COMPOSITIO MATHEMATICA

HERVÉ JACQUET

Sur un résultat de Waldspurger II

Compositio Mathematica, tome 63, nº 3 (1987), p. 315-389.

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_3_315_0>

Compositio Mathematica 63: 315–389 (1987)

Sur un résultat de Waldspurger II*

HERVÉ JACQUET
Department of Mathematics, Columbia University, New York City, NY 10027, USA

Received 21 March 1986; accepted 3 November 1986

§1. Introduction

(1.1) Soient F un corps de nombres et E une extension quadratique de F, Ω un caractère du groupe des classes d'idèles de E, ω sa restriction au groupe des classes d'idèles de F. On note aussi η le caractère quadratique du groupe des classes d'idèles de F attaché à E, N_0 le groupe des éléments de $F^\times$ qui sont norme d'un élément de E et N_1 le groupe des éléments de E dont la norme est 1. Pour chaque ε non nul dans F on note G_ε le groupe formé des matrices du type suivant:

$$\begin{vmatrix} a & b\varepsilon \\ b^\sigma & a^\sigma \end{vmatrix},$$

où σ désigne la conjugaison dans E par rapport à F. On désigne par G le groupe GL (2), regardé comme groupe algèbrique défini sur F, par Z son centre, par A le sous-groupe des matrixes diagonales. Si $\varepsilon = 1$ alors G_1 est isomorphe à G. En général G_ε est une forme intérieure de G. En particulier, si ε n'est pas une norme et π' est une représentation automorphe de dimension infinie de G_ε, alors la correspondance de [J.L.] associe à π' une représentation automorphe cuspidale π de G_1. Réciproquement, si π est donnée, alors il peut y avoir plusieurs ε tel que le groupe G_ε admette une représentation automorphe correspondant à π.

On suppose maintenant que la représentation π n'est pas dièdrale pour l'extension E. Alors le relèvement Π de π à l'extension E est une représentation automorphe cuspidale du groupe $G(E) = GL(2, E)$.

(1.2) Dans [W] Waldspurger considère deux conditions relatives à la représentation π. Soit ω le caractère central de π et Ω un caractère multiplicatif de E dont la restriction à F soit ω. On désigne par T le sous-groupe de G_ε

* Partially supported by N.S.F. Grant DMS-85-02789.

formé des matrices de la forme:

$$t = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^\sigma \end{vmatrix};$$

c'est un tore défini sur F et isomorphe au groupe multiplicatif de E. En particulier Ω s'identifie à un caractère du groupe adèlique de T par la formule $\Omega(t) = \Omega(a)$. Par abus de language on note aussi Z le centre de G_ε. La première condition s'énonce ainsi:

1. Il existe un ε, une représentation automorphe π' de G_ε correspondant à π et une forme automorphe ϕ dans l'espace de π' telle que l'intégrale

$$\int \phi(t)\Omega^{-1}(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in T(F_{\mathrm{A}})/T(F)Z(F_{\mathrm{A}}),$$

soit non nulle.

La deuxième fait intervenir le relèvement Π de π à $G(E)$:

2. La fonction $L(s, \Pi \otimes \Omega^{-1})$ n'est pas nulle au point 1/2.

Waldspurger démontre que (1) implique (2) ([W]). Mais il ne démontre pas tout à fait que (2) implique (1). On se propose de démontrer cette implication. Pour cela on va prouver une "formule des traces relative".

(1.3) On note ω' le relèvement de ω à E, de sorte que $\omega'(a) = \omega(aa^\sigma)$. On choisit un système de représentants des classes $F^\times/N_0$; pour chaque ε dans ce système de représentants on se donne une fonction lisse f_ε sur le groupe $G(E_{\mathrm{A}})$, se transformant par l'inverse du caractère ω' sous le centre et à support compact modulo le centre; on suppose la fonction nulle pour presque tout ε. La fonction f_ε définit un opérateur dans l'espace des formes cuspidales se transformant par le caractère ω' du centre. Cet opérateur est représenté par un noyau que l'on note K_ε. On considère l'expression:

$$\sum_\varepsilon \iint K_\varepsilon\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, g\right]\Omega^{-1}(a)\,\mathrm{d}a\eta\omega(\det g)\,\mathrm{d}g,$$

$$a \in E_{\mathrm{A}}^\times/E^\times, \quad g \in G_\varepsilon(F)Z(F_{\mathrm{A}})\backslash G_\varepsilon(F_{\mathrm{A}}). \tag{1.1.1}$$

On se donne d'autre part pour chaque ε une fonction lisse f'_ε sur le groupe $G_\varepsilon(F_{\mathrm{A}})$, se transformant par l'inverse du caractère ω sous le centre et à support compact modulo le centre; on suppose la fonction nulle pour presque tous les ε. La fonction définit un opérateur dans le sous-espace des formes automorphes engendré par les représentations automorphes cuspidales (i.e. de dimension infinie si G_ε n'est pas déployé) qui ont ω pour caractère central et ne sont pas diédrales pour E. On note K'_ε le noyau correspondant. On note aussi Ω' le caractère $\Omega^{-1}\omega'$. Autrement dit Ω' est le transformé de Ω par σ. On considère l'expression suivante:

$$\sum_\varepsilon \iint K'_\varepsilon[t_1, t_2]\, \Omega(t_1)\Omega'(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2, \quad t_1 \in T(F_\mathbf{A})/T(F)Z(F_\mathbf{A}). \tag{1.1.2}$$

Alors étant donnée une famille de fonctions f_ε il existe une famille de fonctions f_ε', nulles pour presque tout ε, telle que l'expression (1.1.1) soit égale à l'expression (1.1.2).

La nouveauté de la formule par rapport aux cas antérieurs ([J.L], [J]) est la présence, au moins en principe, d'une infinité de termes des deux côtés de la formule, chaque terme faisant intervenir des groupes différents. D'un autre point de vue la formule est en quelque sorte intermédiaire entre celle de [J.L.] et [J]. Elle repose sur une identification de la réunion disjointe des doubles classes $A(E)\backslash G(E)/G_\varepsilon(F)$ avec la réunion disjointe des doubles classes $T(F)\backslash G_\varepsilon(F)/T(F)$.

L'implication annoncée résulte immédiatement de la formule (§7). En principe on pourrait aussi démontrer les résultats arithmétiques de Waldspurger donnés dans [W]. Toutefois on doit considérer la formule elle même comme l'objet principal de travail. On espère en effet que c'est le précurseur de formules bien plus générales.

Au §2, on étudie les propriétés des doubles classes ci-dessus. Au §3 on étudie les intégrales orbitales locales. Au §4 on calcule celles des fonctions de Hecke. Au §5 on étudie l'intégrale du noyau d'Eisenstein et §6 celle du noyau géometrique. Enfin on prouve la formule au §7. En fait on ne prouve la formule que dans le cas particulier où toutes les fonctions f_ε sauf une sont nulles.

§2. Doubles classes

Dans ce numéro on conserve les notations du §1 excepté que F est maintenant un corps quelconque de caractéristique différente de 2.

(2.1) On choisit un ε non nul dans F et on étudie l'espace des doubles classes $T(F)\backslash G_\varepsilon(F)/T(F)$. Pour g dans le groupe $G_\varepsilon(F)$ on pose

$$X_\varepsilon(g) \;=\; bb^\sigma \varepsilon(aa^\sigma)^{-1}$$

si

$$g = \begin{vmatrix} a & b\varepsilon \\ b^\sigma & a^\sigma \end{vmatrix}.$$

Il est clair que la fonction ainsi définie est constante sur les doubles classes du groupe $T(F)$ dans le groupe $G_\varepsilon(F)$. On dira que g (ou sa double classe) est régulier si $X_\varepsilon(g)$ n'est ni nul ni infini, singulier dans le cas contraire. Si g et g' sont dans $G_\varepsilon(F)$ et $G_{\varepsilon'}(F)$ respectivement et $X_\varepsilon(g) = X_{\varepsilon'}(g')$ alors $\varepsilon = \varepsilon'$ et les éléments g et g' sont dans la même double classe du groupe $T(F)$. Si g est régulier dans $G_\varepsilon(F)$ alors la relation $tgt'^{-1} = g$, où t et t' sont dans $T(F)$, entraine que t et t' sont égaux et dans le centre $Z(F)$. D'autre part il n'y a que deux doubles classes singulières, celles de e et de l'élément

$$h = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On considère encore la relation $tgt'^{-1} = g$ où t et t' sont dans $T(F)$, mais on prend maintenant g singulier. Si g est e alors la relation entraine $t' = t$. Si $g = h$, on remarque que h normalise T et la relation entraine $t = gt'g^{-1}$. Enfin $X_\varepsilon(g)$ n'est jamais égal à 1 et prend, lorsque ε et g varient, toutes les valeurs dans l'ensemble $F - 1$, augmenté d'un point à l'infini. La vérification de ces assertions est élémentaire et laissée au lecteur.

(2.2) On note A le sous-groupe des matrices diagonales dans le groupe $G = GL(2)$. On se propose d'étudier l'espace des doubles classes $A(E)\backslash G(E)/G_\varepsilon(E)$. Pour cela on introduit le groupe P des matrices triangulaires supérieures et on étudie d'abord l'espace $P(E)\backslash G(E)/G_\varepsilon(E)$ des doubles classes du groupe $P(E)$ et du groupe $G_\varepsilon(F)$.

