

Conducteur des représentations du group élinéaire.

Jacquet, H.; Piatetski-Shapiro, I. I.; Shalika, J.

in: Mathematische Annalen | Mathematische Annalen | | Article

199 - 214

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

### Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

## Conducteur des représentations du groupe linéaire

H. Jacquet<sup>1</sup>, I. I. Piatetski-Shapiro<sup>2</sup>, and J. Shalika<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10027, USA

<sup>2</sup> Department of Mathematics, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA

<sup>3</sup> Department of Mathematics, Yale University, New Haven, CT 06520, USA

### 1. Introduction et notations

(1.1) Soit  $F$  un corps local non archimédien,  $\psi$  un caractère additif non trivial de  $F$ ,  $\pi$  une représentation admissible et irréductible du groupe  $G_r = \mathrm{GL}(r, F)$  sur un espace complexe  $V$ . Dans [G–J], on a défini des facteurs  $L(s, \pi)$  et  $\varepsilon(s, \pi, \psi)$  qui sont de la forme :

$$L(s, \pi) = P_\pi(q^{-s})^{-1}, \quad P_\pi \in \mathbb{C}[X], \quad P_\pi(0) = 1 ;$$

$$\varepsilon(s, \pi, \psi) = \varepsilon_\pi(q^{-s}, \psi), \quad \varepsilon_\pi(X, \psi) = cX^m ;$$
(1)

où l'on désigne par  $q$  le module du corps  $F$ . Nous ferons toujours l'hypothèse que l'exposant du caractère  $\psi$  est 0, c'est à dire que le plus grand idéal de  $F$  sur lequel  $\psi$  est trivial est l'anneau des entiers  $\mathfrak{R}$ . Lorsqu'il en est ainsi, l'entier  $m$  ne dépend que de  $\pi$ .

Par exemple, si  $r=1$ , alors  $\pi$  est un caractère de  $F^\times$  (non nécessairement de module un) et l'entier  $m$  est positif. De plus si  $m=0$  le caractère est non ramifié c'est-à-dire de la forme  $\pi(x) = |x|^s$ . Si au contraire  $m$  est strictement positif alors  $\pi$  est ramifié ; de plus, si  $\mathfrak{P}$  est l'idéal maximal de l'anneau  $\mathfrak{R}$ , on sait que  $\pi$  est trivial sur le groupe  $1 + \mathfrak{P}^m$  et non trivial sur les groupes  $1 + \mathfrak{P}^a$  avec  $0 < a < m$ .

Pour  $r > 1$ , on peut se demander si l'entier  $m$  est positif. On peut se demander aussi s'il existe une interprétation de l'entier  $m$  analogue à celle rappelée ci-dessus. Nous allons démontrer que tel est bien le cas, pourvu que la représentation  $\pi$  soit «générique» [cf. (1.2)]. Par exemple si  $r=2$ , alors une représentation générique est simplement une représentation de dimension infinie et le résultat est maintenant classique [C, D, N].

Cette question avait été d'abord soulevée par A. Weil (pour  $r > 2$ ) et résolue, tout au moins dans le cas cuspidal, par D. Kazdan et M. Novodvorsky. Peut-être d'ailleurs d'autres mathématiciens ont-ils, avant nous, résolu cette question-complètement. Aussi ne prétendons nous à aucune espèce d'originalité. Mais comme beaucoup de mathématiciens se sont posés ou nous ont posé cette question, il ne nous à pas paru tout à fait inutile de publier notre démonstration. Elle est du reste calquée sur celle donnée dans [C] pour le cas  $r=2$ .

(1.2) Introduisons maintenant les notations et les définitions dont nous aurons besoin. Nous noterons  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\omega$ ,  $v$ ,  $q$  l'anneau des entiers, l'idéal maximal, une uniformisante, la valuation normalisée et le module du corps  $F$  respectivement. Nous poserons  $\alpha(x) = |x| = q^{-v(x)}$ . En particulier  $|\omega| = q^{-1}$ .

Soit  $A_r$  le sous-groupe des matrices diagonales dans  $G_r$ . Si les coefficients diagonaux de la matrice  $a \in A_r$  sont les nombres  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  nous écrivons

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r). \quad (1)$$

Soit  $N_r$  le groupe trigonal strict supérieur dans  $G_r$ . Un caractère additif non trivial  $\psi$  de  $F$  étant choisi, nous définirons un caractère  $\theta_{\psi, r}$  de  $N_r$  par la formule

$$\theta_{\psi, r}(n) = \prod_{i=1}^{r-1} \psi(n_{i, i+1}). \quad (2)$$

Une représentation admissible et irréductible  $\pi$  de  $G_r$  est dite *générique* s'il existe un espace  $\mathscr{W}$  de fonctions sur  $G_r$  se transformant à gauche par  $\theta_{\psi, r}$  qui soit invariant par translations à droite, la représentation de  $G_r$  sur  $\mathscr{W}$  étant équivalente à  $\pi$ . L'espace  $\mathscr{W}$  est alors unique et se note  $\mathscr{W}(\pi; \psi)$ . La condition d'être générique ne dépend pas de  $\psi$ . D'ailleurs si  $\psi_1$  est un autre caractère additif non trivial de  $F$ , on a  $\psi_1(x) = \psi(a_1 x)$  avec  $a_1$  dans  $F^\times$ . Pour  $W$  dans  $\mathscr{W}(\pi; \psi)$  la fonction  $W_1$  définie par

$$W_1(g) = W(ag), \quad a = \text{diag}(a_1^{r-1}, a_1^{r-2}, \dots, a_1, 1),$$

est dans  $\mathscr{W}(\pi; \psi_1)$ . Enfin si  $\pi$  est générique la représentation contragrédiante  $\tilde{\pi}$  l'est aussi. De plus, si  $W$  est dans  $\mathscr{W}(\pi; \psi)$ , alors la fonction  $\tilde{W}$  définie par

$$\tilde{W}(g) = W(w_r {}^t g^{-1}), \quad w_r = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

est dans  $\mathscr{W}(\tilde{\pi}; \bar{\psi})$ , où l'on désigne par  $\bar{\psi}$  l'imaginaire conjugué de  $\psi$ .

