $t_1,\dots,t_n$ 是 T 的对角元素.

3.5　局部算术 Siegel-Weil 公式和 T 非退化情形下算术 Siegel-Weil 公式的 "证明"

本小节描述局部算术 Siegel-Weil 公式以及如何应用它证明算术 Siegel-Weil 公式.

首先假设 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{\infty\}$, 即 T 非退化但是非正定. 给定 $x\in V^n$ 使得 $(x,x)=T$, 定义

$$\mathrm{ht}_\infty(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\xi_0^n(x,z)\tag{3.22}$$

为 x 处的局部高度函数. Liu [11] 证明了以下局部算术 Siegel-Weil 公式以及在 ∞ 处的算术 Siegel-Weil 公式. Garcia 和 Sankaran [12] 给出了一个更加一般的证明 (包括了退化项).

定理 3.3 (∞ 处的局部算术 Siegel-Weil 公式 [11])　记号同上, 则

$$\mathrm{ht}_\infty(x)=(-1)^nB_\infty\cdot W'_{T,\infty}(1,0,\Phi^\ell_\infty)e^{-2\pi\,\mathrm{tr}\,T}=\frac{W'_{T,\infty}(\tau,0,\Phi^\ell_\infty)}{W_{\tilde{T},\infty}(\tau,0,\Phi^\ell_\infty)}$$

对于任意满足 $\mathrm{tr}\,\tilde{T}=\mathrm{tr}\,T$ 的正定 Hermite 矩阵 $\tilde{T}$ (如果存在) 成立, 这里

$$B_\infty^{-1}=\gamma(V^n)\frac{(2\pi)^{n^2}}{\Gamma_n(n)}=\gamma(V^n)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n),dh)$$

以及

$$\Gamma_n(s)=(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(s-j).$$

这里单位酉球的 Haar 测度在定理 2.3 中给出. 特别地, 局部高度 $\mathrm{ht}_\infty(x)$ 仅仅取决于 $(x,x)=T$, 而非 x 本身.

证明　当 T 的符号为 $(n-1,1)$ 时, 定理被文献 [11, 定理 4.17 和 命题 4.5] 所证明. 因子 $(-1)^n$ 来自

$$\gamma(V^n)=(-1)^n\gamma(\mathcal{C}^n_\infty).$$

当 T 的符号为 (p,q) 且 $q\geqslant 2$ 时, 等式左边为 0, 这是因为不存在 $x\in V^n$ 使得 $(x,x)=T$ (因为 V 的符号是 $(n-1,1)$), 而根据文献 [11, 命题 4.5] 知 $W_{T,\infty}(\tau,0,\Phi^\ell)=0$. 最后关于 B_∞ 的等式来自定理 2.3. □

对于算术 Siegel-Weil 公式, 我们可以不使用格 L 而讨论更加一般的情形. 设 $G_0 = \mathrm{GU}(W_0)$ 以及 $H = \mathrm{U}(V)$, 并且使用以下同构:

$$G \cong G_0 \times H, \quad (g_0, g) \mapsto (g_0, g_0^{-1} g). \tag{3.23}$$

假设 $K = K_0 \times K_u$, 这里 $K_0 \cong \hat{\mathcal{O}}_F^\times$ 是 $G_0(\mathbb{A}_f) = \mathbb{A}_{F,f}^\times$ 的极大紧子群而 $K_u \subset H(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧开子群.

定理 3.4 (∞ 处的算术 Siegel-Weil 公式 [11]) 对于任意 K 作用下不变的 $\phi \in S(V(\mathbb{A}_f)^n)^K$ 以及非退化非正定的 T, 有

$$\widehat{\deg} \widehat{\mathcal{Z}}(T, v, \phi) q^T = C \cdot E_T'(\tau, 0, \phi),$$

这里 $C = \frac{(-1)^n h_F}{w_F \operatorname{Vol}(K_u, dh) \operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)}$, 其中的 Haar 测度由定理 2.3 给出, 而 $w_F = |\mathcal{O}_F^\times|$ 是 $\mathcal{O}_F^\times$ 中的单位个数.

证明 这里参照文献 [10, 第 7 节], 简述一个利用局部 Siegel-Weil 公式和局部算术 Siegel-Weil 公式的证明. 假设存在 $x \in V^n$ 使得 $(x, x) = T$ (不然等式两边均为 0), 固定这样一个 x, 那么对于任意 $y \in V^n$ 使得 $(y, y) = T$, 存在 $h \in H$ 使得 $hx = y$, 这是因为 $x_1, \ldots, x_n$ 构成 V 的一组基. 同时注意到 $G_0 \times H$ 中的 G_0 因子在 V 以及 $\mathcal{D}$ 的作用是平凡的. 所以根据定义有

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg} \widehat{\mathcal{Z}}(T, v, \phi) &= \frac{1}{2} \int_{(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A}_f)/K_0) \times H(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{D} \times H(\mathbb{A}_f)/K_u} \frac{1}{|G_0(\mathbb{Q}) \cap K_0|} \\
&\quad \times \sum_{h_0 \in H(\mathbb{Q})} \phi((h_0 h)^{-1} x) \xi_0^n (h_0^{-1} x a, z) dh \\
&= \frac{h_F}{2 w_F} \int_{\mathcal{D} \times H(\mathbb{A}_f)/K_u} \phi(h^{-1} x) \xi_0^n (x a, z) dh \\
&= \frac{h_F}{w_F \operatorname{Vol}(K_u, dh)} \mathrm{ht}_\infty(xa) \int_{H(\mathbb{A}_f)} \phi(h^{-1} x) dh,
\end{aligned}$$

这里分母中的 $w_F = |G_0(\mathbb{Q}) \cap K_0|$ 会出现是因为 $\mathcal{M}$ 是一个栈, 其中点 $\boldsymbol{x} = (A_0, A, \ldots)$ 的重数为

$$\frac{1}{\operatorname{Aut}(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{w_F}.$$

根据局部 Siegel-Weil 公式 (定理 2.3) 和局部算术 Siegel-Weil 公式 (定理 3.3), 有

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg} \widehat{\mathcal{Z}}(T, v, \phi) &= \frac{(-1)^n h_F}{\operatorname{Vol}(K_u, dh) \prod_{p \leqslant \infty} \gamma(V_p^n) \operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)} \\
&\quad \times W'_{aTa^*, \infty}(1, 0, \Phi^\ell) \mathrm{e}^{-2\pi \operatorname{tr}(Tv)} W_{T,f}(1, 0, \phi) \\
&= \frac{(-1)^n h_F}{\operatorname{Vol}(K_u, dh) \operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)} E_T'(\tau, 0, \phi) q^{-T}.
\end{aligned}$$

这里用了

$$W_{aTa^*, \infty}(1, s, \Phi) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \operatorname{tr}(Tu)} = W_T(\tau, s, \Phi) |\det v|^s$$

对于 $\tau = u + \mathrm{i}v$ 和 $v = aa^*$ 成立, 以及对于 $g_\tau = n(u) m(a)$ $(\det a > 0)$ 有

$$W_T(\tau, s, \Phi) = |\det v|^{-\frac{n}{2}} W_T(g_\tau, s, \Phi).$$

证毕. $\square$

在 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$ (p 有限非分裂) 的情形下, 算术 Siegel-Weil 公式可以用类似的方法转化成局部的算术 Siegel-Weil 公式. 我们需要先给一些定义, 并在分歧素数上作出一些修正.