LEMME : *Si ε n'est pas une norme alors il n'y a qu'une double classe des groupes $P(E)$ et $G_\varepsilon(F)$. Si ε est une norme soit m une matrice dont la deuxième ligne (r, s) satisfasse à $\varepsilon rr^\sigma - ss^\sigma = 0$. Alors il y a deux doubles classes des groupes $P(E)$ et $G_\varepsilon(F)$, celle de e et celle de m.*

Démonstration: Soit g un élément de $G(E)$ dont la deuxième ligne soit (c, d). On suppose d'abord que $cc^\sigma\varepsilon - dd^\sigma$ ne soit pas nul, ce qui est toujour le cas si ε n'est pas une norme. Alors il existe un élément h de $G_\varepsilon(F)$ dont la deuxième ligne soit (c, d). Le produits du vecteur ligne $(0, 1)$ par h et g sont les mêmes. Donc la matrice $p = gh^{-1}$ fixe le vecteur $(0, 1)$. par conséquent, elle est dans P et $g = ph$. Si ε n'est pas une norme l'assertion du lemme est ainsi démontrée. On suppose maintenant que $cc^\sigma\varepsilon - dd^\sigma$ soit nul et ε soit une norme. Alors rs^{-1} et cd^{-1} ont la même norme. Il existe donc a et z dans E tels que $c = azr$ et $d = a^\sigma zs$. On pose

$$t = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^\sigma \end{vmatrix}, \qquad h = m \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} t, \qquad q = gh^{-1}$$

Alors h et g ont la même deuxième ligne. Il en résulte que q est dans P et finalement $g = pmt$ avec

$$p = q \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix}.$$

Comme p est dans P le lemme est complètement démontré.

(2.3) On introduit maintenant l'involution i dont G_ε est le fixateur:

$$g^i = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} g^\sigma \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1},$$

où, comme plus haut, σ désigne la conjugaison dans E. On pose $H(g) = gg^{-i}$. Alors la fonction H est constante sur les classes à droite du groupe $G_\varepsilon(F)$; de plus $H(g) = H(g')$ entraine que g et g' sont dans la même classe de $G_\varepsilon(F)$. D'autre part la fonction qui à la matrice h d'éléments p, q, r, s associe le scalaire rq/ps est constante sur les doubles classes du groupe $A(E)$. Enfin pour a diagonal on a: $H(ag) = aH(g)a^{-i}$ et a^{-i} est aussi diagonale. On est donc conduit à poser

$$Y_\varepsilon(g) = rq/ps$$

où p, q, r, s sont les éléments de la matrice $H(g)$. La fonction ainsi définie est constante sur les doubles classes des groupes $G_\varepsilon(F)$. Si g est dans $P(E)mG_\varepsilon(F)$ alors $s = 0$ et $Y_\varepsilon(g)$ est infini. Si g est dans $P(E)G_\varepsilon(F)$ alors g est dans la double classe d'un élément de la forme

$$n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.3.1}$$

et l'on a:

$$Y_\varepsilon(g) = -\varepsilon^{-1}xx^\sigma(1 - \varepsilon^{-1}xx^\sigma)^{-1}. \tag{2.3.2}$$

Cela montre que Y_ε prend ses valeurs dans l'ensemble F augmenté d'un point à l'infini. On dira que g ou sa double classe est régulier si $Y_\varepsilon(g)$ n'est ni nul ni infini.

LEMME: *On suppose g et g' réguliers pour $G_\varepsilon(F)$ et $G_{\varepsilon'}(F)$ respectivement. Si $Y_\varepsilon(g) = Y_{\varepsilon'}(g')$ alors $\varepsilon = \varepsilon'$ et les éléments g et g' sont dans la même double classe des groupes $A(E)$ et $G_\varepsilon(F)$*

Démonstration: On peut supposer $g = n(x)$ et $g' = n(x')$. La formule (2.3.2) ci-dessus montre que $\varepsilon^{-1}xx^\sigma = \varepsilon'^{-1}x'x'^\sigma$. Il en résulte que x et x' ont la même norme; par conséquent, il existe a tel que $x = x'\, aa^{\sigma-1}$. On a donc:

$$g = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^\sigma \end{vmatrix} g' \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^\sigma \end{vmatrix}^{-1}.$$

D'où la conclusion.

On remarquera que $Y_\varepsilon(g)$ ne peut être égal à 1 et prend, lorsque ε et g varient, toutes les valeurs dans l'ensembe F-1 augmenté d'un point à l'infini.

(2.5) LEMME:

(*i*) *Si ε n'est pas une norme la seule double classe singulière est celle de e.*

(*ii*) *Si ε est la norme d'un élément u on pose*

$$m = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & -u \end{vmatrix}.$$

Alors il y a quatre classes singulières, celles de e, $n(u)$, m et $n(1)m$.

Démonstration: Si ε n'est pas une norme, il résulte des considérations précédentes que Y_ε ne prend pas la valeur infinie. La seule classe singulière est donc celle de e. Si ε est la norme de u alors $Y_\varepsilon(n(x))$ est 0 si $x = 0$ et infini si la norme de x est ε. Comme dans la démonstration du lemme (2.4) la double classe de $n(x)$ ne dépend que de la norme de x. On voit donc que $P(E)G_\varepsilon(F)$ contient deux double classes singulières, celle de e et celle de $n(u)$. Les autre double classes singulières sont contenues dans $P(E)mG_\varepsilon(F)$ et ont donc des représentants de la forme $g(x) = n(x)m$. Les éléments $g(x)$ et $g(y)$ sont dans la même double classe si et seulement si il existe a dans $A(E)$ tel que $g(x)$ et $ag(y)$ soient dans la même classes à droite du groupe $G_\varepsilon(F)$, ou, ce qui revient au même, $H(g(x) = H(ag(y))$. En notant a_1 et a_2 les éléments diagonaux de la matrice a on voit que cette dernière relation est équivalente à:

$$a_1 = a_1^\sigma, \quad a_2 = a_2^\sigma,$$

$$a_1 a_2^{\sigma-1}\, Try = Trx.$$

Les deux premières relations impliquent que a_1 et a_2 sont contenus dans F. Alors on voit qu'il existe a satisfaisant la dernière relation si et seulement si Trx et Try sont tous les deux nuls ou tous les deux non nuls. On en conclut qu'il y a deux classes contenues dans $P(E)mG_\varepsilon(F)$, celle de m et celle de $n(1)m$.

(2.6) Etant donné g dans $G(E)$ on étudie maintenant l'ensemble $Z(g)$ formé des couples (a, h) avec a dans $A(E)$ et h dans $G_\varepsilon(F)$ tels que $agh^{-1} = g$.

LEMME:

(*i*) *Si* g *est régulier ou si* $g = n(u)$ *ou si* $g = mn(u)$ *alors* $Z(g)$ *est l'ensemble des couples* (z, z) *avec* z *dans* $Z(F)$.

(*ii*) *Si* $g = e$ *alors* $Z(g)$ *est l'ensemble des couples* (t, t) *avec* t *arbitraire dans* $T(F)$.

(*iii*) *Si* $g = m$ alors $Z(g)$ *est l'ensemble des couples* $(a, g^{-1} ag)$ *avec* a *arbitraire dans* $A(F)$.

Démonstration: Soient p, q, r, s les élèments de la matrice $H(g)$. Si (a, h) est dans $Z(g)$ alors $H(ag) = H(g)$ et cette dernière relation s'écrit, en notant a_1 et a_2 les éléments diagonaux de la matrice a:

$$pa_1 a_2^{-\sigma} = p, \quad qa_1 a_1^{-\sigma} = q, \quad ra_2 a_2^{-\sigma} = r, \quad a_2 a_1^{-\sigma} = s.$$

Dans le cas (i) les éléments r et q sont différents de 0 et l'un au moins des éléments p et s est différent de 0. Il en résulte aussitôt que a est dans $Z(F)$ et $h = a$.

Dans le cas (ii) on a $p = s = 1$ et $q = r = 0$. On en déduit que a est dans T et $h = a$. Dans le cas (iii) on a $p = s = 0$ et r et q sont non nuls. On en déduit que a est dans $A(F)$. Réciproquement si a est dans $A(F)$, alors d'après le calcul précédent $H(ag) = H(g)$ donc $ag = gh$ avec h dans $G_\varepsilon(F)$ et $h = g^{-1}ag$.

Les assertions du lemme sont donc démontrées.

§3. Intégrales orbitales

On conserve les notations des numéros précédents mais on suppose maintenant que F est un corps local, E une extension quadratique, η le caractère quadratique de F attaché à E. L'ensemble des classes de N_0 dans le groupe multiplicatif de F est réduit à deux éléments. On désigne par Ω un caractère multiplicatif de E et par ω sa restriction à F, par ω' le relèvement de ω à E et par Ω' le caractère $\Omega^{-1}\omega'$.