(1.3) Quelques remarques sur l'organisation de cet article. Nous vérifions au Par. 2 des propriétés simples mais essentielles des polynômes  $P_\pi(X)$  pour  $\pi$  générique. Au Par. 3 nous étudions les propriétés des fonctions se transformant à gauche par  $\theta_{\psi, r}$  qui sont, à droite, fonctions propres de l'algèbre de Hecke. Au Par. 4, imitant la méthode du cas  $r=2$ , nous définissons le «vecteur essentiel» de l'espace  $\mathscr{W}(\pi; \psi)$ . Pour cela nous utilisons l'équation fonctionnelle (4.2)(1). Avec les résultats rappelés ou prouvés au Par. 2, c'est la seule propriété des facteurs  $L$  et  $\varepsilon$  dont nous aurons besoin. Les propriétés du vecteur essentiel sont établies au Par. 5: elles découlent aussitôt de l'identité (4.2)(1).

## 2. Le facteur $L$ des représentations génériques

(2.1) Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant:

**Proposition.** *Soit  $\pi$  une représentation générique irréductible de  $G_r$ . Alors les polynômes*

$$P_\pi(X) \text{ et } P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1})$$

*sont premiers entre eux dans l'anneau  $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ .*

(2.2) Nous aurons à utiliser quelques résultats simples sur les représentations génériques et les représentations induites. Soit  $Q$  le sous-groupe parabolique standard de type  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  de  $G_r$ . Pour chaque entier  $i, 1 \leq i \leq n$ , soit  $\pi_i$  une représentation admissible et irréductible de  $G_{r_i}$ . Nous noterons  $I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  la représentation de  $G_r$  induite par la représentation suivante de  $Q$ :

$$\begin{pmatrix} g_1 & & & \\ 0 & g_2 & * & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & g_n \end{pmatrix} \mapsto \pi_1(g_2) \otimes \pi_2(g_2) \otimes \dots \otimes \pi_n(g_n).$$

Cette représentation admet une suite de composition finie; pour que l'un des quotients irréductibles de la suite de composition soit générique, il faut et il suffit que chacun des  $\pi_i$  le soit, et il y a alors un seul quotient irréductible générique (cf. [R]). Si tous les  $\pi_i$  sont génériques nous noterons  $\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  l'unique composant générique de  $I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ . La «transitivité» de l'opération d'induction montre aussitôt que si les  $\pi_i$  sont génériques, alors:

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = \sigma[\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{j-1}), \sigma(\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)]. \tag{1}$$

Comme la représentation contragrédiente d'une représentation générique est elle même générique, la relation évidente

$$I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)^\sim = I(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_n). \tag{2}$$

entraîne

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)^\sim = \sigma(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_n). \tag{3}$$

De même, on a

$$I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \otimes \mu = I(\pi_1 \otimes \mu, \pi_2 \otimes \mu, \dots, \pi_n \otimes \mu) \tag{4}$$

pour tout caractère  $\mu$  de  $F^\times$ . D'où:

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \otimes \mu = \sigma(\pi_1 \otimes \mu, \pi_2 \otimes \mu, \dots, \pi_n \otimes \mu). \tag{5}$$

Enfin toute représentation admissible et irréductible de  $G_r$  est un composant d'une représentation induite  $I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  où les  $\pi_i$  sont cuspidales («supercuspidal» dans la terminologie d'Harisch-Chandra); de plus, si  $I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  et  $I(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s)$  ont un composant irréductible commun, alors  $n=s$  et  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ , à l'ordre près. Il s'en suit que toute représentation générique est de la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n),$$

où les  $\pi_i$  sont cuspidales et  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  est bien déterminé à l'ordre près.

Par exemple, si  $Q$  est le sous-groupe parabolique de type  $(1, 1, \dots, 1)$  dans  $G_r$  et si  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$  sont des caractères de  $F^\times$  tels que  $\pi_i(\pi_{i+1})^{-1} = \alpha$ , alors on a

$$\pi_i = \mu \alpha^{\frac{1}{2}(r+1)-i}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

et

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r) = \mu \otimes \sigma_r,$$

où  $\sigma_r$  est la représentation spéciale de Steinberg : cela résulte par exemple de ce que  $\sigma_r$  est de carré intégrable, donc générique (cf. [G-J, Par. 7; J2]).

(2.3) Vérifions maintenant la proposition (2.1) pour une représentation de la forme

$$\pi = \mu \otimes \sigma_r. \quad (1)$$

On a alors  $\tilde{\pi} = \mu^{-1} \otimes \sigma_r$ . Si  $\mu$  est ramifié la proposition est évidente car alors

$$P_\pi(X) = 1, \quad P_{\tilde{\pi}}(X) = 1. \quad (2)$$

Si  $\mu$  n'est pas ramifié, alors  $\mu = \alpha^t$  pour un  $t$  convenable et [G-J, Par. 7]:

$$P_{\mu \otimes \sigma_r}(X) = P_{\sigma_r}(q^{-t}X) = 1 - q^{-t - \frac{1}{2}(r-1)}X, \quad (3)$$

$$P_{\mu^{-1} \otimes \sigma_r}(X) = 1 - q^{t - \frac{1}{2}(r-1)}X. \quad (4)$$

La proposition est donc encore évidente.

Passons maintenant au cas d'une représentation de la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r) \quad (5)$$

où les  $\pi_i$  sont des caractères non ramifiés.

Nous pouvons supposer que la suite  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  est de la forme

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1^1, \mu_2^1, \dots, \mu_{r_1}^1, \mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_{r_2}^2, \dots, \mu_1^m, \mu_2^m, \dots, \mu_{r_m}^m \\ \mu_k^i (\mu_{k+1}^i)^{-1} = \alpha, \quad \mu_r^i (\mu_1^i)^{-1} \neq \alpha, \quad \text{si } i \neq j. \end{array} \right\} \quad (6)$$