首先介绍 Rapoport-Zink 空间. 设 $\breve{F}_p$ 为 F_p 的极大非分歧扩张的完备化, 它的整数环为 $\mathcal{O}_{\breve{F}_p}$. 另记 $W=W(\bar{\mathbb{F}}_p)$. 固定 $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的超奇异轨迹 (supersingular locus) 中的一个点 $(\underline{E}^\circ,\underline{A}^\circ)$, 它诱导出了一个元组

$$(\mathbb{Y},\iota_{\mathbb{Y}},\lambda_{\mathbb{Y}},\mathbb{X},\iota_{\mathbb{X}},\lambda_{\mathbb{X}},\mathrm{Id}_{\mathbb{X}},\mathcal{F}_{\mathbb{X}}),$$

这里 $\mathbb{Y}:=E^\circ([p^\infty])$ 而 $\mathbb{X}:=A^\circ([p^\infty])$. 这个点将被作为 Rapoport-Zink 空间的基点. 给定 $(\underline{E}^\circ,\underline{A}^\circ)$, 我们可以定义另一个酉空间

$$V^{(p)}=\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{O}_F}(E^\circ,A^\circ):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(E^\circ,A^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

以及其上的 Hermite 二次型

$$(x,y)_{V^{(p)}}=\lambda_E^\vee\circ y^\vee\circ\lambda_A\circ x\in\mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_F}(E)\simeq F.$$

注意到

$$V^{(p)}\otimes\mathbb{A}_f^p=\mathrm{Hom}_{F\otimes\mathbb{A}_f^p}(V(E^\circ)^p,V(A^\circ)^p)\simeq V\otimes\mathbb{A}_f^p \tag{3.24}$$

以及

$$V^{(p)}\otimes\mathbb{Q}_p\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{F_p}}(\mathbb{Y},\mathbb{X})\otimes\mathbb{Q}_p\not\simeq V\otimes\mathbb{Q}_p, \tag{3.25}$$

这里 $V(E^\circ)$ (相应地, $V(A^\circ)$) 是 E° (相应地, A°) 的 Tate 模. 所以 $V^{(p)}$ 是非连贯空间 $\mathcal{C}$ 在 p 处的相邻酉空间, 而原本的 V 是 $\mathcal{C}$ 在 ∞ 处的相邻酉空间.

对于 $\boldsymbol{x}\in V^{(p)}$, 它诱导了

$$\boldsymbol{x}_p\in V_p^{(p)}\cong\mathbb{V}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{F_p}}(\mathbb{Y},\mathbb{X})\otimes\mathbb{Q}_p$$

和

$$\boldsymbol{x}^p=(\boldsymbol{x}_q)_{q\neq p,\infty}\in\mathrm{Hom}_{F\otimes\mathbb{A}_f^p}(V(E^\circ)^p,V(A^\circ)^p).$$

设 $\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{F}_p}}$ 为由以下 $\mathcal{O}_{\breve{F}_p}$- 概形 S 组成的范畴: 在概形 S 上 p 为局部幂零元 (locally nilpotent). 定义 Rapoport-Zink 空间 (简称 RZ- 空间) 为 $\mathcal{O}_{\breve{F}_p}$ 上的形式概形, 它代表以下模函子: 对于 $S\in\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{F}_p}}$, $\mathcal{N}^{\mathrm{Kra}}_{(n-1,1)}(S)$ 是由同构类 $(X,\iota,\lambda,\rho,\mathcal{F}_X)$ 组成的广群范畴, 而 $(X,\iota,\lambda,\rho,\mathcal{F}_X)$ 满足以下条件.

(1) X 是 S 上的 n 维 p 可除群, 其相对高度为 $2n$.

(2) $\iota:\mathcal{O}_{F_p}\to\mathrm{End}(X)$ 是 $\mathcal{O}_F$ 在 X 上的一个作用, 它满足以下 Kottwitz 条件:

$$\mathrm{char}(\iota(\pi)\mid\mathrm{Lie}X)=(T-\pi)^{n-1}(T+\pi).$$

(3) $\lambda:X\to X^\vee$ 是一个主极化, 它所对应的 Rosati 对合在 $\mathcal{O}_{F_p}$ 上诱导了相对于 $\mathbb{Z}_p$ 的非平凡 Galois 自同构.

(4) $\rho:X\times_S\bar{S}\to\mathbb{X}\times_{\mathrm{Spec}\,k}\bar{S}$ 是一个高度为 0 的 $\mathcal{O}_{F_p}$- 线性拟同源, 使得 λ 和 $\rho^*(\lambda_{\mathbb{X}})$ 在 $\bar{S}$ 局部上只相差一个 $\mathbb{Z}_p^\times$ 中的因子.

(5) (Krämer 条件) $\mathcal{F}_X$ 是 $\mathrm{Lie}(X)$ 的 $\mathcal{O}_S$- 秩为 $n-1$ 的 $\mathcal{O}_{F_p}\otimes\mathcal{O}_S$- 子模, 它是 $\mathrm{Lie}(X)$ 的 $\mathcal{O}_S$- 直和项. $\mathcal{O}_{F_p}$ 通过结构同态 $\mathcal{O}_{F_p}\to\mathcal{O}_S$ 作用在 $\mathcal{F}_X$ 上, 通过结构同态的 Galois 共轭作用在 $\mathrm{Lie}(X)/\mathcal{F}_X$ 上.

当 p 是惯性的时, Krämer 条件被 (2) 所隐含. 事实上, 在这一情形下, $\mathcal{F}_X\subset\mathrm{Lie}(X)$ 被 X 所唯一决定, 只要 X 满足条件 (2).

设 $\mathcal{N}_{(1,0)}$ 是用类似方法定义的以 $\mathbb{Y}$ 为框架的 RZ- 空间. $\mathcal{N}_{(1,0)}\cong\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 是光滑的并且其上存在一个万有 p- 可除群 $\mathcal{Y}$. 对于任意 $S\in\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{F}_p}}$, 有 $\mathcal{N}_{(1,0)}(S)=\{Y=\mathcal{Y}_S\}$.

考虑 RZ- 空间

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}_{(1,0)}\times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}}\mathcal{N}^{\mathrm{Kra}}_{(n-1,1)},$$

这里 $\mathcal{N}_{(1,0)}$ 的加入使我们能自然地定义闭链.

对于一个 $0\neq\boldsymbol{x}\in\mathbb{V}$, 设 $\mathcal{Z}(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathcal{N}$ 上的闭形式子概形 (closed formal subscheme), 使得

$$(Y,\iota_Y,\lambda_Y,\rho_Y,X,\iota_X,\lambda_X,\rho_X,\mathcal{F}_X)\in\mathcal{Z}(\boldsymbol{x})(S)$$

当且仅当拟同态 $\rho_X^{-1}\circ\boldsymbol{x}\circ\rho_Y$ 能够被提升成 Y 到 X 的 $\mathcal{O}_F$ 同态. 根据文献 [42, 命题 3.2.3] 可知, $\mathcal{Z}(\boldsymbol{x})$ 是一个除子. 对于任意一个满秩的格 $M\subset\mathbb{V}$ 以及上面的一组基 $\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\}$, 设

$$\mathrm{ht}_p(\boldsymbol{x})=\chi(\mathcal{N},\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_1)}\otimes^{\mathbb{L}}\cdots\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_n)}).$$

根据文献 [43] 可知, $\mathrm{ht}_p(\boldsymbol{x})$ 不依赖于基 $\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\}$ 的选取, 因此也可被记作 $\mathrm{Int}_p(M)$. 设 T 是 M (对于某组基) 的 Gram 矩阵. 当 p 是惯性时, Kudla 和 Rapoport [8] 提出了关于 $\mathrm{Int}_p(M)$ 的猜想, 这一猜想最近被 Li 和 Zhang [9] 所证明. 为了将分歧素数也考虑进去并方便 (3.20) 的证明, 我们提出以下猜想.

猜想 3.3 (有限素数上的局部算术 Siegel-Weil 猜想)　设 p 为一个有限的非分裂素数, $\mathfrak{p}$ 为 $\mathcal{O}_F$ 中在 p 之上的理想. 存在 $n-1$ 个函数 $\phi_p^i\in S(\mathbb{V}^n)$ 和相应的截面函数 $\Phi_p^i(s)\in I(s,\chi)$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 以及 (关于 p^s 的) 有理函数 $c_p^i(s)$ 满足 $c_p^i(0)=0$, 使得

$$\mathrm{ht}_p(\boldsymbol{x})\log\mathrm{N}(\mathfrak{p})=\mathrm{Int}_p(M)\cdot\log\mathrm{N}(\mathfrak{p})=\frac{W'_{T,p}(1,0,\Phi_p^*)}{W_{S_p,p}(1,0,\Phi_p)},$$

这里 S_p 是 L_p 的一个 Gram 矩阵, Φ_p 是 $\mathrm{Char}(L_p^n)$ 对应的标准截面函数, 而

$$\Phi_p^*=\Phi_p+\sum_{i=1}^{n-1}c_p^i(s)\Phi_p^i.$$

当 p 为惯性时, 我们可以让所有修改项 $\Phi_p^i(s)$ 都为 0.