(3.1) On choisit maintenant un ε non nul dans F et on se donne une fonction f sur le groupe G_ε, lisse, se transformant par l'inverse du caractère ω sous le centre et à support compact modulo le centre. On définit une fonction $H(x) = H(x:f)$ par la formule:

$$H(x) = \Omega(u) \iint f\left[t_1 \begin{vmatrix} 1 & u\varepsilon \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} t_2 \right] \Omega(t_1)\Omega'(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2,$$

si $x \neq 1$ et $x = uu^\sigma\varepsilon$ pour au moins un u;

$$H(x) = 0, \quad \text{sinon.} \tag{3.1.1}$$

Chaque intégrale porte sur l'ensemble compact $T(F)/Z(F)$. Un calcul formel montre que le produit de l'intégrale double par $\Omega(u)$ ne change pas si l'on remplace u par $uaa^{-\sigma}$; il en résulte que le membre de droite ne dépend que de la norme de u, ce qui justife la notation. On remarquera que $H(1) = 0$ par définition. On se propose d'étudier les propriétés de la fonction H.

PROPOSITION:

(*i*) *La fonction H est nulle dans un voisinage du point* 1.

(*ii*) *Elle est lisse en tout point de F différent de* 0.

(*iii*) *Il existe une fonction G définie dans un voisinage de* 0 *de F et lisse, telle que $H(x) = G(x^{-1})$, pour x dans εN de valeur absolue assez grande. En particulier:*

$$G(0) = \int f\left[t \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \Omega(t)\, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{vol}\,(T(F)/Z(F)).$$

(*iv*) *Il existe une fonction I définie et lisse dans un voisinage de* 0 *de E, telle que $H(x) = \Omega(u)I(u)$ si $x = \varepsilon uu^\sigma$ et la valeur absolue de x est assez petite.*

(*v*) *Si* Ω *est le relèvement à* E *d'un caractère* λ *de* F *alors il existe une fonction* J *définie dans un voisinage de zéro de* F, *telle que pour* x *dans* εN_0 *de valeur absolue assez petite on ait:* $H(x) = \lambda(x)J(x)$. *En particulier:*

$$J(0) = \int f(t)\,\Omega(t)\,\mathrm{d}t \cdot \mathrm{vol}\,(T(F)/Z(F))\,\lambda^{-1}(\varepsilon).$$

(*vi*) *Si* H *est une fonction satisfaisant les propriétés* (*i*) *à* (*iv*) *alors* $H = H(f)$ *pour une fonction* f *appropriée.*

Démonstration: La première assertion est évidente si 1 n'est pas dans εN_0, puisque H est alors nulle sur le voisinage N_0 de 1. On suppose maintenant que 1 est dans εN_0, On a $H(1) = 0$ par définition. Si x est dans εN et $H(x)$ non nul alors la matrice dans l'intégrale double doit être dans un compact fixe du groupe $G_\varepsilon(F)/Z(F)$, donc en fait dans un compact du groupe $G_\varepsilon(F)$. Son déterminant $1 - x$ doit donc être dans un ensemble compact de $F^\times$, ce qui démontre la première assertion.

La deuxième assertion est évidente. Pour démontrer la troisième assertion, on écrit, après un changement de variables:

$$H(x) = \iint f\left[t_1 \begin{vmatrix} u^{-1} & \varepsilon \\ 1 & u^{\sigma-1} \end{vmatrix} t_2 \right] \Omega(t_1)\,\Omega'(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2. \tag{3.1.2}$$

Dans le cas p-adique si la valeur absolue de u est assez grande ceci est égal à

$$\iint f_1 \left[t_1 \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} t_2 \right] \omega(t_1)\,\Omega'(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2.$$

Un changement de variables donne le résultat sous la forme requise. D'où la conclusion. Dans le cas réel (3.1.2) ne dépend que de la norme de u et on conclut de même en utilisant le lemme suivant:

(3.1.3) Lemme: *soit* T *une fonction lisse définie dans un voisinage de* 0 *dans* E. *On suppose que* $T(u)$ *ne dépende que de la norme de* u. *Alors il existe une fonction lisse* S *dans un voisinage de* 0 *de* F, *telle que* $T(u) = S(uu^\sigma)$, *si la valeur absolue de* u *est assez petite.*

L'assertion (*iv*) est évidente. Pour démontrer l'assertion (*v*) on procède comme pour l'assertion (*iii*). On obtient pour la valeur de J au point zéro l'intégrale:

$$\iint f(t_1 t_2)\,\Omega(t_1)\,\Omega'\,(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2.$$

Un changement de variables donne le résultat sous la forme requise. On laisse au lecteur le soin de démontrer la dernière assertion.

(3.2) On se donne maintenant un élément ε de F, une fonction f sur $G(E)$, se tranformant par l'inverse du caractère ω' sous le centre, lisse et à support compact modulo le centre. On se propose d'examiner les propriétés de la fonction $U(x) = U(x:f) = U(x:f:\varepsilon)$ définie par

$$U(x) = \Omega(u) \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right] \Omega(a)\, \eta\omega(\det g)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}g,$$

$$a \in E^{\times},\ g \in G_{\varepsilon}(F)/Z(F),$$

si $x = -\varepsilon^{-1}uu^{\sigma}(1 - \varepsilon^{-1}uu^{\sigma})^{-1}$ pour un u au moins;

$$U(x) = 0 \quad \text{sinon.} \tag{3.2.1}$$

Un calcul formel montre comme plus haut que le produit de l'intégrale double par $\Omega(u)$ ne dépend que de la norme de u, ce qui justifie la notation. D'autre part, on remarquera que $U(1) = 0$, par définition.

(3.3) Pour étudier les propriétés des fonctions U on introduit l'ensemble X formé des matrices g dans $G(E)$ telles que $gg^{i} = 1$, où i désigne l'involution qui fixe G_{ε} (Cf. (2.3)). On note P l'application de $G(E)$ dans X définie par $P(g) = gg^{-i}$.

(3.3.1) LEMME: *L'application P est surjective.*

Démonstration: Soit x un élément de X. Pour h dans $G(E)$ on pose $y(h) = h + xh^{i}$. On a $xy(h)^{i} = y(h)$ d'où $x = P(y(h))$ si $y(h)$ est inversible. On va montrer que $y(h)$ est inversible pour au moins une matrice scalaire h, ce qui démontrera la proposition. Si h est la matrice scalaire d'élément a et $y(h)$ n'est pas inversible alors $-aa^{-\sigma}$ est une valeur de propre de x. Comme tout élément de norme 1 a cette forme et que x a au plus deux valeurs propres, il existe au moins un h tel que $y(h)$ soit inversible. D'oú le lemme.

Du lemme on déduit que X est une sous-variété fermée de $G(E)$ et que P définit un difféomorphisme de $G(E)/G_{\varepsilon}(F)$ sur X.
Soit μ un caractère de E^{X} qui prolonge η. On pose:

$$f_1(g) = f(g)\mu\Omega\,(\det g). \tag{3.3.2}$$

Alors l'intégrale qui définit U peut s'écrire:

$$U(x) = \Omega(u) \iint f_1 \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g \right] \mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}g$$

$$a \in E^X,\ g \in G_\varepsilon(F)/Z(F). \tag{3.3.3}$$

L'intégrale

$$\int f_1(hg)\, \mathrm{d}g$$

converge; sa valeur ne dépend que de la classe de h modulo $G_\varepsilon(F)$, ou, ce qui revient au même, de $P(h)$. Il existe donc une fonction F_1 sur X, lisse et à support compact, telle que $F_1(P(h))$ soit égal à l'intégrale ci-dessus. La fonction f_1 se transforme par le caractère $a \to \mu\Omega(aa^{-\sigma})$ du centre. D'autre part, en écrivant a pour la matrice scalaire ayant a pour éléments diagonaux, on a: $P(ah) = aP(h)a^{-\sigma}$. Il en résulte que F_1 a la propriété d'invariance suivante: $F_1(uy) = F_1(y)\mu\Omega(u)$ pour tout y dans X et tout u dans E de norme 1. On l'étend en une fonction encore notée F_1 sur $G(E)$ possédant la même propriété d'invariance, lisse et à support compact. En termes de F_1 l'intégrale qui définit $U(x)$ s'écrit:

$$U(x) = \Omega(u) \int F_1 \left[\begin{vmatrix} a(1 - \varepsilon^{-1}uu^\sigma) & aa^{-\sigma}u \\ -\varepsilon^{-1}u^\sigma & a^{-\sigma} \end{vmatrix} \right] \mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}a. \tag{3.3.4}$$

Si x est fini, alors $1 - \varepsilon^{-1}uu^\sigma$ est non nul et l'intégrande est à support compact; l'intégrale originale converge donc pour tout x fini, y compris $x = 0$.

On examine maintenant le comportement de la fonction $U(x)$. On pose

$$s(u) = -\varepsilon^{-1}uu^\sigma(1 - \varepsilon^{-1}uu^\sigma)^{-1}. \tag{3.3.5}$$

On examine d'abord le comportement près de 1. Si ε n'est pas une norme alors U est nulle dans le voisinage N_0 de 1. On suppose maintenant que ε est une norme. Soit x un élément de F; si $U(x)$ n'est pas nul alors $x = s(u)$ et l'intégrale (3.3.4) ci-dessus n'est pas nulle. Cela implique que la matrice dans l'intégrale est dans un ensemble compact et que la valeur absolue de u est bornée supérieurement. Il en résulte que celle de $1 - x$ est bornée inférieurement. Donc U est nulle au voisinage du point 1 dans tous les cas.

On examine maintenant le comportement près d'un point arbitraire de $F^\times - 1$. Il est clair que l'intégrale définit une fonction lisse et à support compact de $u \in E$; on en conclut que U est lisse en tout point de $F^\times - 1$. En combinant avec les remarques précédentes, on en conclut que U est lisse en tout point de $F^\times$.