En posant  $\mu_i^i = \alpha^{\mu_i}$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} \sigma(\mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_{r_i}^i) &= \sigma_{r_i} \otimes \alpha^{u_i - \frac{r_i-1}{2}}, \\ \pi &= \sigma \left( \sigma_{r_1} \otimes \alpha^{u_1 - \frac{r_1-1}{2}}, \dots, \sigma_{r_m} \otimes \alpha^{u_m - \frac{r_m-1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Il résulte alors de [J2, (2.7.4)] que  $P_\pi[X]$  divise le produit

$$\prod_i P_{\sigma_{r_i}} \left( q^{-u_i + \frac{1}{2}(r_i-1)} X \right).$$

De même  $P_{\tilde{\pi}}(X)$  divise le produit

$$\prod_i P_{\sigma_{r_i}} \left( q^{u_i - \frac{1}{2}(r_i-1)} X \right).$$

Si  $P_\pi(X)$  et  $P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1})$  ont un facteur commun (non trivial) dans l'anneau  $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ , il existe au moins un couple  $(i, j)$  tel que les polynômes

$$\begin{aligned} P_{\sigma_{r_i}} \left( q^{-u_i + \frac{1}{2}(r_i-1)} X \right) &= 1 - q^{-u_i} X, \\ P_{\sigma_{r_j}} \left( q^{u_j - \frac{r_j-1}{2}} q^{-1} X^{-1} \right) &= 1 - q^{u_j - r_j} X^{-1}, \end{aligned}$$

soient identiques, au produit près par une unité. C'est impossible si  $i=j$ . Si  $i \neq j$ , cela impose  $\alpha^{u_j - r_j} = \alpha^{u_i}$  ou encore  $\mu_1^i (\mu_r^j)^{-1} = \alpha^{-1}$ . Or ceci contredit (6). La proposition est donc prouvée dans ce cas.

(2.4) En général, écrivons  $\pi$  sous la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n),$$

où les représentations cuspidales  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j$  ne sont pas des caractères non-ramifiés tandis que  $\pi_{j+1}, \dots, \pi_n$  sont des caractères non ramifiés de  $F^\times$ . Alors :

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \zeta) \quad \text{avec} \quad \zeta = \sigma(\pi_{j+1}, \dots, \pi_n).$$

Toujours d'après [J2, (2.7.4)] le polynôme  $P_\pi(X)$  divise le produit

$$P_\zeta(X) \prod_{1 \leq i \leq j} P_{\pi_i}(X)$$

Mais  $P_{\pi_i}(X) = 1$  [loc. cit. (3.1)]. Donc  $P_\pi(X)$  divise en fait  $P_\zeta(X)$ . De même  $P_\pi(q^{-1}X^{-1})$  divise  $P_\zeta(q^{-1}X^{-1})$ . D'après (2.3) ces polynômes sont premiers entre eux. Le résultat s'en suit.

(2.5) Nous aurons aussi besoin du résultat auxiliaire suivant :

**Proposition.** *Soit  $\pi$  une représentation irréductible générique de  $G_r$ . Le degré de  $P$  est au plus  $r$ . Pour que  $\pi$  contienne la représentation unité du sous groupe compact maximal  $K_r = \text{GL}(r, \mathfrak{K})$ , il faut et il suffit que le degré de  $P_\pi$  soit  $r$ .*

*Démonstration.* Ecrivons  $\pi$  sous la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$$

où les  $\pi_i$  sont cuspidales et  $m \leq r$ . Une fois de plus  $P_\pi(X)$  divise le produit  $\prod P_{\pi_i}(X)$ . Comme chaque  $P_{\pi_i}$  est de degré au plus un, on voit que  $P_\pi$  est de degré au plus  $r$ . Supposons maintenant que  $P_\pi$  soit de degré  $r$ . Alors  $m=r$  et chaque  $P_{\pi_i}$  doit être de degré un. Cela signifie que chaque  $\pi_i$  est un caractère non ramifié de  $F^\times$ . Supposons la représentation induite  $\zeta = I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  non irréductible. Alors il existe au moins un couple  $(i, j)$  tel que  $\pi_i \cdot \pi_j^{-1} = \alpha$  [B-Z, Theorem (4-11)]. On peut supposer que c'est le couple (1, 2). Alors on a :

$$\pi = \sigma(\zeta, \pi_3, \dots, \pi_r), \quad \zeta = \sigma(\pi_1, \pi_2) = \sigma_2 \otimes \mu.$$

A nouveau  $P_\pi$  divise le produit

$$P_\zeta \prod_{i=3}^r P_{\pi_i}.$$

Mais comme  $P_\zeta$  est de degré un [G-J, Par. 7] on obtient une contradiction. Ainsi  $\zeta$  est irréductible et  $\pi = \zeta$ . Donc  $\pi$  contient la représentation unité de  $K_r$ .

En sens inverse, si  $\pi$  est une représentation irréductible qui contient la représentation unité de  $K$ , ou comme nous dirons encore, une représentation *non-ramifiée*, alors  $\pi$  est le composant non-ramifié d'une représentation induite

$\xi = I(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  où les  $\pi_i$  sont des caractères non-ramifiés de  $F^\times$ . Alors

$$P_\pi(X) = \prod_{1 \leq i \leq r} P_{\pi_i}(X)$$

et chaque  $P_{\pi_i}$  est de degré un [G-J, Par. 6]. Donc  $P_\pi$  est de degré  $r$ .

(2.6) *Remarque.* On peut montrer que l'énoncé obtenu en supprimant dans la Proposition (2.5) le mot générique est encore vrai.

### 3. Fonctions de Whittaker formelles

(3.1) Nous aurons à utiliser des résultats élémentaires sur les fonctions se transformant à gauche par le caractère  $\theta = \theta_{\psi, r}$ . Nous les énonçons une fois pour toutes.

Pour  $g$  dans  $G_r$  posons

$$\begin{aligned} \alpha_i(g) &= a_i/a_{i+1}, & 1 \leq i \leq r-1 \\ \alpha_r(g) &= a_r \end{aligned} \quad (1)$$

si  $g = nak$  avec  $n \in N_r$ ,  $k \in K_r$  et

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

Soit  $\varphi$  une fonction lisse à droite telle que

$$\varphi(ng) = \theta(n)\varphi(g).$$

Alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\varphi(g) \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i(g)| \leq C, \quad 1 \leq i \leq r-1. \quad (2)$$

En effet, comme  $\varphi$  n'a qu'un nombre fini de translatées à droite par  $K_r$ , il suffit de montrer l'existence d'un  $C$  tel que

$$\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i(a)| \leq C, \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

Mais en prenant

$$n = \begin{pmatrix} 1 & & x_1 & & 0 \\ & 1 & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & 1 & x_{r-1} \end{pmatrix}$$

on doit avoir

$$\varphi(an) = \varphi(ana^{-1}a) = \prod_{i=1}^{r-1} \psi(\alpha_i(a)x_i)\varphi(a).$$

Or  $\varphi(a) = \varphi(an)$  si les  $|x_i|$  sont assez petits. D'où la conclusion. On voit même que si  $\varphi$  est  $K_r$ -invariant alors on peut prendre  $C=1$ .