为了让上述猜想变得精确, 我们需要决定误差项 Φ_p^i 及其系数 $c_p^i(s)$. 以下观察会为此给出一些提示. 令 $(t_{ij})=T$ 以及 $\mathrm{v}(T)=\min\{\mathrm{val}_\pi(t_{ij})\}$. 根据文献 [27, 定理 1.2], 如果 $\mathrm{v}(T)<0$, 则

$$\mathrm{ht}_p(\boldsymbol{x})=0.$$

因此, 如果 $\mathrm{v}(T)<0$, 则对应地有 $W'_{T,p}(1,0,\Phi_p^*)=0$. 当 $\min\{\mathrm{v}_\pi(t_{ij})\}\leqslant-2$ 时, $W'_{T,p}(1,0,\Phi_p^0)$ 自动为 0. 当 $\min\{\mathrm{v}_\pi(t_{ij})\}=-1$ 时, $W'_{T,p}(1,0,\Phi_p^0)$ 通常不为 0, 所以误差项也不为 0. 由此, 对于每个满足 $\mathrm{v}(T)=-1$ 的 T, 我们会得到一个关于误差项的等式.

对于一个 Hermite 格 L, 令 $\chi(L)=\chi(\mathrm{disc}(L))$. 此处 χ 为局部域 F_0 的二次扩张 F/F_0 所给出的特征. 根据文献 [44] 可知, 总共有 $n-1$ 个 Hermite 格的等价类使得它们的 Gram 矩阵 T 满足 $\mathrm{v}(T)=-1$:

$$\mathcal{H}_{\epsilon}^{n,i}:=\mathcal{H}^i\oplus I_{n-2i,\epsilon},\quad 1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2},\quad \epsilon=\pm1, \tag{3.26}$$

这里 $\mathcal{H}$ 为双曲平面 (hyperbolic plane), $I_{n-2i,\epsilon}$ 是秩为 $n-2i$ 使得 $\chi(I_{n-2i,\epsilon})=\chi(\mathcal{H}_{\epsilon}^{n,i})=\epsilon$ 的幺模 Hermite 格. 当 $n=2r$ 为偶数时, 令 $I_{0,\epsilon}=0$ 以及 $\mathcal{H}_1^{n,r}=\mathcal{H}^r$. 设 $\Phi_p^i(s)$ 为 $\mathrm{Char}(\mathcal{H}_{\chi(M)}^{n,i})$ 所给出的标准截面函数. 此时通过对每个 $\mathcal{H}_{\chi(M)}^{n,i}$ 的 Gram 矩阵 T 设 $W'_{T,p}(1,0,\Phi_p^*)=0$, 可以得到 $n-1$ 个关于 $\frac{\partial c_p^i(s)}{\partial s}|_{s=0}$ 的方程. 通过一些计算不难看出这个方程组拥有唯一的解. 结合 $c_p^i(0)=0$, 我们可以决定 $c_p^i(s)$. 对于更多关于此猜想的细节, 可参见文献 [45]. 特别地, 文献 [45] 证明了上述猜想 $n=3$ 的情形.

注 3.1 局部算术 Siegel-Weil 公式 (Kudla-Rapoport 猜想) 通常是通过 Hermite 二次型的局部密度 (local density) 多项式来被阐述的. 局部 Whittaker 函数与局部密度多项式之间仅相差一个简单的因子. 事实上, 设 L 为一个秩为 m 的整 $\mathcal{O}_{F_p}$- 格, 它有一个 Gram 矩阵 S. 设 $H_n=\mathrm{Her}_n(\mathbb{Z}_p)$ 以及

$$T\in H_n^{\vee}=\{T=(t_{ij})\in\mathrm{Her}_n(\mathbb{Q}_p):\ \mathrm{ord}_p(t_{ii})\geqslant0,\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(t_{ij}\partial_F)\geqslant0\},$$

这里 $H_n^{\vee}$ 是 $\mathrm{Her}_n(\mathbb{Z}_p)$ 在 $\psi(\mathrm{tr}(XY))$ 下的对偶. 设

$$\alpha(L,T)=\int_{\mathrm{Her}_n(\mathbb{Q}_p)}\int_{L^n}\psi(\mathrm{tr}(b((x,x)-T)))dxdb$$

为局部密度 (在文献 [28,29] 的定义下). 这里取 Haar 测度 dx 和 db 使得 $\mathrm{Vol}(L,dx)=\mathrm{Vol}(H_n,db)=1$. 根据这个定义可知, 对于足够大的 ℓ 有

$$\begin{aligned}\alpha(L,T)&=|d|_p^{-\frac{n(n-1)}{2}}p^{ln(n-2m)}|\{X\in M_{m,n}(\mathcal{O}_{F_p}/p^l):\ S[X]-T\in p^lH_n\}|\\&=p^{ln(n-2m)}|\{X\in M_{m,n}(\mathcal{O}_{F_p}/p^l):\ S[X]-T\in p^lH_n^{\vee}\}|,\end{aligned} \tag{3.27}$$

这里 d 是 F 的判别式. 事实上, $\alpha(L,T)$ 只取决于 L 的 Gram 矩阵 S. 经典的局部密度

$$\alpha^{cl}(S,T)=\lim_{l\to\infty}p^{ln(n-2m)}|\{X\in M_{m,n}(\mathcal{O}_{F_p}/p^l):\ S[X]-T\in p^lH_n\}|$$

与 $\alpha(L,T)$ 相差一个为 $|d|_p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 的因子. 在惯性素数的情形下, 这两者是一样的. 简单的计算告诉我们局部 Whittaker 函数与局部密度之间的关系如下 ($s_n=\frac{m-n}{2}$):

$$\begin{aligned}W_{T,p}(1,s_n,\mathrm{Char}(L^n))&=\gamma(L^n)|\det L|_p^n|d|_p^{\frac{n(2m+n-1)}{4}}\alpha(L,T)\\&=\gamma(L^n)|\det L|_p^n|d|_p^{\frac{n(2m-n+1)}{4}}\alpha^{cl}(S,T).\end{aligned} \tag{3.28}$$

局部密度多项式 $\alpha(L,T,X)$ 被定义为

$$\alpha(L,T,p^{-2r})=\alpha(L_r,T),$$

这里 $L_r=L\oplus\mathcal{H}^r$, 而 $\mathcal{H}$ 是引理 2.2 中的双曲平面. 所以

$$W_{T,p}(1,s_m+r,\mathrm{Char}(L^n))=\gamma(L^n)|\det L|_p^n|d|_p^{\frac{n(2m+n-1)}{4}}\alpha(L,T,p^{-2r}). \tag{3.29}$$

在以上猜想的情形下, $m=n$ 而 $s_m=0$.

我们需要对猜想 3.2 中 Eisenstein 级数做如下修改: 设 $E(\tau,s,\Phi^*)$ 为 $\Phi^*=\otimes\Phi_p^*$ 所给出的 Eisenstein 级数. 这里当 p 是非分裂的, Φ_p^* 在猜想 3.3 中给出. 当 p 在 F 中分裂时, $\Phi_p^*=\Phi_p$ 是 $\mathrm{Char}(L_p^n)$ 对应的标准截面函数. 当 $p=\infty$ 时, $\Phi_p^*=\Phi_\infty^\ell$ 是 Gauss 函数 $\phi_\infty\in S(\mathcal{C}_\infty^n)$ 所对应的标准截面函数.