(3.4) On examine maintenant le comportement près de 0. La fonction $U(x)$ est 0 à moins que $x = s(u)$, pour au moins un u. Si x est assez petit alors u est aussi petit que l'on veut et $1 - \varepsilon^{-1}uu^\sigma$ aussi proche que l'on veut de 1, en particulier est une norme; alors x est de la forme $-\varepsilon^{-1}vv^\sigma$. Réciproquement si x est de cette forme et assez petit, alors $1 - x$ est une norme et $x(1 - x)^{-1}$ est donc de la forme $-\varepsilon^{-1}uu^\sigma$. On a alors $x = s(u)$.

Proposition:

(*i*) *Si x est près de* 0 *alors $U(x) = 0$ à moins que x ne soit dans $-\varepsilon^{-1}N_0$.*

(*ii*) *Il existe une fonction lisse $I(v)$ définie dans un voisinage de* 0 *de E, telle que, pour v assez près de* 0, *on ait $U(-\varepsilon^{-1}vv^\sigma) = \Omega(v)I(v)$.*

(*iii*) *On suppose que Ω est le relèvement d'un caractère λ de F; alors il existe une fonction lisse J définie près de* 0 *sur F telle que $U(x) = \lambda(x)J(x)$ pour x dans $-\varepsilon^{-1}N_0$ et assez petit. De plus:*

$$J(0) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right]\Omega(a)\, \mathrm{d}a\, \eta\omega(\det g)\, \mathrm{d}g\, \lambda(-\varepsilon).$$

Démonstration: d'après les remarques qui précèdent la proposition, si x est assez voisin de 0, alors x est de la forme $s(u)$ si et seulement si x est dans $-\varepsilon^{-1}N_0$. La première assertion est donc évidente. Toujours pour x assez voisin de 0, on peut écrire $(1 - x)^{-1}$ sous la forme $z(x)z(x)^\sigma$, où $z(x)$ est une fonction analytique, définie sur un voisinage de 0 de F, à valeurs dans E. Alors si x est assez petit et de la forme $-\varepsilon^{-1}vv^\sigma$ on peut aussi écrire:

$$x = s(u) \quad \text{avec } u = vz(-\varepsilon^{-1}vv^\sigma).$$

Comme $U(x) = \Omega(u)I_1(u)$, où I_1 est la fonction définie par l'intégrale (3.3.4) de au voisinage de 0, on obtient la deuxième assertion avec:

$$I(v) = I_1(vz(-\varepsilon^{-1}vv^\sigma)\Omega(z(-\varepsilon^{-1}vv^\sigma)). \tag{3.2.1}$$

Sous les hypothèses de la troisième partie du lemme, $\Omega(v)$ ne dépend que de la norme de v. Il en est donc de même de $I(v)$. Dans le cas p-adique I

est constante dans un voisinage de 0 donc certainement une fonction lisse de la norme de u. La même conclusion reste vraie dans le cas rèel d'après le lemme (3.1.3). Enfin $J(0)$, $I(0)$ et $I_1(0)$ sont égaux et donnés par l'intégrale de la troisième partie de la proposition.

(3.5) On examine maintenant le comportment de U près de l'infini. Pour cela on utilise sans démonstration le lemme suivant:

(3.5.1) LEMME: *Soit ϕ une fonction de Schwartz–Bruhat à deux variables.*

Pour tout x non nul dans F, on pose:

$$I(x) \;=\; \int \phi(ax, a^{-1})\, \eta(a)\, \mathrm{d}^\times a.$$

Alors il existe deux fonctions de Schwartz–Bruhat ϕ_1 et ϕ_2 telles que pour l'on ait, pour tout x non nul dans F:

$$I(x) \;=\; \phi_1(x) + \eta(x)\phi_2(x).$$

De plus on a:

$$\phi_1(0) \;=\; \int \phi(0, a)\, \eta(a)\, \mathrm{d}^\times a, \qquad \phi_2(0) \;=\; \int \phi(a, 0)\eta(a)\, \mathrm{d}^\times a.$$

Les deux dernières intégrales sont divergentes; la dernière par exemple est la valeur au point 0 du prolongement analytique de l'intègrale suivante, qui converge pour Res strictement positif:

$$\int \phi(a, 0)\, |a|^s\, \mathrm{d}^\times a$$

Le lemme éconcé on revient à l'étude de la fonction U. Si $x = s(u)$ on a $\varepsilon^{-1}u^\sigma u = (1 - x^{-1})^{-1}$. Si la valeur absolue de x est assez grande le second menbre est une norme; on en conclut que si ε n'est pas une norme alors lorsque la valeur absolue de x est assez grande x n'est pas de la forme $s(u)$ et $U(x)$ est nul. On suppose maintenant que ε est en fait une norme. Alors si la valeur absolue de x est assez grande le membre de droite est une norme, donc égal au membre de gauche pour un u approprié; alors $x = s(u)$. D'autre part on peut regarder F_1 comme une fonction de Schwartz–Bruhat à 4 variables. On considère l'intégrale:

$$L(y, u) \;=\; \Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} ay & aa^{-\sigma}u \\ -\varepsilon^{-1}u^\sigma & a^{-\sigma} \end{vmatrix}\right] \mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}a. \tag{3.5.2}$$

La première variable y est dans un voisinage V de 0 de F mais non nulle et la deuxième est dans un sous ensemble V' de E, image réciproque via la norme d'un voisinage de ε. Il est clair que l'intégrale converge. Pour la calculer on peut intégrer d'abord sur F^X puis sur l'ensemble compact E^X/F^X. On peut appliquer le lemme ci-dessus (ou plutôt une version du lemme avec paramètres) à l'intégrale intèrieure. Il en résulte qu'il existe deux fonctions lisses L_1 et L_2 sur $V \times V'$ telles que

$$L(y, u) = L_1(y, u) + \eta(y)L_2(y, u). \tag{3.5.3}$$

De plus on a:

$$L_1(0, u) = \Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} 0 & a^{1-\sigma}u \\ -\varepsilon^{-1}u^{\sigma} & a^{-\sigma} \end{vmatrix}\right]\mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}a. \tag{3.5.4}$$

$$L_2(0, u) = \Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} a & a^{1-\sigma}u \\ -\varepsilon^{-1}u^{\sigma} & 0 \end{vmatrix}\right]\mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}a. \tag{3.5.5}$$

Les deux dernières intégrales sont divergentes; la deuxième par exemple est la valeur en 0 du prolongement analytique de l'intégrale suivante, qui converge pour Res strictement positif:

$$\Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} a & a^{1-\sigma}u \\ -\varepsilon^{-1}u^{\sigma} & 0 \end{vmatrix}\right]\mu^{-1}(a)\, |a|^s\, \mathrm{d}a$$

On sait que F_1 possède une propriéte d'invariance: $F_1(hv) = F_1(h)\mu\Omega(v)$, pour tout v de norme 1. Il en résulte que L possède la propriété suivante: $L(y, uv) = L(y, u)$ pour v de norme 1. En intégrant l'identité (3.4.3) sur le groupe des éléments de norme 1, on voit que l'on peut supposer que L_1 et L_2 ont la même propriéte d'invariance que L. On peut donc écrire L_i comme fonction du couple (y, t) avec $t = -\varepsilon u u^{\sigma}$. Finalement si la norme de x est assez grande on peut écrire $x = s(u)$. Alors en prenant $y = 1 - \varepsilon^{-1}uu^{\sigma}$ et $t = -\varepsilon^{-1}uu^{\sigma}$, il vient $U(x) = L(y, t)$. Comme $t = 1/x^{-1} - 1$ et $y = x^{-1}/x^{-1} - 1$ on peut écrire $L_i(y, t) = M_i(x^{-1})$, où M_i est une fonction lisse définie dans un voisinage de 0 de F. Si de plus la valeur absolue de x est assez grande alors $1 - x^{-1}$ est une norme et $\eta(y) = \eta(-x)$. En prenant u de norme ε, on obtient une valeur infinie de x et la relation $M_i(0) = L_i(0, u)$. On arrive ainsi à la proposition suivante:

PROPOSITION:

(*i*) *Si ε n'est pas une norme alors $U(x) = 0$ si la valeur absolue de x est assez grande.*

(*ii*) *On suppose que ε est une norme. Alors il existe deux fonctions lisses M_i, $i = 1, 2$, définies dans un voisinage de 0 de F, telles que, pour x assez grand, on ait:*

$$U(x) = M_1(x^{-1}) + \eta(-x)M_2(x^{-1}).$$

(*iii*) *Sous les hypothèses de* (*ii*) *si ε est la norme de v alors:*

$$M_1(0) = \Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} 0 & a^{1-\sigma}v \\ -\varepsilon^{-1}v^\sigma & a^{-\sigma} \end{vmatrix}\right] \mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}^\times a.$$

$$M_2(0) = \Omega(u) \int F_1\left[\begin{vmatrix} a & a^{1-\sigma}v \\ -\varepsilon^{-1}v^\sigma & 0 \end{vmatrix}\right] \mu^{-1}(a)\, \mathrm{d}^\times a.$$

Les deux denières intégrales sont divergentes et sont définies comme plus haut par prolongement analytique. On peut aussi les interpréter comme intégrales orbitales (divergentes) attachées à des orbites singulières. A cet effet on suppose $\varepsilon = 1$ et $v = 1$. Alors on a:

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad P(m) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$P(n(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad P(mn(1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.5.6}$$

En calculant formellement on voit que:

$$M_1(0) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n(1)g\right] \Omega(a)\, \eta\omega\, (\det g)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}g,$$

$$M_2(0) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n(1)mg\right] \Omega(a)\, \eta\omega\, (\det g)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}g. \tag{3.5.7}$$

(3.6) On se donne maintenant un ε dans F, une fonction f sur $G(E)$, comme plus haut. On se donne d'autre part un systéme de représentants $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ pour les classes de N_0 dans le groupe multiplicatif de F. On suppose ε_1 dans N_0. On écrit G_i pour le groupe défini par ε_i.