De même on a

$$\varphi \left[ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \varphi \left[ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \psi[(0, \dots, 0, 1)gu]. \quad (3)$$

On en conclut que la relation

$$\varphi \left[ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \varphi \left[ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K_r,$$

a lieu pour tout  $g$ , si et seulement si la relation

$$\varphi \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

implique que la dernière ligne de  $g$  a tous ses coefficients entiers.

(3.2) Nous aurons à utiliser des résultats connus sur les représentations «non-ramifiées» du groupe  $G_r$ . Soit  $H_r$  l'algèbre de convolution des fonctions bi-invariantes par  $K_r = \text{GL}(r, \mathfrak{R})$  et à support compact. On sait que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre  $S_r$  des polynômes en  $X_1, X_1^{-1}, X_2, X_2^{-1}, \dots, X_r, X_r^{-1}$  qui sont invariants par permutation des variables. Notons  $T_1, T_2, \dots, T_r$  les fonctions symétriques élémentaires des  $X_i$ . Ainsi:

$$T_1 = \sum_i X_i, \quad T_2 = \sum_{i < j} X_i X_j, \dots, T_r = \prod_i X_i. \quad (1)$$

Alors  $S_r$  est encore isomorphe à l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_r, T_r^{-1}]$ .

Dans la suite nous adopterons les conventions suivantes pour les mesures de Haar et les mesures invariantes. La mesure de Haar de  $G_r$  (et de  $K_r$ ) est normalisée par la condition  $\text{mes}(K_r) = 1$ , celle de  $N_r$  par  $\text{mes}(K_r \cap N_r) = 1$ . La mesure invariante de  $N_r \backslash G_r$  est le quotient des mesures précédentes.

Soit maintenant  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  une suite de  $r$  nombres *non nuls*. Elle détermine un morphisme  $S_r \rightarrow \mathbb{C}$ , à savoir

$$P \mapsto P(x_1, x_2, \dots, x_r). \quad (2)$$

L'homomorphisme correspondant  $\lambda: H_r \rightarrow \mathbb{C}$  s'obtient ainsi. Soit  $I(x_1, x_2, \dots, x_r)$  la représentation de  $G_r$  induite par le caractère

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & * & & \\ & \dots & & \\ 0 & & a_r & \end{pmatrix} \mapsto x_1^{v(a_1)} x_2^{v(a_2)} \dots x_r^{v(a_r)} \quad (3)$$

du groupe trigonal supérieur. Alors l'espace de cette représentation contient un vecteur et un seul fixé par  $K_r$  et égal à un sur  $K_r$ . Soit  $f$  ce vecteur. Pour tout  $\varphi \in H$  on a :

$$\int f(gh)\varphi(h)dh = \lambda(\varphi)f(g). \quad (4)$$

(3.3) Soit maintenant  $\psi$  un caractère additif non trivial de  $F$  d'exposant 0. Pour toute suite de nombres complexes non nuls  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , il existe une fonction  $W$  et une seule telle que

$$W(n g k) = \theta(n)W(g), \quad n \in N, \quad k \in K; \quad (1)$$

$$W(e) = 1; \quad (2)$$

pour tout  $\varphi \in H$

$$\int W(gh)\varphi(h)dh = \lambda(\varphi)W(g), \quad (3)$$

où  $\lambda$  est le morphisme de  $H$  dans  $\mathbb{C}$  décrit dans (3.2) (cf. [S]). Nous noterons cette fonction

$$W(g, x_1, x_2, \dots, x_r; \psi). \quad (4)$$

Il résulte de l'unicité que

$$W(w'g^{-1}, x_1, x_2, \dots, x_r; \psi) = W(g, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_r^{-1}; \bar{\psi}). \quad (5)$$

De plus si  $q^{-s} = x$ , alors

$$W(g, x_1, x_2, \dots, x_r; \psi) |\det g|^s = W(g, x_1 x, x_2 x, \dots, x_r x; \psi). \quad (6)$$

La formule explicite donnée en [S] montre qu'il existe pour chaque  $g \in G_r$  un élément  $W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi)$  de  $S_r$  dont  $W(g, x_1, x_2, \dots, x_r; \psi)$  soit la spécialisation. On a ainsi défini une fonction sur  $G_r$  à valeurs dans  $S_r$ ; d'ailleurs ses valeurs sur un ensemble compact modulo  $N_r$  sont dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $S_r$ . D'après (3.1), le support de  $W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi)$  est contenu dans l'ensemble des  $g$  tels que

$$|\alpha_i(g)| \leq 1, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r-1. \quad (7)$$

Si de plus  $|\alpha_r(g)| \leq 1$  alors  $W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi)$  est en fait dans  $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_r]$ .

(3.4) Nous aurons à considérer des «intégrales» de la forme

$$\int_{N_r \backslash G_r} W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi) \varphi(g) |\det g|^s dg, \quad (1)$$

où  $\varphi$  est une fonction se transformant à gauche par  $\theta_{\bar{\psi}, r} = \bar{\theta}_{\psi, r}$ . La fonction  $\varphi$  sera supposée lisse à droite, c'est-à-dire invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de  $G_r$ . De plus le support de  $\varphi$  sera toujours contenu dans l'ensemble des  $g$  tels que

$$|\alpha_r(g)| \leq C, \quad (2)$$

où  $C$  est une constante non nulle. L'intégrale est à interpréter comme série formelle

$$\sum a_n X^n, \quad X = q^{-s}, \quad (3)$$

à coefficients dans  $S_r$ , les coefficients étant donnés par l'intégrale ordinaire

$$a_n = \int_{N_r \backslash G_r} W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi) \varphi(g) \mu_n(\det g) dg, \quad (4)$$

où  $\mu_n$  est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{x \in F^\times \mid v(x) = n\} \quad (5)$$

dans  $F^\times$ . Il est clair que les conditions (3.3)(7), (3.4)(2) et  $v(\det g) = n$  impliquent que  $g$  est dans un ensemble compact mod  $N_r$ : la fonction à intégrer dans (4) est donc à support compact mod  $N_r$ , et l'intégrale a bien un sens. De plus notons que les relations (3.3)(7) et (3.4)(2) entraînent  $v(\det g) \geq m$ , où  $m$  est un entier qui dépend de  $C$ . Il en résulte que dans la série (3) on a  $a_n = 0$  pour  $n < m$ .