定理 3.5 假设猜想 3.3 为真, 并设 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$, 则有

$$\widehat{\deg}\mathcal{Z}(T)q^T=C\cdot\mathcal{E}_T'(\tau,0,\Phi^*),$$

这里 $C=\frac{(-1)^nh_F}{w_F\operatorname{Vol}(K_u,dh)\operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n),dh)}$ 与定理 3.4 中的常数 C 相同, 而

$$K_u=K_L=\{h\in\mathrm{U}(V)(\mathbb{A}_f):hL=L\}.$$

证明 $p=\infty$ 的情形已被定理 3.4 证明, 这是因为对于任意素数 q 有

$$W_{T,q}(1,0,\Phi_q^*)=W_{T,q}(1,0,\Phi_q).$$

假设 p 是有限的并且在 F 中非分裂. 我们与以前一样将 G 和 $G_0\times H$ 等同起来 ($G_0=\mathrm{GU}(W_0)$, $H=\mathrm{U}(V)$). 在这一等同下 $K=K_0\times K_u$ 而 $K_0=\hat{\mathcal{O}}_F^\times$. 设 $H^{(p)}=U(V^{(p)})$, 而 $G^{(p)}=G_0\times H^{(p)}$ 是 G 的类比. 注意到在这一等同下, G_0 在 $V^{(p)}$ 和 $\mathcal{N}$ 上的作用是平凡的. 为了简化符号, 记 $V^{(p)}=\tilde{V}$, $H^{(p)}=\tilde{H}$, 以此类推.

根据文献 [41, 引理 2.21] 知, $\mathcal{Z}(T)$ 支撑在 $\mathcal{M}$ 的超奇异轨迹 $\mathcal{M}^{ss}$ 上. 设 $\widehat{\mathcal{M}}^{ss}$ 为 $\mathcal{M}\times_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F}\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\breve{F}_p}$ 沿着其超奇异轨迹的形式完备化 (formal completion). 根据 p 进单值化定理 (参见文献 [46, 定理 6.30] 和 [41, 定理 5.5]) 可得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}^{ss}&\cong\tilde{G}(\mathbb{Q})\backslash(\mathcal{N}'\times\tilde{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p)\\&\cong(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}_f)/K_0)\times(\tilde{H}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}\times H(\mathbb{A}_f^p)/K_u^p),\end{aligned}$$

这里 $\mathcal{N}'=(G_0(\mathbb{Q}_p)/K_{0,p})\times\mathcal{N}$. 在这一等同下 (参见文献 [41, 命题 6.3] 和 [24, 命题 4.4]), 有

$$\widehat{\mathcal{Z}(T)}\cong(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}_f)/K_0)\times\bigsqcup_{h\in\tilde{H}(\mathbb{Q})\backslash\tilde{H}(A_f^p)/K_u^p}\ \bigsqcup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Omega^{(p)}(T)\\h^{-1}\boldsymbol{x}^p\in L^n\otimes\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}}}\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_p),$$

这里 $\widehat{\mathcal{Z}(T)}$ 是 $\mathcal{Z}(T)$ 在 $\widehat{\mathcal{M}}^{ss}$ 中的闭包, 而 $\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_p)$ 是 $\boldsymbol{x}_p\in\tilde{V}_p^n=\mathbb{V}^n$ 所对应的在 $\mathcal{N}$ 中的特殊闭链, 并且

$$\Omega^{(p)}(T)=\{\boldsymbol{x}\in\tilde{V}^n:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=T\}.$$

取定 $\boldsymbol{x}\in\Omega^{(p)}(T)$, 则

$$\tilde{H}(\mathbb{Q})\cong\Omega^{(p)}(T),\quad h\mapsto h\boldsymbol{x}.$$

根据猜想 3.3 和定理 2.3, 有

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\hat{\mathcal{Z}}(T))&=\frac{h_F}{w_F}\sum_{h\in\tilde{H}(\mathbb{Q})\backslash H(A_f^p)/K_u^p}\ \sum_{h_0\in\tilde{H}(\mathbb{Q})}\phi_f^p(h^{-1}h_0^{-1}\boldsymbol{x}^p)\operatorname{ht}_p(\boldsymbol{x}_p)\log(\mathrm{N}(\mathfrak{p}))\\&=\frac{h_F}{w_F}\frac{W_{T,p}'(1,0,\Phi_p^*)}{W_{S_p,p,}(1,0,\Phi_p)}\int_{H(\mathbb{A}_f^p)/K_u^p}\phi_f^p(h^{-1}\boldsymbol{x}^p)dh\\&=\frac{h_F}{w_F\operatorname{Vol}(K_u^p,dh)}\frac{W_{T,p}'(1,0,\Phi_p^*)}{W_{S_p,p}(1,0,\Phi_p)}\gamma(V(\mathbb{A}_f^p)^n)^{-1}W_{T,\mathbb{A}_f^p}(1,0,(\Phi^*)_f^p)\end{aligned}$$

$$= \frac{h_F}{w_F \operatorname{Vol}(K_u^p, dh)} C_1 E'_T(\tau, 0, \Phi^*),$$

而

$$C_1^{-1} = \gamma(V(\mathbb{A}_f^p)^n) W_{S_p,p,}(1, 0, \Phi_p) W_{T,\infty}(\tau, 0, \Phi^\ell),$$

这里 S_p 是 L_p 的一个 Gram 矩阵. 因为 T 是正定的, 所以定理 2.3 告诉我们

$$C_1^{-1} = \prod_{p \leqslant \infty} \gamma(\mathcal{C}_p^n) \operatorname{Vol}(K_{L,p}, dh) \operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh) q^T = (-1)^n \operatorname{Vol}(K_{L,p}, dh) \operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh) q^T.$$

将此代入以上公式, 定理得证. □

事实上, 我们可以得到 C 的显式表达. 设 δ_d 为 d 中的相异素因子个数, 定义

$$L(2s, n, \epsilon_{F/\mathbb{Q}}) = \prod_{i=1}^n L(2s+i, \epsilon_{F/\mathbb{Q}}^i) \quad \text{以及} \quad L(2s+i, \epsilon_{F/\mathbb{Q}}^2) := \zeta(2s+i).$$

命题 3.1 定理 3.5 中的常数 C 是

$$C = \begin{cases} \dfrac{\Gamma_n(n) h_F |d|^{\frac{n(n+1)}{4}}}{(2\pi)^{n^2} 2^{\delta_d} w_F} L(0, n, \epsilon_{F/\mathbb{Q}}), & \text{如果 } n \text{ 是奇数}, \\ \dfrac{-\Gamma_n(n) h_F |d|^{\frac{n(n-1)}{4}}}{(2\pi)^{n^2} 2^{\delta_d} w_F} L(0, n, \epsilon_{F/\mathbb{Q}}) \displaystyle\prod_{p \mid d} (p^{\frac{n}{2}} + \epsilon(V_p)), & \text{如果 } n \text{ 是偶数}, \end{cases}$$

这里 $\epsilon(V_p)$ 与其在 (2.16) 中的意义相同.