PROPOSITION: *Etant donnés f et ε, il existe des fonctions f_1 et f_2 sur G_1 et G_2 respectivement telles que*

$$U(x:f:\varepsilon) = H(x, f_i) \quad si\ x = \varepsilon_i u u^\sigma.$$

La proposition est une conséquence immédiate de la caractérisation des intégrales orbitales H et des propriétés de la fonction U.

§4. Intégrales orbitales: le cas non ramifié

(4.1) On reprend les notations du §3; on suppose maintenant que F est un corps local non archimédien et E une extension quadratique non ramifiée. On suppose que la caractéristique résiduelle n'est pas 2. On suppose aussi les caractères ω et Ω non ramifiés. On pose $K = GL(2, R_E)$, où R_E est l'anneau des entiers de E. On pose de même $K' = GL(2, R_F)$. On note $H(K)$ l'algèbre de Hecke des fonctions bi-invariantes sous K et à support compact. On note de même $H(K, \omega')$ l'algèbre des fonctions bi-invariantes sous K, se tramsformant par l'inverse du caractère ω' sous le centre et à support compact modulo le centre. On définit de même les algèbres $H(K')$ et $H(K', \omega)$ de fonctions sur le groupe $GL(2, F)$. Il existe des homomorphismes naturels:

$$H(K) \to H(K') \tag{4.1.1}$$

et

$$H(K, \omega') \to H(K, \omega). \tag{4.1.2}$$

Le premier peut se définir en termes de la transformée de Satake. Pour f dans $H(K)$ on pose:

$$\hat{f}(X_1, X_2) = \int f\left[\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\right] |a|^{s_1 - 1/2}\,|b|^{s_2 + 1/2}\,da\,db\,du,$$

$$\text{si} \quad X_i = q_E^{-s_i}.$$

La fonction $\hat{f}$ est un polynôme; c'est la transformée de Satake de f. On définit de même la transformée d'une fonction f' de $H(K')$. Alors si f' est l'image de f par l'homorphisme (4.1.1) on a:

$$\hat{f}'(X_1, X_2) = \hat{f}(X_1^2, X_2^2).$$

Pour définir l'homomorphisme (4.1.2) on écrit un élément f de $H(K, \omega')$ sous la forme:

$$f(g) = \int f_0(ag)\omega'(a)\, \mathrm{d}a, \quad a \in E^X, \tag{4.1.4}$$

avec f_0 dans $H(K)$. Soit f_0' l'image de f_0 sous l'homorphisme (4.1.1). Alors l'image de f' de f sous l'homomorphisme (4.1.2) est donnée par:

$$f'(g) = \int f_0'(ag)\omega(a)\, \mathrm{d}a, \quad a \in F^X. \tag{4.1.5}$$

On se donne une unité ε; c'est donc une norme. On se donne d'autre part un système de représentants $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ pour les classes de N_0 dans le groupe multiplicatif de F. On suppose que ε_1 est une unité donc une norme. On note G_1 et G_2 les groupes définis par ε_1 et ε_2. Le groupe G_1 est isomorphe au groupe $G(F) = GL(2, F)$. En particulier il existe un isomorphisme de $G(F)$ qui transforme le groupe K' en le groupe $K \cap G_1(F)$: un tel isomorphisme sera dit privilégié. On prend alors f dans $H(K, \omega')$; on note f' son image par l'homomorphisme (4.1.2) et f_1 l'image de f' par un isomorphisme privilégie. Comme un isomorphisme privilégié est unique, à la composition près avec un automorphisme intérieur de $GL(2, F)$ défini par un élément de K, la fonction f_1 est bien défine. On note aussi f_2 la fonction zéro sur le groupe $G_2(F)$. Alors on peut préciser comme suit la proposition (3.5):

PROPOSITION: *Avec les hypothèses et notations ci-dessus on a:*

$$U(x:f:\varepsilon) = H(x:f_i) \quad \text{si } x = \varepsilon_i N(u).$$

La démonstration occupera le reste du §4.

(4.2) Il est facile de voir que l'on peut se ramener au cas où $\varepsilon_1 = 1$ et $\omega = \eta$. Alors $\omega' = 1$ et Ω est le caractère quadratique non ramifié de E. Il sera aussi plus commode de formuler l'égalité ci-dessus en termes de fonctions appartenant *à* $H(K)$. On pose donc pour une telle fonction f:

$$U(x:f) = \Omega(y) \int f\left[\begin{vmatrix} ab & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right] \Omega(a)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}g$$

si $x = s(y)$ pour un y;

$= 0$ sinon. (4.2.1)

On peut aussi écrire l'intégrale ci-dessus sous la forme:

$$U(x:f) = \Omega(y) \int f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right] \Omega(a)\Omega(b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}g,$$

si $x = s(y)$. (4.2.2)

On note alors f' l'image de f dans $H(K')$, puis f_1 l'image de f' par un isomorphisme privilègié de $G(F)$ sur $G_1(F)$. On écrit $N(u)$ pour la norme de u et on pose

$$H(x:f_1) = \Omega(u) \iint f\left[t_1 \begin{vmatrix} 1 & u \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} t_2\right] \Omega(t_1)\Omega(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2$$

si $x = N(u)$;

$= 0$ si x n'est pas une norme. (4.2.3)

Il s'agit de voir que

$U(x:f) = H(x:f_1)$ si x est une norme;

$U(x:f) = 0$ si x n'est pas une norme. (4.2.4)

Par linéarité, il est clair qu'il suffit de prouver cette assertion lorsque f est la fonction caractèristique f_m de l'ensemble suivant, où π désigne une uniformisante de E ou F:

$$K_m = K\begin{vmatrix} \pi^m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}K.$$

Toujours par linéarité, il suffit d'ailleurs de prouver cette assertion pour la fonction

$$g_m = f_m + f_{m-1} + \cdots + f_1 + f_0.$$

On note $U(x:m)$ l'intégrale orbitale correspondant à g_m. On va d'abord calculer $U(x:m)$.

(4.3) Soit F_m la fonction définie par:

$$F_m(y) = \int g_m\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\Omega(a)\Omega(b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b. \tag{4.3.1}$$

On va calculer la fonction F_m puis calculer l'intégrale $U(x:m)$ en termes de F_m.

(4.3.2) Lemme: *Soit Φ la fonction caractéristique de R_E, π une uniformisante. Alors:*

$$F_m(y) = (-1)^m\Phi(\pi^m y).$$

Démonstration: On calcule d'abord la foncion:
(4.3.3)

$$H_m(y) = \int f_m\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\Omega(a)\Omega(b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b. \tag{4.3.3}$$

Ceci s'écrit:

$$H_m(y) = \Sigma\,(-1)^{j+k} f_m\left[\begin{vmatrix} \pi^j & y\pi^j \\ 0 & \pi^k \end{vmatrix}\right].$$

Comme $j + k$ est égal à m si la matrice ci-dessus est dans K_m la somme s'écrit aussi:

$$H_m(y) = (-1)^m\,\Sigma f_m\left[\begin{vmatrix} \pi^j & y\pi^j \\ 0 & \pi^{m-j} \end{vmatrix}\right],$$

où la somme porte sur tous les j tels que:

$$j \geqslant 0, \quad m - j \geqslant 0, \quad j \geqslant -v(y), \quad \operatorname{Inf}[j, m-j, j+v(y)] = 0.$$

Si $m = 0$ la somme se réduit au seul terme $j = 0$ et $H_0 = \Phi$. On suppose maintenant $m > 0$. Si $v(y) \geqslant 0$ la somme se réduit aux terms $j = 0$ et $j = m$; il en résulte que $H_m(y) = 2(-1)^m$. Si $-m < v(y) < 0$ alors la somme se réduit aux termes $j = -v(y)$ et $j = m$; il en résulte que $H_m(y) = 2(-1)^m$. Si $v(y) = -m$ la somme se réduit au terme $j = m = -v(y)$; alors $H_m(y) = (-1)^m$. Enfin si $v(y) < -m$ la somme est vide et $H_m(y)$ nul. On a donc:

$$H_m(y) = (-1)^m[\Phi(y\pi^m) + \Phi(y\pi^{m-1})] \quad \text{si } m \geqslant 1;$$

$$H_0 = \Phi.$$

En écrivant que F_m est la somme des H_j pour $0 \leqslant j \leqslant m$ on trouve le résultat cherché.