(3.5) **Lemme.** *Gardons les hypothèses de (3.4) mais supposons de plus que  $\varphi$  soit invariante à droite par  $K_r$ . Alors la relation*

$$\int W(g, X_1, X_2, \dots, X_r; \psi) \varphi(g) |\det g|^s dg = 0$$

entraîne  $\varphi = 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de démontrer le lemme lorsque  $\varphi$  a un support compact modulo  $N_r$ . L'hypothèse du lemme s'écrit alors :

$$\int_{N_r \backslash G_r} W(g, x_1, x_2, \dots, x_r; \psi) \varphi(g) dg = 0, \quad (1)$$

pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ . Montrons que cela entraîne  $\varphi = 0$ . Pour cela considérons la représentation  $\pi$  de  $G_r$ , induite, au sens de Mackey, par le caractère (de module 1)  $\theta_{\bar{\psi}, r}$ . Décomposons la en somme continue de représentations irréductibles :

$$\pi = \int \pi_x d\mu(x).$$

Soit  $V$  l'ensemble des fonctions lisses à droite et support compact modulo  $N_r$  dans l'espace de la représentation  $\pi$ . Comme  $V$  a une base linéaire dénombrable, il existe, pour presque tout  $x$ , une application linéaire  $A_x$  de  $V$  dans l'espace de la représentation  $\pi_x$  telle que

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int \langle A_x \varphi_1, A_x \varphi_2 \rangle d\mu(x), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in V. \quad (2)$$

De plus, pour presque tout  $x$ , on a

$$A_x \pi(g) \varphi = \pi_x(g) A_x \varphi, \quad g \in G_r, \quad \varphi \in V.$$

Soit maintenant  $\varphi_0$  un élément de  $V$  invariant sous  $K_r$ . Alors  $A_x \varphi_0 = 0$  à moins que  $\pi_x$  ait un vecteur  $v_x \neq 0$  invariant sous  $K_r$ . Supposons qu'il en soit ainsi; alors il existe une fonction  $W$  et une seule se transformant à gauche par  $\theta_{\psi, r}$  telle que, pour tout  $\varphi \in V$ ,

$$(A_x \varphi, v_x) = \int_{N_r \backslash G_r} \varphi(g) W(g) dg.$$

Comme  $v_x$  est  $K_r$ -invariant la fonction  $W$  est  $K_r$ -invariant à droite. De plus  $v_x$  doit être un vecteur propre pour l'algèbre  $H_r$ . Il en est donc de même de la fonction  $W$ . Par conséquent cette fonction est un multiple d'une fonction  $W(x_1, x_2, \dots, x_r; \psi)$ . Si  $\varphi_0$  satisfait (1) alors  $(A_x \varphi_0, v_x) = 0$  ou encore  $A_x \varphi_0 = 0$ . Ainsi  $A_x \varphi_0 = 0$  pour presque tout  $x$ . D'après (2) on a  $\varphi_0 = 0$ . Q.E.D.

#### 4. Le vecteur essentiel

(4.1) Nous sommes maintenant en mesure de définir le vecteur essentiel d'une représentation générique  $\pi$  de  $G_r$ . Rappelons une fois de plus que l'exposant de  $\psi$  est supposé être 0. Pour tout  $W \in \mathcal{W}(\pi; \psi)$ , posons

$$\begin{aligned} & \Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \\ &= \int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi}) \\ & \quad |\det g|^{s-1/2} dg, \quad X = q^{-s}. \end{aligned} \quad (1)$$

La fonction  $g \mapsto W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  satisfait évidemment les conditions de (3.4) et l'intégrale représente une série de Laurent formelle à coefficients dans  $S_{r-1}$ . D'après (3.4)(6) on a, si  $U$  est une indéterminée,

$$\Psi(UX, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \Psi(X, W, UX_1, UX_2, \dots, UX_{r-1}). \quad (2)$$

**Théorème.** *Il existe un élément et un seul  $W$  de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  tel que*

$$(i) \quad W \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W(g) \text{ pour } h \in K_{r-1},$$

$$(ii) \quad \Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} P_{\pi}^{-1}(XX_i),$$

le second membre de (ii) étant la série formelle en  $X$  à coefficients dans  $S_{r-1}$  obtenue en développant  $P_{\pi}^{-1}(XX_i)$  suivant les puissances croissantes de  $X$ .

*Démonstration de l'unicité.* D'après le lemme (3.4) la restriction de  $W$  au sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| g \in G_{r-1} \right\} \quad (3)$$

est uniquement déterminée. Or, d'après les résultats de [B-Z, Théorème (4.9)], un élément de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  est toujours déterminé par sa restriction au sous-groupe (3). L'unicité est donc évidente.

(4.2) *Démonstration de l'existence.* Nous nous appuyerons sur une identité dans l'espace des séries de Laurent à coefficients dans  $S_{r-1}$ . Notons que cet espace peut être regardé comme un module sur l'anneau des polynômes en  $X, X^{-1}$  à coefficients dans  $S_{r-1}$ . De plus cet espace admet un automorphisme changeant la série  $F(X) = \sum a_n X^n$  en la série

$$F(X^{-1}) = \sum a_n X^{-n} = \sum a_{-n} X^n.$$

Cet automorphisme est compatible avec l'automorphisme correspondant de l'algèbre des polynômes en  $X, X^{-1}$ . L'identité que nous avons en vue s'écrit, pour tout élément  $W$  de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ :

$$\begin{aligned} & \Psi(q^{-1}X^{-1}, \tilde{W}, X_1^{-1}, X_2^{-2}, \dots, X_{r-1}^{-1}) \prod_{\pi=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1}X_i^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} \varepsilon_{\pi}(XX_i, \psi) \Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} P_{\pi}(XX_i). \end{aligned} \quad (1)$$

Dans cette formule  $\tilde{W}$  est défini par (1.2)(3). Rappelons que c'est un élément de l'espace  $\mathcal{W}(\tilde{\pi}; \tilde{\psi})$  attaché à la représentation contragrédiente  $\tilde{\pi}$  et au caractère  $\tilde{\psi}$  imaginaire conjugué de  $\psi$ .