证明 为了让 C 更为精确, 我们需要计算 $\operatorname{Vol}(K_u, dh)$ 和 $\operatorname{Vol}(\mathrm{U}(n), dh)$. 根据定理 2.3 知,

$$\operatorname{Vol}(K_u, dh) = \prod_{p<\infty} \gamma_p(V^n)^{-1} W_T(1, 0, \operatorname{Char}(L_p^n)),$$

这里 T 是 L 的一个 Gram 矩阵. 回顾注 3.1 (此处 $m = n$):

$$\begin{aligned} W_{T,p}(1, 0, \operatorname{Char}(L^n)) &= \gamma(L^n) |\det L|_p^n |d|_p^{\frac{n(2m+n-1)}{4}} \alpha(L, T) \\ &= \gamma(L^n) |\det L|_p^n |d|_p^{\frac{n(2m-n+1)}{4}} \alpha^{cl}(S, T). \end{aligned} \tag{3.30}$$

当 n 为奇数时, 文献 [47, 定理 7.3] 告诉我们

$$\alpha_p^{cl}(L_p, L_p) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^n (1 - \epsilon_{F_p/\mathbb{Q}_p}(p)^i p^{-i}), & \text{如果 } p \nmid d, \\ 2 \displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - p^{-2i}), & \text{如果 } p \mid d. \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(K_u, dh) &= \prod_{p<\infty} |N(\det L)|_p^{\frac{n}{2}} |d|_p^{\frac{n(n+1)}{4}} \alpha_p^{cl}(L_p, T) \\ &= |d|^{-\frac{n(n+1)}{4}} L(0, n, \epsilon_{F/\mathbb{Q}})^{-1}. \end{aligned}$$

另外根据定理 3.4, 可得

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n),dh)=\frac{(2\pi)^{n^2}}{\Gamma_n(n)}=(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}(i!)^{-1}.$$

结合以上信息有

$$\begin{aligned}C&=\frac{(-1)^n h_F}{w_F\mathrm{Vol}(K_u,dh)\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n),dh)}\\&=\frac{\Gamma_n(n)h_F|d|^{\frac{n(n+1)}{4}}}{(2\pi)^{n^2}2^{\delta_d}w_F}L(0,n,\epsilon_{F/\mathbb{Q}}).\end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 文献 [47, 定理 7.3] 告诉我们

$$\alpha_p^{cl}(L_p,L_p)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\epsilon_{F_p/\mathbb{Q}_p}(p)^i p^{-i}), & \text{如果 } p\nmid d,\\ \displaystyle 2(1-\epsilon(V_p)p^{-\frac{n}{2}})\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(1-p^{-2i}), & \text{如果 } p\mid d.\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K_u,dh)&=\prod_{p<\infty}|\det L|_p^n|d|_p^{\frac{n(n+1)}{4}}\alpha_p^{cl}(L_p,T)\\&=|d|^{-\frac{n(n+1)}{4}}2^{\delta_d}L(0,n,\epsilon_{F/\mathbb{Q}})^{-1}\prod_{p\mid d}\frac{p^{\frac{n}{2}}}{p^{\frac{n}{2}}+\epsilon(V_p)}.\end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned}C&=\frac{(-1)^n h_F}{w_F\mathrm{Vol}(K_u,dh)\mathrm{Vol}(\mathrm{U}(n),dh)}\\&=\frac{-\Gamma_n(n)h_F|d|^{\frac{n(n+1)}{4}}}{(2\pi)^{n^2}2^{\delta_d}w_F}L(0,n,\epsilon_{F/\mathbb{Q}})\prod_{p\mid d}\frac{p^{\frac{n}{2}}+\epsilon(V_p)}{p^{\frac{n}{2}}}\\&=\frac{-\Gamma_n(n)h_F|d|^{\frac{n(n-1)}{4}}}{(2\pi)^{n^2}2^{\delta_d}w_F}L(0,n,\epsilon_{F/\mathbb{Q}})\prod_{p\mid d}(p^{\frac{n}{2}}+\epsilon(V_p)).\end{aligned}$$

证毕. □

处理 (3.20) 中的退化系数等同于证明如下等式的非退化系数的情形.

猜想 3.4　对于 $0\leqslant m\leqslant n-1$, 存在 $\mathrm{U}(m,m)$ 上的一个 "正规化" 的 Eisenstein 级数 $\mathbb{E}(\tau,s,\Phi^*)$ 和一个常数 $C_1\neq 0$ 使得

$$\phi_m^{ar}(\tau)\cdot\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{n-m}=C_1\cdot\mathbb{E}'\bigg(\tau,\frac{n-m}{2},\Phi^*\bigg).$$

这里对于有限 p, Φ_p^* 是 $\mathrm{Char}(L_p^m)$ 的标准截面函数的某些修正 (这些修正只有在 "糟糕" 的素数处才需要), 而 $\Phi_\infty=\Phi_\infty^\ell$. $m=0$ 的情形等同于给出算术体积 $\widehat{\omega}^n$ 的一个显式表达.

这里 Eisenstein 级数的正规化过程是重要的, 因为它在 $\frac{n-m}{2}$ 的值非零 (参见文献 [3,4,25,26]).

4 U(1,1) 型志村曲线上的算术 Siegel-Weil 公式

本节考虑 $n=2$ 的特殊情形. 我们会将猜想 3.3 变得更精确并且加以证明, 由此可以得出定理 3.5 在此情形下的无条件的证明. 事实上, 在此情形下, 我们可以将上节中的一些条件稍微放宽. 令 B 为导子 (conductor) 等于 $D=D(B)$ 的 $\mathbb{Q}$ 上的不定四元数代数 (indefinite quaternion algebra). 令 $\mathcal{O}$ 为一个指标 (index) 为 N 的 Eichler 序 (order). 我们要求 N 没有平方因子 (square-free) 并且 $(N,D)=1$. 假设 dND 是奇数. 局部来看,

$$\mathcal{O}_p=\begin{cases}\mathcal{O}_{B_p}, & \text{如果 } p\mid D,\\ L_0(p), & \text{如果 } p\mid N,\\ M_2(\mathbb{Z}_p), & \text{如果 } p\nmid ND,\end{cases}\tag{4.1}$$

这里 $\mathcal{O}_{B_p}$ 是可除代数 (division algebra) B_p 的极大序 (maximal order), 并且

$$L_0(p)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_p):\ p\mid c\right\}.$$

假设存在并固定一个嵌入 $i:\mathcal{O}_F\hookrightarrow\mathcal{O}$, 它可延拓为 $F\hookrightarrow B$. 通过这一嵌入, 我们将 $\mathcal{O}_F$ 视为 $\mathcal{O}$ 的一个子环. 选取 $\delta\in\mathcal{O}$ 使得 $\delta^2=\Delta\in\mathbb{Z}$ 与 dND 互素并且对于 $x\in F$ 有 $x\delta=\delta\bar{x}$. 回顾 $d=d(F)$ 是 F 的判别式 (discriminant), 那么 $B=F+F\delta$. 令 $\mathrm{tr}_F(x+y\delta)=x$, 这里 $x,y\in F$, $z\mapsto z^\iota$ 为 B 的主对合变换 (main involution).

设 $L=\mathcal{O}$ 并带有以下 $\mathcal{O}_F$-Hermite 二次型:

$$(z_1,z_2)=\mathrm{tr}_F(z_1z_2^\iota),$$

设 $V=L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=B$ 为对应的符号为 $(1,1)$ 的酉空间. 事实上, 每个 F 上符号为 $(1,1)$ 的酉空间都可由此得到.

视 V 为 F 上的一个线性空间, 令 B 在 V 上通过右乘作用. 这一作用诱导出一个环的嵌入 (这里将 $\{1,\delta\}$ 视作一组基)

$$\alpha: B\hookrightarrow\mathrm{End}_F(V)=M_2(F),\quad (x+y\delta)h=(x,y)\alpha(h)\begin{pmatrix}1\\ \delta\end{pmatrix}.\tag{4.2}$$

更具体地,

$$\alpha(h_1+h_2\delta)=\begin{pmatrix}h_1 & h_2\\ \bar{h}_2\delta^2 & \bar{h}_1\end{pmatrix}.\tag{4.3}$$

回顾

$$\mathrm{GU}(V)=\{h\in\mathrm{GL}_2(F):\ h\,\mathrm{diag}(1,-\delta^2)\,{}^t\bar{h}=\nu(h)\,\mathrm{diag}(1,-\delta^2)\},$$

此处相似因子 $\nu(h)\in Q^\times$. 以下引理可由计算直接验证, 细节留给读者.

引理 4.1　映射 (4.2) 诱导了一个嵌入 $\alpha: B^\times \to \mathrm{GU}(V)$ 使得相似因子 $\nu(\alpha(h)) = \det h = hh^\iota$ 与约化范数 (reduced norm) 相等. 另外,

$$\begin{aligned}&\alpha(B^1) = \mathrm{SU}(V), \quad \text{此处 } B^1 \text{ 由 } B^\times \text{ 中范数为 1 的元素构成},\\&\mathrm{U}(V) = \alpha(B^1) \ltimes \mathrm{U}(1),\\&\mathrm{GU}(V) = \alpha(B^\times) \ltimes \mathrm{U}(1),\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{U}(1) = F^1$ 通过 $\epsilon \mapsto \mathrm{diag}(1, \epsilon)$ 嵌入到 $\mathrm{U}(V)$.