(4.4) La relation entre $U(x:m)$ et la fonction F_m est la suivante:

(4.4.1) LEMME:

$$\begin{aligned} U(x:m) = {} & 2\Omega(y)(1-q^{-1})^{-1}q^{-2}F_m(y) \\ & + \Omega(y)(1-q^{-1})^{-1}\int F_m[(y+u)(1-N(u))^{-1}] \\ & \times |1-N(u)|_F^{-2}\Omega(1-N(u))\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

$$\text{si } x = s(y)(= -N(y)(1-N(y))^{-1}),$$

où du désigne la mesure de Tamagawa et l'intégrale porte sur les unités de E.

Démonstration: On utilise la formule d'intégration suivante sur le groupe $G_1(F)$:

$$\int f(g)\,\mathrm{d}g = (1-q^{-1})^{-1}\int f\left[t_1 \begin{vmatrix} 1 & u \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} t_2\right]\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,|1-N(u)|_F^{-2}\,\mathrm{d}u,$$

où dt désigne la mesure de Tamagawa sur le tore T et du la mesure de Tamagawa sur le groupe additif de E. Il existe une formule analogue pour les fonctions sur $G_1(F)$ invariantes sous le centre $Z(F)$. On va l'appliquer à la restriction à $G_1(F)$ d'une fonction f sur $G(E)$ invariante à droite sous K et invariante sous le centre $Z(E)$ de $G(E)$. Alors l'intégrale en t_2 disparait. Pour évaluer l'intégrale en u, on la décompose en trois intégrales correspondant aux trois régions: $|u| < 1$, $|u| = 1$, $|u| > 1$. De plus, dans l'intégrale pour $|u| > 1$, on change u en u^{-1}. On obtient le produit du facteur $(1 - q^{-1})^{-1}$ et de la somme suivante:

$$\int \left[t \begin{vmatrix} 1 & u \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} \right] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u + \int f \left[t \begin{vmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-\sigma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u & 1 \\ 1 & u^\sigma \end{vmatrix} \right] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u$$

$$+ \int f \left[t \begin{vmatrix} 1 - uu^\sigma & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} \right] \mathrm{d}t\, |1 - N(u)|_F^{-2}\, \mathrm{d}u.$$

Les deux premières intégrales sont pour $|u| < 1$, la dernière pour $|u| = 1$. En tenant compte de l'invariance sous K à droite, ceci se réduit à:

$$\begin{aligned} \int f(g)\, \mathrm{d}g &= q^{-2}(1 - q^{-1})^{-1}\, 2f(e) \\ &\quad + (1 - q^{-1})^{-1} \int f \left[t \begin{vmatrix} 1 - N(u) & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] \mathrm{d}t\, |1 - N(u)|^{-2}\, \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

l'intégrale portant sur les unités de E. Soient z et z^σ les éléments diagonaux de la matrice t. Dans l'intégrale ci-dessus on peut changer u en $z^\sigma z^{-1} u$, puis multiplier la matrice à droite par l'inverse de t. Il vient finalement:

$$\begin{aligned} \int f(g)\, \mathrm{d}g &= q^{-2}(1 - q^{-1})^{-1} 2f(e) \\ &\quad + (1 - q^{-1})^{-1} \int f \left[\begin{vmatrix} 1 - N(u) & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] |1 - N(u)|^{-2}\, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On applique maintenant cette formule au calcul de $U(x:m)$. Il vient si $x = s(y)$:

$$U(x:m) = 2\Omega(y) q^{-2}(1 - q^{-1})^{-1} F_m(y) +$$

$$\Omega(y)(1-q^{-1})^{-1}\int g_m\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1-N(u) & y+u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]|1-N(u)|_F^{-2}$$

$$\times\ \Omega(ab)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}u.$$

Un simple changement de variables donne finalement le résultat cherché.

(4.5) Il nous faut maintenant évaluer l'intégrale du lemme (4.4.1), compte tenu de la valeur de la fonction F_m donnée au lemme (4.3.2). Dans ce numéro on examine le cas où la valeur absolue de y est différente de 1. Si elle est plus petite que 1, alors il vient aussitôt:

$$\Omega(y)(1-q^{-1})^{-1}(-1)^m$$

$$\times\left\{2q^{-2}+\int\Phi\,(\pi^m(1-N(u))^{-1})\Omega(1-N(u))\,|1-N(u)|^{-2}\,\mathrm{d}u\right\}.$$

Dans l'intégrale on peut prendre $z = N(u)$ comme variable. Alors du doit être remplacé par $(1+q^{-1})\,dz$. Il vient donc:

$$\Omega(y)(1-q^{-1})^{-1}(-1)^m$$

$$\times\left\{2q^{-2}+(1+q^{-1})\int\Phi\,(\pi^m(1-z)^{-1})\Omega(1-z)\,|1-z|^{-2}\,\mathrm{d}z\right\}.$$

L'intégrale porte sur l'ensemble des z de valeur absolue 1. On peut l'écrire comme la différence d'une intégrale portant sur l'ensemble des z de valeur absolue au plus 1 et une intégrale portant sur l'ensemble des z de valeur absolue strictement plus petite que 1. Dans cette dernière intégrale $1-z$ est une unité et l'intégrale vaut q^{-1}. Par contre dans la première intégrale on peut changer z en $z+1$ et évaluer alors l'intégrale comme série géometrique. Finalement on obtient le résultat suivant:

(4.5.1) Lemme: *Si* $|y| < 1$ *et* $x = s(y)$, *on a*:

$$U(x:m) = \Omega(y)q^m.$$

On passe maintenant au cas où la valeur absolue de y est strictement plus grande que 1. On obtient d'abord:

$$(-1)^m(1-q^{-1})^{-1}\Omega(y)\times$$

$$\left\{2q^{-2}\,\Phi(y\pi^m) + \int \Phi[y\pi^m(1 - N(u)^{-1})]\,|1 - N(u)|^{-2}\Omega(1 - N(u))\,\mathrm{d}u\right\}.$$

A nouveau on peut dans l'intégrale prendre $z = N(u)$ et remplacer du par $(1 + q^{-1})\,\mathrm{d}z$. On obtient une intégrale portant sur l'ensemble des z de valeur absolue 1 que l'on traite comme plus haut. On obtient enfin:

(4.4.2) Lemme: *Si* $w|y| > 1$ *et* $x = s(y)$ *alors*:

$$U(x:m) = q^{m+v(y)}, \quad \text{si } 1 < |y| \leqslant |\pi^{-m}|,$$

$$U(x:m) = 0, \quad \text{si } |\pi^{-m}| < |y|.$$

(4.6) On passe maintenant au cas où y est de valeur absolue 1. On va prouver le résultat suivant:

(4.6.1) Lemme: *On suppose* $x = s(y)$ *avec* y *de valeur absolue* 1.

(i) *Si* $N(y) - 1$ *est aussi de valeur absolue* 1 *alors:*

$$U(x:m) = q^m.$$

(ii) *Si* $N(y) - 1$ *n'est pas de valeur absolue* 1 *on pose* $z = N(y) - 1$. *Alors:*

$$U(x:m) = q^m[(-1)^{v(z)} + 1]/2.$$

On revient encore à l'intégrale du lemme (4.4.1). Pusique y est une unité on peut changer u en uy. D'autre part les fonctions que l'on considère sont invariantes par une homothétie de rapport unité. On voit que l'on peut écrire:

$$U(x:m) = \Omega(y)(-1)^m(1 - q^{-1})^{-1}$$

$$\times \left\{2q^{-2} + \int \Phi[(1 + u)A^{-1}\pi^m]\Omega(A)\,|A|_F^{-2}\,\mathrm{d}u\right\}.$$

avec $A = N(y)^{-1} - N(u)$.

On choisît maintenant un système de représentants pour les classes de $1 + P_E$ dans le groupe des unités de E. Il sera commode de prendre les $q^2 - 1$ racines de l'unité dans E pour système de représentants. Alors on peut poser $u = t(1 + v)$, où t parcourt cet ensemble de représentants et v l'ensemble P_E. L'intégrale ci-dessus devient:

$$U(x:m) = (-1)^m(1 - q^{-1})^{-1}$$

$$\times \left\{2q^{-2} + \sum_t \int \Phi\,[(1 + t + tv)B^{-1}\pi^m]\Omega(B)\,|B|_F^{-2}\,\mathrm{d}v\right\},$$

$$\text{avec } B = N(y)^{-1}N(t)^{-1} - 1 - Q(v), \quad Q(v) = Tr(v) + N(v),$$

Dans la somme en t on va distinguer les t pour lesquels $N(y)N(t)$ n'est pas congru à 1 modulo P_F. Il y a $q^2 - q - 2$ tels t. De plus pour un tel t, B est une unité, $1 + t + tv$ un entier et l'intégrale ci-dessus est indépendante de t avec la valeur q^{-2}. La contribution de ces t est donc $1 - q^{-1} - 2q^{-2}$. en y ajoutant le premier terme dans l'expression ci-dessus on voit que:

$$U(x:m) = (-1)^m$$

$$\times \left\{1 + (1 - q^{-1})^{-1} \sum_t \int \Phi[(1 + t + tv)B^{-1}\pi^m]\Omega(B)\,|B|_F^{-2}\,\mathrm{d}v\right\},$$

$$\text{avec } B = N(y)^{-1}N(t)^{-1} - 1 - Q(v), \quad Q(v) = Tr(v) + N(v),$$

où la somme porte maintenant sur l'ensemble $X(y)$ formé des t tels que $N(y)N(t)$ soit congru à 1 modulo P_E. On remarquera que si $N(y)$ est lui même congru à 1 modulo P_F alors $t = -1$ est dans $X(y)$ car $N(-1) = 1$. Si au contraire $N(y)$ n'est pas congru à 1 modulo P_F alors -1 n'est pas dans $X(y)$.