L'identité (1) est équivalente à la réunion d'une infinité d'identités dans l'anneau  $S_{r-1}$ . Pour démontrer (1) il suffit donc de démontrer l'identité analogue obtenue en remplaçant les  $X_i$  par des nombres complexes  $x_i \neq 0$ . On peut même se restreindre au cas où tous les  $x_i$  sont de module 1. Alors la représentation induite  $\pi' = I(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$  de  $G_{r-1}$  est irréductible et générique et la fonction

$W' = W(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}; \bar{\psi})$  est un élément de l'espace  $\mathcal{W}(\pi'; \bar{\psi})$ . De même  $W(g, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}; \psi)$  n'est autre que la fonction  $(W')^\sim$ . En posant, pour  $\mathcal{W}' \in \mathcal{W}(\pi'; \bar{\psi})$ ,

$$\Psi(X, W, W') = \int W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W'(g) |\det g|^{s-1/2} dg, \quad X = q^{-s},$$

les résultats énoncés dans [J-P-S2] montrent que

$$\begin{aligned} & \Psi(q^{-1}X^{-1}, \tilde{W}, \tilde{W}') \prod_i P_{\pi}(q^{-1}X^{-1}x_i^{-1}) \\ &= \prod_i \varepsilon_{\pi}(Xx_i, \psi) \Psi(X, W, W') \prod_i P_{\pi}(Xx_i), \end{aligned} \quad (3)$$

pour tout  $W'$ . En prenant  $W' = W(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}; \bar{\psi})$  nous obtenons bien la spécialisation de (1).

D'après les remarques de (3.4) la série formelle  $\Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  n'a qu'un nombre fini de termes avec un exposant négatif. Il en est donc de même du membre de droite de (1). Au contraire le membre de gauche est une série formelle avec un nombre fini d'exposants positifs. L'identité (1) montre donc que chaque membre est un polynôme en  $X, X^{-1}$  à coefficients dans  $S_{r-1}$ . D'après (4.1)(2) il existe même un élément  $\Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  de  $S_{r-1}$  tel que

$$\begin{aligned} & \Xi(W, XX_1, XX_2, \dots, XX_{r-1}) \\ &= \Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} P_{\pi}(XX_i). \end{aligned} \quad (4)$$

D'une manière imagée, on peut écrire.

$$\begin{aligned} & \Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \\ &= \int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi}) |\det g|^{-1/2} dg \prod_{i=1}^{r-1} P_{\pi}(X_i). \end{aligned} \quad (5)$$

Soit alors  $I(\pi)$  le sous espace vectoriel de  $S_{r-1}$  engendré par les  $\Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  avec  $W$  dans  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ . C'est en fait un idéal de l'anneau  $S_{r-1}$ . En effet soit  $P$  un élément quelconque de  $S_{r-1}$  et  $\varphi$  l'élément correspondant de  $H_{r-1}$ . Alors

$$\begin{aligned} & \int W(gh, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \varphi(h) dh \\ &= W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi}) P(X_1, X_2, \dots, X_{r-1}). \end{aligned}$$

Si  $W$  est dans  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  la fonction  $W_1$  définie par

$$W_1(g) = \int W \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(h^{-1}) |\det h|^{-1/2} dh$$

est encore dans  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ . En partant de la formule (5) un calcul formel facile à justifier montre que

$$\Xi(W_1, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \cdot P(X_1, X_2, \dots, X_{r-1}).$$

D'où notre assertion.

L'idéal  $I(\pi)$  contient le produit  $\prod P_\pi(X_i)$ . En effet d'après les résultats de [G-K, Théorème (5.2)], il existe un élément  $W$  de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  tel que

$$W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta_{\psi, r-1}(n), \quad \text{si } g = nk, \quad n \in N_{r-1}, \quad k \in K_{r-1}; = 0 \text{ sinon.}$$

Pour ce  $W$  on a évidemment d'après (5):

$$\Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(X_i).$$

D'où la conclusion.

Finalement l'identité (1) s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} & \Xi(\tilde{W}, q^{-1}X_1^{-1}, q^{-1}X_2^{-1}, \dots, q^{-1}X_{r-1}^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} \varepsilon_\pi(X_i, \psi) \Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

En échangeant les rôles de  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$  cela montre que le produit  $\prod_{i=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X_i^{-1})$  appartient aussi à  $I(\pi)$ . D'après la proposition (2.1) on voit qu'il n'existe pas de suite  $(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$  avec  $x_i \neq 0$ , sur laquelle tous les éléments de  $I(\pi)$  s'annulent. Si  $J$  est l'idéal correspondant de l'anneau  $\mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_{r-1}, T_{r-1}^{-1}]$  [notations de (3.1)], cela signifie que les éléments de  $J$  n'ont pas de zéro commun  $(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$  avec  $t_{r-1} \neq 0$ . Il en résulte que

$$J = \mathbb{C}[T_1, T_2, \dots, T_{r-1}, T_{r-1}^{-1}]$$

et  $I(\pi) = S_{r-1}$ .

En particulier il existe un élément  $W$  de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  tel que

$$\Xi(W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = 1.$$

En revenant aux définitions, cela s'écrit

$$\prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(X X_i) \Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = 1.$$

Or  $\Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  appartient à l'espace des séries de Laurent n'ayant qu'un nombre fini de termes avec exposant négatif; cet espace est un module *sans torsion* sur l'anneau  $S_{r-1}[X, X^{-1}]$ . La fonction  $W$  satisfait donc bien à la condition (ii) du théorème (4.1). Alors la formule

$$W_1(g) = \int_{K_{r-1}} W \left[ g \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] dk$$

definit un élément de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  qui satisfait à la condition (i). Comme l'intégrale  $\Psi$  ne change pas lorsqu'on remplace  $W$  par  $W_1$  la fonction  $W_1$  satisfait aussi (ii). Le théorème est donc démontré.

(4.3) *Exemple.* Supposons que  $\pi$  contienne la représentation unité de  $K_r$ . Alors  $\pi$  est équivalente à une représentation induite  $I(y_1, y_2, \dots, y_r)$  et

$W = W(y_1, y_2, \dots, y_r; \psi)$  appartient à  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ . On a alors

$$P_\pi(X) = \prod_{i=1}^r (1 - y_i X).$$

D'après les résultats de [J-P-S2], on a aussi :

$$\Psi(X, W, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \prod_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r-1} (1 - y_i X_j X)^{-1}.$$

Comme  $W$  est invariant sous  $K_r$ , on voit que  $W$  satisfait les conditions du théorème (4.1).