设 $\mathfrak{a}_0$ 为 F 的一个分式理想并带有一个 Hermite 二次型 $(x, y) = \frac{x\bar{y}}{\mathrm{N}(\mathfrak{a}_0)}$, 令 $W_0 = \mathfrak{a}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = F$ 并带有对应的 Hermite 二次型. 设 $W = B$ 并带有 Hermite 二次型

$$(z_1, z_2)_W = \frac{(z_1, z_2)}{\mathrm{N}(\mathfrak{a}_0)} = \frac{\mathrm{tr}_F(z_1 z_2^\iota)}{\mathrm{N}(\mathfrak{a}_0)}.$$

设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\mathcal{O} \subset W$, 我们将其视为 W 的一个 $\mathcal{O}_F$ 格. 不难验证, 作为 Hermite $\mathcal{O}_F$ 格

$$L \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}),$$

并且 $V = \mathrm{Hom}_F(W_0, W)$. 回顾

$$G = \{(g_0, g) \in \mathrm{GU}(W_0) \times \mathrm{GU}(W) : \nu(g_0) = \nu(g)\} \cong G_0 \times H, \quad (g_0, g) \mapsto (g_0, g_0^{-1}g),$$

这里 $G_0 = \mathrm{GU}(W_0) = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$, $H = \mathrm{U}(V)$. 另外如第 3 节, 设

$$K = \{(g_0, g_1) \in H(\mathbb{A}_f) : g_0\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0, g_1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} \cong K_0 \times K_L.$$

此时对应的 F 上的志村曲线 M 有以下性质:

$$M(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{D} \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

因为 $\mathfrak{a}$ 作为 $\mathcal{O}_F$ 格不是单位模的, $\mathcal{M}$ 的整模型作为模空间的解释与第 3 节略有不同. 接下来对此进行讨论. 令 $D = D_1D_2$, $N = N_1N_2$, 使得

$$N_1 \mid d, \quad (N_2, d) = 1, \quad D_1 \mid d, \quad (D_2, d) = 1, \quad d \mid ND, \quad d \equiv x^2 \pmod{4N_2}, \tag{4.4}$$

这里 $d \equiv x^2 \pmod{4N_2}$ 可由 $\mathcal{O}_F \subset \mathcal{O}$ 这一条件所得出. 同时, 此条件还保证了 D 中的素因子在 $\mathcal{O}_F$ 中是非分裂的 (nonsplit). 不难验证, 由以上关于 d、N 和 D 的假设可以推导出

$$D_2N_2L^\vee \subset L \subset L^\vee \quad 和 \quad [L^\vee : L] = (D_2N_2)^2,$$

这里 $L^\vee$ 为 L 关于 Hermite 二次型的对偶格.

设 $\mathcal{M}_{(1,1)}^{\mathrm{Kra}} = \mathcal{M}_{(1,1)}^{\mathrm{Kra}, D_2N_2}$ 为 $\mathcal{O}_F$ 上的一个模空间栈 (moduli stack), 使得 $\mathcal{M}_{(1,1)}^{\mathrm{Kra}}$ 赋予 $\mathcal{O}_F$ 概形 S 由满足以下条件的元组 $(A, \iota, \lambda, \mathcal{F}_A)$ 所组成的广群范畴.

(1) $A \to S$ 是一个相对维数为 2 的 Abel 概形;

(2) $\iota: \mathcal{O}_F \to \mathrm{End}(A)$ 是一个 $\mathcal{O}_F$ 作用;

(3) $\lambda: A \to A^\vee$ 是一个对于任意 $\alpha \in \mathcal{O}_F$ 满足 $\iota(\alpha)^\dagger = \iota(\overline{\alpha})$ 的极化, 并且

$$\ker(\lambda) \subset A[D_2N_2] \quad 和 \quad |\ker(\lambda)| = (D_2N_2)^2;$$

(4) $\mathcal{F}_A \subset \mathrm{Lie}(A)$ 是 $\mathcal{O}_F$- 稳定秩为 $n-1$ 的一个 $\mathcal{O}_S$- 模, 并且局部地为 $\mathrm{Lie}(A)$ 的直和项. 它满足 Krämer 条件[34]: $\mathcal{O}_F$ 通过结构同态 $\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_S$ 作用在 $\mathcal{F}_A$ 上, 通过结构同态共轭作用在 $\mathrm{Lie}(A)/\mathcal{F}_A$ 上. 注意到与之前的模空间的解释相比, 只有条件 (3) 有所变化.

现在定义 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ 为分类以下对象的模栈:

$$(A_0, A) \in \mathcal{M}_{(1,0)}(S) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F} \mathcal{M}^{\mathrm{Kra}}_{\mathcal{O},(1,1)}(S), \tag{4.5}$$

这里 S 依旧为任意 $\mathcal{O}_F$ 概形. 同时要求对于 S 的任意特征为 p 的几何点 s, 存在一个 Hermite 模同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(T_\ell A_{0,s}, T_\ell A_s) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}) \otimes \mathbb{Z}_\ell, \tag{4.6}$$

这里 ℓ 为任意不为 p 的素数. 注意到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(A_0, A)$ 上有一个正定的 Hermite 二次型

$$(f_1, f_2) = \lambda_{A_0}^{-1} \circ f_2^\vee \circ \lambda_A \circ f_1 \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(A_0) = \mathcal{O}_F. \tag{4.7}$$

作为 $\mathcal{O}_F$ 上的一个栈, $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ 是正则且平坦的 (regular and flat). 它的复单值化 (complex uniformization) 可由以下命题给出.

命题 4.1 我们有以下同构:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}) \cong G(\mathbb{Q})\backslash \mathbb{D} \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

特殊闭链 $\mathcal{Z}(T)$ 的定义与第 3 节中的定义完全相同. Rapoport-Zink 空间 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{1,0} \times \mathcal{N}^{\mathrm{Kra}}_{1,1}$ 此时需要一些修正, 非常类似之前对于整模型的修正. 例如, $\mathcal{O}_{\breve{F}_p}$ 上的 RZ 空间 $\mathcal{N}^{\mathrm{Kra}}_{(1,1)}$ 定义为表示以下模问题的形式模栈 (参见文献 [34,48]): 对于 $S \in \mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{F}_p}}$, $\mathcal{N}^{\mathrm{Kra}}_{(1,1)}(S)$ 是满足以下条件的元组 $(X, \iota, \lambda, \rho, \mathcal{F}_X)$ 所组成的广群范畴.

(1) X 是 S 上的相对维数为 2、高度为 4 的 p 可除群;

(2) $\iota: \mathcal{O}_{F_p} \to \mathrm{End}(X)$ 是一个 $\mathcal{O}_{F_p}$ 作用, 满足 Kottwitz 条件:

$$\mathrm{char}(\iota(\pi) \mid \mathrm{Lie}(X)) = (T - \pi)(T + \pi) = T^2 - \pi_0;$$

(3) $\lambda: X \to X^\vee$ 是一个对于任意 $\alpha \in \mathcal{O}_{F_p}$ 满足 $\iota(\alpha)^\dagger = \iota(\overline{\alpha})$ 的拟极化 (quasi-polarization), 并且

$$\ker(\lambda) \subset X[p], \quad |\ker(\lambda)| = p^{2\mathrm{val}_p(D_2 N_2)};$$

(4) $\rho: X \times_S \bar{S} \to \mathbb{X} \times_{\mathrm{Spec}\,k} \bar{S}$ 是一个高度为 0、$\mathcal{O}_{F_p}$- 线性的拟同源 (quasi-isogeny), 并且 λ 和 $\rho^*(\lambda_{\mathbb{X}})$ 在 $\bar{S}$ 上局部地只相差 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}^\times$ 中的一个因子;

(5) $\mathcal{F}_X$ 是 $\mathrm{Lie}(X)$ 的一个 $\mathcal{O}_{F_p} \otimes \mathcal{O}_S$ 子模, 它的 $\mathcal{O}_S$ 秩为 1 并且是 $\mathrm{Lie}(X)$ 的 $\mathcal{O}_S$ 直和项;

(6) $\mathcal{O}_{F_p}$ 通过结构同态作用在 $\mathcal{F}_X$ 上, 通过结构同态的共轭作用在 $\mathrm{Lie}(X)/\mathcal{F}_X$ 上.