On suppose d'abord que $N(y)$ n'est pas congru à 1 mod P_F. Alors $1 + t$ est une unité puisque -1 n'est pas dans $X(y)$. Il en est de même de $1 + t + tv$ qui "disparaît" donc de l'intégrale. On peut alors prendre $Q(v)$ comme variable, c'est à dire utiliser la formule d'intégration:

$$\int f[Q(v)]\,\mathrm{d}v = q^{-1}\int f[w]\,\mathrm{d}w, \quad v \in P_E, \quad w \in P_F.$$

Il vient donc:

$$U(x:m) = (-1)^m$$

$$\times \left\{1 + (1 - q^{-1})^{-1} q^{-1} \sum_t \int \Phi[B^{-1}\pi^m]\Omega(B)\,|B|_F^{-2}\,\mathrm{d}w\right\},$$

$$\text{avec } B = N(yt)^{-1} - 1 - w, \quad w \in P_F.$$

Comme $N(yt)^{-1} - 1$ est dans P_F, on peut le faire disparaitre de l'intégrale par une translation sur w. L'intégrale a donc une valeur indépendante de t d'ailleurs facile à calculer. Quant au nombre d'éléments de $X(y)$ c'est le nombre d'éléments du corps fini à q^2 éléments ayant norme 1 dans le corps à q éléments. C'est donc $q + 1$. Au total on trouve pour $U(x:m)$ la valeur annoncée dans (4.6.1) (i).

On suppose maintenant $N(y)$ congru à 1 mod P. Alors -1 est dans l'ensemble $X(y)$. Dans la somme en t on sépare donc les termes avec $t \neq -1$ du terme $t = -1$. On obtient ainsi:

$$U(x:m) = (-1)^m$$

$$\times \left\{1 + (1 - q^{-1})^{-1} \sum_t \int \Phi(1 + t + tv)B^{-1}\pi^m]\,\Omega(B)\,|B|_F^{-2}\,\mathrm{d}v\right.$$

$$\left. + (1 - q^{-1})^{-1} \int \Phi[vC^{-1}\pi^m]\Omega(C)\,|C|_F^{-2}\,\mathrm{d}v\right\}$$

$$\text{avec } B = N(y)^{-1}N(t)^{-1} - 1 - Q(v), \quad Q(v) = Tr(v) + N(v),$$

$$C = N(y)^{-1} - 1 - Q(v).$$

La première expression peut se calculer comme plus haut, excepté qu'il y a seulement q termes dans la somme. On trouve que sa valeur est

$$(q + 1)^{-1}[(-q) - (-q)^{m+1}].$$

Pour calculer la deuxième intégrale on utilise le lemme suivant:

(4.6.3) LEMME: *soit z un élément de F de valeur absolue plus petite que* 1. *Alors on a*:

$$\int \Phi[vD^{-1}\pi^m]\Omega(D)\,|D|^{-2}\,\mathrm{d}v$$

$$= (1 - q^{-1})[-(1 + q)^{-1} + q^m(-1)^m((q + 1)^{-1} + 2^{-1}((-1)^{v(z)} - 1))],$$

où l'on a posé $D = z - Q(v)$ et $v \in P_E$.

En appliquant le lemme à $z = N(y)^{-1} - 1$ et en ajoutant au résultat la valeur de la première intégrale on voit que $U(x:m)$ a bien la valeur donnée; on remarquera que z et $N(y) - 1$ on la même valuation puisque $N(y)$ est une unité.

(4.7) On va maintenant démontrer le lemme (4.6.3) ce qui achèvera la démonstration du lemme (4.6.1). On pose $P = P_F$, $P' = P_E$, $G_i = 1 + P^i$ et $G_i' = 1 + P'^i$. On note Tr la trace et N la norme. Alors $Tr(P') = P$ et $N(G_i') = G_i$. Soit K le noyau de N dans G_1'. On utilisera sans démonstration le résultat suivant:

LEMME (4.7.1): *L'indice de $K \cap G_j'$ dans K est q^{j-1}.*

Pour calculer l'intégrale du lemme (4.6.3) on utilise la formule d'intégration suivante:

$$\int_{P'} F(u + 1)\, du = q^{-1} \int_P dv \int_K F[(1 + u_0)k]\, dk,$$

où dans l'intégrale intérieure on choisit un u_0 tel que $N(1 + u_0) = 1 + v$ et dk désigne la mesure de Haar de volume 1 sur K. En remarquant que $Q(u) = v$ si $N(1 + u) = 1 + v$ on voit que l'intégrale du lemme (4.6.3) s'écrit donc:

$$q^{-1} \int_P \Omega(z - v)\, |z - v|^{-2}\, dv \int \Phi[u(z - v)^{-1}\pi^m]\, dk,$$

où l'on écrit $1 + u = (1 + u_0)k$ avec $N(1 + u_0) = 1 + v$.

On écrit l'intégrale extérieure comme la somme d'une intégrale portant sur l'ensemble des v tels que $1 \leqslant |(z - v)\pi^{-m}|$ et une intégrale portant sur les v tels que $|(z - v)\pi^{-m}| < 1$:

$$q^{-1} \int \Omega(z - v)\, |z - v|^{-2}\, dv \int \Phi(u(z - v)^{-1}\pi^m]\, dk, \quad |z - v| \geqslant q^{-m};$$

$$q^{-1} \int \Omega(z - v)\, |z - v|^{-2}\, dv \int \Phi[u(z - v)^{-1}\pi^m]\, dk, \quad |z - v| < q^{-m}. \tag{4.7.2}$$

Dans la première intégrale on remarque que dans le domaine d'intégration la fonction Φ est évaluée sur un entier; l'intégrale intérieure est donc indépendante de v avec une valeur égale à 1. En changeant v en $v + z$, on obtient finalement:

$$q^{-1} \int \Omega(v)\, |v|^{-2}\, dv, \quad q^{-m} \leqslant |v| < 1. \tag{4.7.3}$$

La valeur de cette intégrale est:

$$(1 - q^{-1})(q + 1)^{-1}\,[-1 + (-1)^m q^m].$$

On considère maintenant la deuxième intégrale (4.7.2). Pour u dans P' on a $|u|_E \geqslant |Q(u)|_E$. Dans l'intégrale intérieure on a donc:

$$|(z - v)\pi^{-m}|_E \geqslant |u|_E \geqslant |Q(u)|_E = |v|_E.$$

On peut donc regarder l'intégrale extérieure comme portant sur l'ensemble des v tels que

$$q^{-m}|v| \leqslant |z - v| < q^{-m}.$$

On considère maintenant un tel v. Il existe un u_0 avec $|u_0|_E = |v|_E$ tel que $N(1 + u_0) = 1 + v$. On pose alors $1 + u = k(1 + u_0)$ et l'intégrale intérieure porte sur l'ensemble des k tels que $|u| \leqslant |(z - v)\pi^{-m}|$. En posant $j = v[(z - v)\pi^{-m}]$ cela signifie que k est dans $G_j' \cap K$. L'intégrale intérieure est donc le volume de cette intersection, soit q^{1-j} d'après le lemme (4.7.1), où encore $q|(z - v)\pi^{-m}|$. Au total la deuxième intégrale (4.5.2) s'écrit

$$q^m \int \Omega(z - v)\, |z - v|^{-1}\, dv, \quad q^{-m}|v| \leqslant |(z - v)| < q^{-m}.$$

En changeant v en $v + z$ on arrive à:

$$q^m \int \Omega(v)\, |v|^{-1}\, dv, \quad q^{-m}\, |v + z| \leqslant |v| < q^{-m}. \tag{4.7.4}$$

La première inégalité est automatiquement satisfaite si $|z| \leqslant |v|$. Si $|z| > |v|$ elle se réduit à l'inégalité $|v| \geqslant q^{-m}|z|$. On voit donc que le domaine d'intégration est en fait défini par les inégalités $q^{-m}|z| \leqslant |v| < q^{-m}$. Le calcul de l'intégrale est alors immédiat. On trouve:

$$(1 - q^{-1})q^m(-1)^m[-1 + (-1)^{v(z)}]/2.$$

En ajoutant le résultat du calcul de (4.7.3) et (4.7.4) on arrive bien au lemme (4.6.3).

(4.8) En résumé, pour x de la forme $s(y)$, $U(x:m)$ est donné par les formules suivantes:

$\Omega(y)q^m$ si $v(y) > 0$,

0 si $v(y) < -m$,

$q^{m+v(y)}$ si $-m \leqslant v(y) < 0$,

$q^m 2^{-1}[1 + (-1)^{v(z)}]$ avec $z = N(y) - 1$ si $v(y) = 0$.

Il reste a traduire ces formules en termes de la variable x. On arrive ainsi au résultat suivant:

PROPOSITION:
(*i*) $U(x:m) = 0$ *à moins que la valuation* $v(x)$ *de* x *ne soit paire.*
(*ii*) *On suppose maintenant* $v(x)$ *paire. Alors* $U(x:m)$ *est donné par les formules suivantes:*

$q^m(-1)^{v(x)/2}$ *si* $v(x) > 0$;

q^m *si* $v(x) < 0$;

$q^m q^{-v(1-x)/2}$ *si* $v(x) = 0$, $v(1-x)$ *est impaire et* $v(1-x) \leqslant 2m$;

0 *si* $v(x) = 0$ *et* $v(1-x)$ *est impaire ou si* $v(x) = 0$ *et* $v(1-x) > 2m$.