(4.4) *Définition.* Sous les hypothèses du théorème (4.1), on dira que  $W$  est le vecteur essentiel de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ .

### 5. Propriétés du vecteur essentiel

(5.1) Soit à nouveau  $\pi$  une représentation irréductible et générique de  $G_r$ . Rappelons que  $\psi$  désigne un caractère additif d'exposant 0. Soit  $m$  l'entier tel que

$$\varepsilon_\pi(X, \psi) = CX^m. \tag{1}$$

Dans ce paragraphe, nous établissons le théorème suivant :

**Théorème.** (i) On a  $m \geq 0$ .

(ii) Pour tout entier  $a > 0$  soit  $K_r(a)$  le sous-groupe de  $K_r$  formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} h & v \\ u & x \end{pmatrix}, \quad h \in K_{r-1}, \quad x \in \mathfrak{R}^\times, \quad x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^a}, \quad u \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^a}.$$

On pose aussi  $K_r(0) = K_r$ . Alors le vecteur essentiel est invariant sous  $K_r(m)$  et la dimension de l'espace des vecteurs fixés par  $K_r(m)$  est un.

(iii) Si  $a \geq 0$  et s'il existe dans la représentation  $\pi$  un vecteur non nul fixé par  $K_r(a)$ , alors  $a \geq m$ .

(5.2) Pour démontrer le théorème nous introduirons, pour chaque entier  $a \in \mathbb{Z}$ , le sous-groupe  $H(a)$  de  $G_r$  formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $h$  est dans  $K_{r-1}$  et où les éléments de la matrice colonne  $u$  sont dans  $\mathfrak{P}^a$ . Cela étant, le premier pas est de démontrer que le vecteur essentiel  $W$  est invariant sous  $H(0)$ . Par définition  $W$  est invariant sous le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in K_{r-1} \right\}.$$

Il suffit donc de démontrer que  $W$  est invariant sous le sous-groupe de  $H(0)$  formé des matrices de  $H(0)$  pour lesquelles  $h = 1_{r-1}$ . Comme  $W$  est déterminée par sa restriction au sous-groupe (4.1)(3), il suffit, d'après les remarques de (3.1), de prouver le lemme suivant :

**Lemme.** Si  $W$  est le vecteur essentiel de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  alors la relation

$$W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad g \in G_{r-1},$$

entraîne que la dernière ligne de  $g$  est à coefficients entiers.

*Démonstration du lemme.* Soit  $u$  le degré de  $P_\pi$ . On a donc  $u \leq r$  (2.5). Supposons que  $u = r$ . Alors  $\pi$  contient la représentation unité de  $K_r$  (loc. cit.). D'après (4.3)  $W$  est alors invariante sous  $K_r$  et notre assertion est alors évidente. Supposons maintenant  $u \leq r-1$  et écrivons

$$P_\pi(X) = \prod_{i=1}^u (1 - y_i X).$$

Nous distinguerons deux cas:  $u < r-1$  et  $u = r-1$ .

Dans le cas  $u < r-1$ , on a l'identité (cf. [J-P-S2]):

$$\begin{aligned} & \int_{N_u \backslash G_u} W \left[ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi} \right] W(g, y_1, y_2, \dots, y_u; \psi) |\det g|^{s - \frac{1}{2}(r-u-1)} dg \\ &= \prod (1 - y_j X_j X_j^{-1}), \quad 1 \leq j \leq u, \quad 1 \leq i \leq r-1. \end{aligned}$$

Définissons maintenant une fonction  $\varphi$  sur  $G_{r-1}$  par les conditions suivantes:

$$\varphi(ngk) = \theta_{\psi, r-1}(n) \varphi(g) \quad \text{si } n \in N_{r-1}, \quad k \in K_{r-1};$$

si  $a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_{r-1})$  alors

$$\varphi(a) = W(b, y_1, y_2, \dots, y_u; \psi) \quad \text{avec } b = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_u)$$

si  $|a_{u+1}| = \dots = |a_{r-1}| = 1$ ;  $= 0$  sinon. Il est clair que  $\varphi$  satisfait les conditions de (3.3). On a évidemment

$$\int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} \varphi(g) W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi}) |\det g|^{s + \frac{1}{2}(r-u-1)} dg = \prod P_\pi(X X_i)^{-1}.$$

D'après le lemme (3.4), on a donc

$$W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(g) |\det g|^{\frac{1}{2}(r-u)}.$$

Le lemme en découle aussitôt.

Si  $u = r-1$ , on a (cf. [J-P-S2])

$$\begin{aligned} & \int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} W(g, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}; \psi) W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi}) \\ & \cdot \Phi[(0, 0, \dots, 0, 1)g] |\det g|^s dg = \prod (1 - y_i X_i X_i)^{-1}, \end{aligned}$$

où  $\Phi$  est la fonction caractéristique de  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}$  dans  $F^{r-1}$ . En raisonnant comme plus haut on trouve

$$W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W(g, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}; \psi) \Phi[(0, 0, \dots, 0, 1)g] |\det g|^{1/2}$$

et, à nouveau, le lemme découle aussitôt de cette relation.

(5.3) Dénotons toujours par  $W$  le vecteur essentiel de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$ . Alors d'après (4.2)(1):

$$\Psi(q^{-1}X^{-1}, \tilde{W}, X_1^{-1}, X_2^{-1}, \dots, X_{r-1}^{-1}) \prod_{i=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1}X_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} \varepsilon_{\pi}(XX_i, \psi).$$

Comme  $\Psi(X, \tilde{W}, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  n'a que des termes avec exposants positifs cela s'écrit aussi [cf. (5.1)(1)]:

$$\Psi(X, \tilde{W}, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = C^{r-1} q^{-m(r-1)} X^{-m(r-1)} \prod_{i=1}^{r-1} X_i^{-m} \prod_{i=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}^{-1}(XX_i).$$

Soit  $W'$  le vecteur essentiel de  $\mathcal{W}(\tilde{\pi}; \bar{\psi})$ . Alors

$$\Psi(X, W', X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}^{-1}(XX_i).$$

Définissons maintenant un élément  $W_1$  de  $\mathcal{W}(\tilde{\pi}; \bar{\psi})$  par la formule

$$W_1(g) = W'(ga), \quad a = \text{diag}(\omega^m, \omega^m, \dots, \omega^m, 1).$$

Alors, il y a une constante  $C'$  telle que

$$\Psi(X, \tilde{W}, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = C' \Psi(X, W_1, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}).$$

D'après le lemme (3.4) cela implique  $\tilde{W} = C' W_1$  sur le sous-groupe (4.2)(3). Donc, d'après une remarque déjà faite,  $\tilde{W} = C' W_1$ . Comme  $W'$  est invariante sous  $H(0)$ , cela implique que  $\tilde{W}$  est invariante sous  $H(m)$ . En revenant à la définition de  $\tilde{W}$  on voit que cela implique l'invariance de  $W$  sous le groupe transposé  ${}^tH(m)$ .