注意到, 只有条件 (3) 与之前的条件有所不同.

固定 $\mathcal{N}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 中的一个元素 $(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, 令 $\mathbb{V} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) \otimes \mathbb{Q}$. 对于一个满秩的格 $M = M_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2} \subset \mathbb{V}$, 令 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ 为它的一组基, 它的局部高度 (相交数) 由下式给出:

$$\mathrm{ht}_p(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Int}_p(M) = \mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_1) \cdot \mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_2) := \chi(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_1)} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}_2)}).$$

现在定义一个如猜想 3.3 和定理 3.5 中所述的修正截面函数 $\Phi_p^* = \Phi_p + c_p(s)\Phi_p^c$, $\Phi^* = \otimes \Phi_p^*$, 这里当 $p < \infty$ 时, Φ_p 是由 $\mathrm{Char}(L_p^2)$ 所给出的 $I(s, \chi_p)$ 中的一个标准截面函数. 而 $\Phi_\infty = \Phi_\infty^\ell$,

$\ell=(\frac{2+\kappa(\chi_\infty)}{2},\frac{-2+\kappa(\chi_\infty)}{2})$. 设 $\Phi_p^c\in I(s,\chi_p)$ 为由 $\mathrm{Char}(\mathcal{H}_p^2)$ 所诱导的标准截面函数, 这里 $\mathcal{H}_p=\partial_{F_p}^{-1}\oplus\mathcal{O}_{F_p}$ 是双曲平面, 带有 Hermite 二次型 $(x,y)=x_1\bar{y}_2+x_2\bar{y}_1$. 设

$$c_p(s)=\frac{p^s-p^{-s}}{1-p^2}\begin{cases}1, & \text{如果 } p\mid D,\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

特别地, 如果 $p\nmid D$, $\Phi_p^*=\Phi_p$. 当 p 在 F 中是惯性的且 $p\mid D$ 时, 一些额外修正是必须的.

定理 4.1 沿用上文记号, 那么猜想 3.3 在此种情形下成立, 从而可得定理 3.5 无条件地成立:

$$\widehat{\deg}(\hat{\mathcal{Z}}(T,v))q^T=C\cdot E_T'(\tau,0,\Phi^*),$$

这里

$$C=\frac{h_F^2}{24\cdot 2^{\delta_d}\cdot w_F^2}\prod_{p\mid D}(p-1)\prod_{p\mid d,p\mid N}(p+1).$$

证明 我们在各种不同情形下分别验证上述定理. 首先假设 $\mathrm{Diff}(\mathcal{C},T)=\{p\}$, 这里 $p<\infty$ 并且在 F 中是非分裂的 ($p=\infty$ 的情形已由定理 3.4 所考虑). 特别地, T 是正定的.

情形 1 如果 $p\nmid dND$, 也即所有对象在 p 处都是非分歧的, 那么上述定理是文献 [9] 中主定理的一个特殊情形.

情形 2 如果 $p\mid D$ 和 $p\nmid d$, 上述定理由 Sankaran [24] 所证. 简而言之, 注 3.1 给出了

$$W_{T,p}(1,r,\mathrm{Char}(L_p^2))=\gamma(V_p^2)|\det L|_p^2\alpha(L,T,p^{-2r})\tag{4.8}$$

(文献 [24, 命题 4.11] 中的 $\alpha(S_r,T)$ 应为 $\alpha(S_{2r},T)$). 令 $\alpha'(L,T)=-\frac{d\alpha(L,T,X)}{dX}|_{X=1}$, 如同文献 [24,28,29] 中所设. 在我们的情形下, $n=m=2$. 我们有

$$\frac{W_{T,p}'(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}{W_{S_p,p}(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}=2\log p\frac{\alpha'(L_p,T)}{\alpha(L_p,S_p)}$$

以及

$$\frac{W_{T,p}(1,0,\mathrm{Char}(\mathcal{H}^2))}{W_{S_p,p}(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}=p^2\frac{\alpha(\mathcal{H},T)}{\alpha(L_p,S_p)},$$

这里 S_p 是 L_p 的 Gram 矩阵. 根据文献 [24, 推论 2.17 和 3.6], 当 $(x,x)=T$ 时, 有

$$\mathrm{ht}_p(x)=\frac{\alpha'(L,T)}{\alpha(L,S)}-\frac{p^2}{p^2-1}\frac{\alpha(\mathcal{H},T)}{\alpha(L,S)}.$$

因此 (此时 $\mathfrak{p}=p\mathcal{O}_F$)

$$\mathrm{ht}_p(x)\log(\mathrm{N}(\mathfrak{p}))=\frac{W_{T,p}'(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}{W_{S_p,p}(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}+c_p'(0)\frac{W_{T,p}(1,0,\mathrm{Char}(\mathcal{H}^2))}{W_{S_p,p}(1,0,\mathrm{Char}(L_p^2))}.$$

情形 3 如果 $p\mid d$ 并且 $p\mid D$, 则这种情形下上述定理可由文献 [29, 定理 1.3] 以及一些类似情形 2 中的论证得到.

情形 4 如果 $p\mid d$ 和 $p\mid N$, 则这种情形下上述定理可由文献 [28, 定理 7.1] 得到.

$p\nmid d$ 并且 $p\mid N$ 的情形可由 $\mathcal{O}_F\subset\mathcal{O}$ 这一条件排除.

现在具体地计算 C. 此种情形下, 根据文献 [47, 定理 7.3], 有

$$\alpha_p^{cl}(L_p,L_p)=\begin{cases}(1-p^{-1})(1-p^{-2}), & \text{如果 } p \text{ 在 } F \text{ 中分裂并且 } p\nmid N,\\ p(1-p^{-1})^2, & \text{如果 } p \text{ 在 } F \text{ 中分裂并且 } p\mid N,\\ (1+p^{-1})(1-p^{-2}), & \text{如果 } p \text{ 是惯性的且 } p\nmid ND,\\ p(1+p^{-1})^2, & \text{如果 } p \text{ 是惯性的且 } p\mid D,\\ 2\dfrac{(p+1)}{p}, & \text{如果 } p\mid d \text{ 且 } p\mid D,\\ 2\dfrac{(p-1)}{p}, & \text{如果 } p\mid d \text{ 且 } p\mid N.\end{cases}$$

基于以上公式, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K_u,dh)&=\prod_{p<\infty}|N(\det L)|_p|d_F|_p^{\frac{3}{2}}\alpha_p^{cl}(L_p,L_p)\\&=|d_F|^{-\frac{3}{2}}\zeta(2)^{-1}L(1,\epsilon_{F/\mathbb{Q}})^{-1}\prod_{p|N_2}\frac{1}{p+1}\prod_{p|D_2}\frac{1}{p-1}\prod_{p|D_1}\frac{2p}{p-1}\prod_{p|N_1}\frac{2p}{p+1}.\end{aligned}$$

根据类数公式, 有

$$L(1,\epsilon_{F/\mathbb{Q}})=\frac{2\pi h_F}{w_F\sqrt{|d|}}.$$

另外, 根据定理 3.4, 可得

$$\mathrm{Vol}(U(2),dh)=\frac{(2\pi)^{2^2}}{\Gamma_2(2)}=(2\pi)^3.$$

最后, 结合以上所述, 可得

$$C=\frac{(-1)^2h_F}{w_F\mathrm{Vol}(K_u,dh)\mathrm{Vol}(U(2),dh)}=\frac{h_F^2}{24\cdot 2^{\delta_d}\cdot w_F^2}\prod_{p|D}(p-1)\prod_{p|N}(p+1).$$

证毕. □

致谢 冯克勤教授不仅是一位杰出的数学家, 还是一位优秀的对学生关怀备至的导师. 他为我们树立了榜样. 如果没有冯教授的帮助、鼓励与指导, 第三作者杨同海基本没有机会开始自己的数论研究. 他非常感激冯教授提供的机会与帮助. 作者们很感谢杜托平、尹洪波、张志宇、Ben Howard 和 Steve Kudla 在本文写作过程中所给予的帮助.

参考文献

1 Kudla S S. Central derivatives of Eisenstein series and height pairings. Ann of Math (2), 1997, 146: 545–646
2 Kudla S S, Rapoport M, Yang T H. On the derivative of an Eisenstein series of weight one. Int Math Res Not IMRN, 1999, 1999: 347–385
3 Kudla S S, Rapoport M, Yang T H. Derivatives of Eisenstein series and Faltings heights. Compos Math, 2004, 140: 887–951
4 Kudla S S, Rapoport M, Yang T H. Modular Forms and Special Cycles on Shimura Curves. Princeton: Princeton University Press, 2006
5 Borcherds R E. The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions. Duke Math J, 1999, 97: 219–233
6 Zhang W. Modularity of generating functions of special cycles on Shimura varieties. PhD Thesis. New York: Columbia University, 2009

7 Bruinier J H, Westerholt-Raum M. Kudla's modularity conjecture and formal Fourier-Jacobi series. Forum Math Pi, 2015, 3: e7–30
8 Kudla S, Rapoport M. Special cycles on unitary Shimura varieties I: Unramified local theory. Invent Math, 2011, 184: 629–682
9 Li C, Zhang W. Kudla-Rapoport cycles and derivatives of local densities. arXiv:1908.01701,2019
10 Bruinier J H, Yang T. Arithmetic degrees of special cycles and derivatives of Siegel Eisenstein series. J Eur Math Soc (JEMS), 2021, 23: 1613–1674
11 Liu Y F. Arithmetic theta lifting and L-derivatives for unitary groups, I. Algebra Number Theory, 2011, 5: 849–921
12 Garcia L E, Sankaran S. Green forms and the arithmetic Siegel-Weil formula. Invent Math, 2019, 215: 863–975
13 Bruinier J H, Howard B, Kudla S S, et al. Modularity of generating series of divisors on unitary Shimura varieties II: Arithmetic applications. Astérisque, 2020, 421: 127–186
14 Howard B, Pera K M. Arithmetic of Borcherds products. Astérisque, 2020, 421: 187–297
15 Li C, Liu Y F. Chow groups and L-derivatives of automorphic motives for unitary groups. Ann of Math (2), in press, 2020
16 Liu Y F. Arithmetic theta lifting and L-derivatives for unitary groups, II. Algebra Number Theory, 2011, 5: 923–1000
17 Howard B, Yang T H. Intersections of Hirzebruch-Zagier Divisors and CM Cycles. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2041. Heidelberg: Springer, 2012
18 Kudla S S, Rapoport M. Arithmetic Hirzebruch Zagier cycles. J Reine Angew Math, 1999, 515: 155–244
19 Kudla S S, Rapoport M. Cycles on Siegel threefolds and derivatives of Eisenstein series. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2000, 33: 695–756
20 Kudla S S, Rapoport M. Height pairings on Shimura curves and p-adic uniformization. Invent Math, 2000, 142: 153–223
21 Kudla S, Yang T H. On the pullback of an arithmetic theta function. Manuscripta Math, 2013, 140: 393–440
22 Sankaran S. Unitary cycles on Shimura curves and the Shimura lift I. Doc Math, 2013, 18: 1403–1464
23 Sankaran S. Unitary cycles on Shimura curves and the Shimura lift II. Compos Math, 2014, 150: 1963–2002
24 Sankaran S. Improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series. J Inst Math Jussieu, 2017, 16: 899–945
25 Du T P, Yang T H. Arithmetic Siegel-Weil formula on $X_0(N)$. Adv Math, 2019, 345: 702–755
26 Du T P, Yang T H. Twisted arithmetic Siegel Weil formula on $X_0(N)$. J Number Theory, 2019, 203: 95–117
27 Shi Y S. Special cycles on the basic locus of unitary Shimura varieties at ramified primes. arXiv:1811.11227, 2018
28 Shi Y S. Special cycles on unitary Shimura curves at ramified primes. arXiv:2004.07158, 2020
29 He Q, Shi Y S, Yang T H. The Kudla-Rapoport conjecture at a ramified prime for $\mathrm{U}(1,1)$. Trans Amer Math Soc, in press, 2020
30 Howard B, Yang T H. Singular moduli refined. In: Arithmetic Geometry and Automorphic Forms. Advanced Lectures in Mathematics (ALM), vol. 19. Somerville: International Press, 2011, 367–406
31 Terstiege U. Intersections of special cycles on the Shimura variety for $\mathrm{GU}(1,2)$. J Reine Angew Math, 2013, 684: 113–164
32 Kudla S S. Special cycles and derivatives of Eisenstein series. In: Heegner Points and Rankin L-Series, vol. 49. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 243–270
33 Kudla S S, Millson J J. Intersection numbers of cycles on locally symmetric spaces and Fourier coefficients of holomorphic modular forms in several complex variables. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1990, 71: 121–172
34 Krämer N. Local models for ramified unitary groups. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 73. New York: Springer, 2003, 67–80
35 Bruinier J H. Borcherds Products on $O(2,l)$ and Chern Classes of Heegner Divisors. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1780. Berlin: Springer-Verlag, 2002
36 Bruinier J H, Funke J. On two geometric theta lifts. Duke Math J, 2004, 125: 45–90
37 Bruinier J H, Howard B, Yang T H. Heights of Kudla-Rapoport divisors and derivatives of L-functions. Invent Math, 2015, 201: 1–95
38 Bruinier J H, Howard B, Kudla S S, et al. Modularity of generating series of divisors on unitary Shimura varieties. Astérisque, 2020, 421: 7–125
39 Zhang W. Weil representation and Arithmetic fundamental lemma. Ann of Math (2), 2021, 193: 863–978
40 Ehlen S, Sankaran S. On two arithmetic theta lifts. Compos Math, 2018, 154: 2090–2149
41 Kudla S, Rapoport M. Special cycles on unitary Shimura varieties II: Global theory. J Reine Angew Math, 2014, 697: 91–157
42 Howard B. Complex multiplication cycles and Kudla-Rapoport divisors, II. Amer J Math, 2015, 137: 639–698

43 Howard B. Linear invariance of intersections on unitary Rapoport-Zink spaces. Forum Math, 2019, 31: 1265–1281
44 Jacobowitz R. Hermitian forms over local fields. Amer J Math, 1962, 84: 441–465
45 He Q, Shi Y S, Yang T H. Kudla-Rapoport conjecture at a ramified prime. In preparation, 2021
46 Rapoport M, Zink T. Period Spaces for p-Divisible Groups. Princeton: Princeton University Press, 1996
47 Gan W T, Yu J K. Group schemes and local densities. Duke Math J, 2000, 105: 497–524
48 Rapoport M, Terstiege U, Wilson S. The supersingular locus of the Shimura variety for $\mathrm{GU}(1, n-1)$ over a ramified prime. Math Z, 2014, 276: 1165–1188

Kudla program for unitary Shimura varieties

Qiao He, Yousheng Shi & Tonghai Yang

Abstract In this paper, we first review and summarize some recent progress in Kudla program on unitary Shimura varieties. We show how the local arithmetic Siegel-Weil formula implies the global arithmetic Siegel-Weil formula for non-singular coefficients on $\mathrm{U}(n,1)$. In particular, the arithmetic Siegel-Weil formula for non-singular coefficients on $\mathrm{U}(1,1)$ is true.

Keywords **Shimura varieties, Rapoport-Zink space, local density, special cycles, Kudla program, Kudla-Rapoport conjecture, arithmetic Siegel-Weil formula**

MSC(2020) 11G18, 14G35

doi: 10.1360/SSM-2021-0002