Si on avait  $m < 0$ , les groupes  $H(0)$  et  ${}^tH(m)$  engendreraient  $G_r$ . La fonction  $W$  serait donc constante ce qui est absurde. On a donc  $m \geq 0$ . Les groupes  $H(0)$  et  ${}^tH(m)$  engendrent alors  $K(m)$  de sorte que  $W$  est bien invariante sous  $K(m)$ .

Soit maintenant  $u$  un entier  $\geq 0$  et  $W_1$  un vecteur de  $\mathcal{W}(\pi; \psi)$  invariant sous  $K(u)$ . L'invariance de  $W_1$  sous  $H(0)$  implique que

$$W_1 \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i(g)| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

[cf. (3.1)]. En particulier dans l'intégrale (4.1)(1) pour  $\Psi(X, W_1, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  on peut supposer que  $|\det g| \leq 1$  et  $W(g, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}; \bar{\psi})$  est dans  $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_{r-1}]$  [cf. (3.3)]. La série n'a donc que des termes à exposants positifs et ses coefficients sont dans  $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_{r-1}]$ . Il en résulte que  $\Xi(W_1, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  est un polynôme  $P$  en  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$ . D'autre part  $W_1$  étant invariante sous  ${}^tH(u)$ , la fonction  $W_1$  est invariante sous  $H(u)$ . La fonction  $W_2$  définie par

$$W_2(g) = \tilde{W}_1(ga), \quad a = \text{diag}(\omega^{-u}, \omega^{-u}, \dots, \omega^{-u}, 1),$$

est donc invariante sous  $H(0)$ . Comme plus haut, il en résulte que  $\Xi(W_2, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  est un élément de  $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_{r-1}]$ . Alors il existe un multiple constant  $Q$  de  $\Xi(W_2, X_1, X_2, \dots, X_{r-1})$  tel que:

$$\Xi(\tilde{W}_1, X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) = (X_1 X_2 \dots X_{r-1})^{-u} Q(X_1, X_2, \dots, X_{r-1}).$$

D'après (4.2)(7) on a alors :

$$(X_1 X_2 \dots X_{r-1})^u Q(q^{-1} X_1^{-1}, q^{-1} X_2^{-1}, q^{-1} X_2^{-1}, \dots, q^{-1} X_{r-1}^{-1}) \\ = C^{r-1} q^{-u(r-1)} (X_1, X_2, \dots, X_{r-1})^m P(X_1, X_2, \dots, X_{r-1}).$$

Si on avait  $u < m$ ,  $Q(q^{-1} X_1^{-1}, \dots, q^{-1} X_{r-1}^{-1})$  serait un polynôme en  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$  divisible par le produit  $X_1 X_2 \dots X_{r-1}$ , ce qui est absurde. On a donc  $u \geq m$ . Enfin si  $u = m$  la relation ci-dessus montre que  $P$  est une constante. D'après l'unicité dans le théorème (4.1) la fonction  $W_1$  est alors un multiple de  $W$ . Q.E.D.

(5.4) *Remarque.* Si  $\pi$  est une représentation admissible irréductible de  $G_r$ , générique ou non, on peut encore poser  $\varepsilon_\pi(X, \psi) = CX^m$ . On peut montrer que l'on a encore  $m \geq 0$  et que  $m = 0$  si et seulement si  $\pi$  contient la représentation unité de  $K_r$ . Toutefois, si  $m > 0$  la dimension de l'espace des vecteurs fixés par  $K(m)$  peut être 0, comme le montre l'exemple des représentations de la forme  $g \mapsto \chi(\det g)$ , où  $\chi$  est un caractère ramifié de  $F^\times$ .

### Bibliographie

- [B-Z] Bernstein, I.N., Zelevensky, A.V.: Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. I. Ann. Sci. École Norm. Sup. **4**, 441–472 (1977)
- [C] Casselman, W.: On some results of Atkin and Lehner. Math. Ann. **206**, 311–318 (1973)
- [D] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations de  $GL(2)$ . In: Modular functions of one variable. II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 349. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
- [G-J] Godement, R., Jacquet, H.: Zeta functions of simple algebras. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
- [G-K] Gelfand, I.M., Kazdan, D.A.: Representations of  $GL(n, K)$  where  $K$  is a local field. In: Lie groups and their representations, pp. 95–118. New York: Wiley 1975
- [J1] Jacquet, H.: Generic representations. In: Non commutative harmonic analysis, Marseille-Luminy 1976. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 587, pp. 91–100. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976
- [J2] Jacquet, H.: Principal  $L$ -functions of the linear group. In: automorphic forms, representations, and  $L$ -functions, Part 2. Am. Math. Soc. 63–95 (1979)
- [J-P-S1] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Automorphic forms on  $GL(3)$ . I. Ann. of Math. **109**, 169–212 (1979)
- [J-P-S2] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Facteurs  $L$  et  $\varepsilon$  du groupe linéaire. C. R. Acad. Sci. Ser. A **289**, 59–61 (1979)
- [N] Novodvorsky, M.: On certain stationary groups in infinite dimensional representations of Chevalley groups. Funkcional. Anal. i. Prilozhen **5**, 87–88 (1971). Transl. Functional Anal. Appl. **5**, 74–76 (1971)
- [R] Rodier, F.: Whittaker models for admissible representations of real algebraic groups. In: Harmonic analysis on homogeneous spaces. Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc. 425–430 (1976)
- [S] Shintani, T.: On an explicit formula for class-1 “Whittaker functions” on  $GL_n$  over  $p$ -adic fields, Proc. Japan Acad. **52**, 180–182 (1976)

Reçu le 4 août 1980