(4.9) Soit f' une fonction sur $G(F)$ qui soit K'-invariante. On peut étendre cette fonction en une fonction sur $G(E)$ invariante sous K. On peut alors restreindre cette fonction à $G_1(F)$; ce n'est autre que l'image de f' par un isomorphisme privilégié de $G(F)$ sur $G_1(F)$. On notera encore f' l'extension et la restriction de cette extension. Soit g'_m l'image de g_m par l'homomorphisme (4.1.1). On calcule maintenant l'integrale orbitale $H(x:g'_m)$. Soit d'abord $f'_{a,i}$ la fonction caractéristique de l'ensemble:

$$K' \begin{vmatrix} \pi^{a+i} & 0 \\ 0 & \pi^i \end{vmatrix} K'.$$

On écrit simplement f'_a pour $f'_{a,0}$. On a d'abord la relation:

$$H(x:f'_{a,i}) = (-1)^i H(x:f'_a). \tag{4.9.1}$$

Comme $T(F)$ est contenu dans $Z(F)K'$ on a aussitôt:

$$H(x:f'_a) = \Omega(u) \sum_i (-1)^i f'_a \left[\pi^i \begin{vmatrix} 1 & u \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} \right] \quad \text{si } x = N(u).$$

Si $|x| < 1$ alors la matrice ci-dessus est dans K; cette expression est donc nulle à moins que $a = 0$, auquel cas elle est $(-1)^{v(x)/2}$. De même si $|x| > 1$ alors la matrice ci-dessus s'écrit:

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & u^\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^{-1} & 1 \\ 1 & u^{\sigma-1} \end{vmatrix}$$

La première matrice est dans $T(F)$ donc dans $Z(F)K$. La deuxième est dans K. La valeur de l'expression ci-dessus est donc nulle, à moins que $a = 0$ auquel cas elle est 1. On suppose enfin $|x| = 1$. Alors la matrice ci-dessus s'écrit:

$$\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 - N(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix}.$$

La première et la troisième matrices sont dans K. L'expression ci-dessus est donc nulle à moins que $a = v(1 - N(u))$, auquel cas elle a la valeur 1. En résumé, on a prouvé le lemme suivant:

(4.9.2) LEMME: *la fonction $H = H(x:f'_a)$ est donnée par les formules suivantes*:
(i) $H = 0$ *si la valuation de x est impaire*;
On suppose maintenant la valuation de x paire.
(ii) *si* $v(x) > 0$, $H = 0$ *à moins que* $a = 0$, *auquel cas* $H = (-1)^{v(x)/2}$;
(iii) *si* $v(x) < 0$, $H = 0$ *à moins que* $a = 0$, *auquel cas* $H = 1$;
(iv) $v(x) = 0$, $H = 0$ *à moins que* $a = v(1 - x)$ *auquel cas* $H = 1$.

Il faut maintenant calculer g'_m en termes des fonctions $f_{a,i}$. C'est un calcul classique que l'on laisse au lecteur (Cf. [L]).

(4.9.3) LEMME: *On a*:

$$g'_m = \sum_{0 \leqslant a \leqslant m} f'_{2a} + \sum_{0 \leqslant a \leqslant m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m-a} (-1)^i q^i (1 - q^{-1}) f'_{2a,i}.$$

En appliquant la relation (4.9.1) on obtient aussitôt

$$H(x:g'_m) = \sum_{0 \leqslant a \leqslant m} q^{m-a} H(x:f'_{2a}).$$

Si $v(x)$ est impaire $H(x:g'_m) = 0$ par définition. On suppose maintenant $v(x)$ paire. Si $v(x) > 0$ cette somme se réduit au terme $a = 0$ et a donc la valeur $q^m(-1)^{v(x)/2}$. Si $v(x) < 0$ la somme se réduit encore au terme $a = 0$ et prend la valeur q^m. Enfin si $v(x) = 0$ la somme se réduit au terme $a = v(1 - x)/2$. Elle est donc nulle à moins que $v(1 - x)$ ne soit paire et $v(1 - x) \leqslant 2m$. Sa valeur est alors $q^{m-v(1-x)/2}$.

En comparant avec la proposition (4.8) on obtient l'identité:

$$H(x:g'_m) = U(x:m)$$

C'est l'identité (4.2.4) pour la fonction g_m et la proposition (4.1) est donc établie.

§5. Intégrales des séries d'Eisenstein

(5.1) On prend maintenant pour F un corps de nombres et pour E une extension quadratique de F. On se donne un caractère ω du groupe des classes d'idèles de F. On le suppose trivial sur le sous-groupe des idèles de E dont les composantes finies sont 1 et dont les composantes infinies sont toutes égales et positives. Sauf mention exprès du contraire, on fait la même hypothèse sur tous les caractères du groupe des classes d'idèles de F ou E. On note ω' le relèvement de ω au corps E. On considère les intégrales des séries d'Eisenstein du groupe $G(E)$ dont on aura besoin pour la formule des traces relative. On considère une fonction ϕ sur $G(E_{\mathbb{A}})$ telle que:

$$\phi\left[\begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} g\right] = \chi(a)\chi'(b)|a|^{u+1/2}|b|^{u-1/2}, \tag{5.1.1}$$

où χ et χ' sont des caractères du groupe des classes d'idèles de E dont le produit est ω'. En dépit des notations adoptées, la fonction ϕ dépend de u. Elle est déterminée par sa restriction au sous-groupe compact maximal usuel K. En général on suppose cette restriction indépendante de u. On notera $\varrho(\chi, \chi', u)$ la représentation de $G(E_{\mathbb{A}})$ dans l'espace des fonctions se transformant comme ci-dessus. On écrit $f \cdot \phi$ au lieu de $\varrho(\chi, \chi', u)\,(f)\phi$ lorsque cela ne prète pas à confusion. On désigne par B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et on pose:

$$E(g, \phi, \chi, \chi', u) = \sum_{B(E)\backslash G(E)} \phi(\gamma g),$$

la somme étant définie par prolongement analytique.

(5.2) On aura besoin d'une formule pour la transformée de Mellin de E. Soit ψ un caractère non trivial du groupe des classes d'idèles de E. On pose:

$$W(g) = \int E\left[\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right] \psi(x)\, \mathrm{d}x.$$

On pose aussi, pour Ω un caractère du groupe des classes d'idèles de E:

$$L(\Omega^{-1}, \phi, \chi, \chi', u) = \int W\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] |a|^{s-1/2}\Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}^\times a\big|_{s=1/2}. \qquad (5.2.1)$$

De façon précise l'intégrale converge lorsque la partie réelle de s est assez grande et se prolonge en une fonction méromorphe de s, holomorphe au point 1/2. On intègre maintenant E sur l'ensemble des matrices diagonales diag $(a, 1)$ avec $c^{-1} < |a| < c$; l'intégrale est prise modulo les éléments rationels. La mesure de Haar est le produit des mesures de Tamagawa locales par le résidue au point 1 de la fonction $L(s, 1_E)$. D'ailleurs, vu le résultat que l'on a en vue (C.f. (5.6)), le choix de la mesure importe peu. On obtient la relation suivante:

$$\begin{aligned}
\int_{c^{-1}}^{c} E\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \phi, \chi, \chi', u\right]\Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}a &= L(\Omega^{-1}, \phi, \chi, \chi', u) \\
&+ \delta(\chi\Omega^{-1})c^{u+1/2}(u + 1/2)^{-1}\phi(e) \\
&+ \delta(\chi'\Omega^{-1})c^{-u+1/2}(-u + 1/2)^{-1}(M(u, \chi, \chi')\phi(e)) \\
&+ \delta(\chi'\Omega^{-1})c^{u+1/2}(u + 1/2)^{-1}\phi(w) \\
&+ \delta(\chi\Omega^{-1})c^{-u+1/2}(-u+1/2)^{-1}(M(u, \chi, \chi')\phi)\,(w) \\
&+ R(c, u, f.\phi) \qquad (5.2.2)
\end{aligned}$$

où l'on pose $\delta(\chi) = 1$ si χ n'est pas trivial, $\delta(\chi) = 0$ si χ est trivial, M désigne l'opérateur d'entrelacement et w la matrice:

$$w = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Le "reste" $R(c, u, \Phi)$ tend vers 0 lorsque c tend vers l'infini. Pour la démonstration voir [J] §8. Désormais on suppose que la restriction de Ω à F est ω.

On aura besoin d'estimées précise sur les quantités introduites:

(5.2.3) Lemme: *La fonction $L(\ldots, u)$ et ses dérivées sont à croissance lente sur la ligne $Re(u) = 0$.*

Démonstration: On peut supposer que la fonction ϕ est un produit de fonctions locales ϕ_v. Soit S un ensemble fini de places de E contenant toutes les places infinies et tel que, pour tout v non dans S, ϕ_v soit K_v-invariante et les caractères χ_v et χ'_v non ramifiés. Alors, aux places v non dans S, on peut écrire

$$\phi_v(g) = L(2u + 1, \chi_v\chi_v'^{-1})^{-1} \int \Phi_v[(0, 1)g]\, |t|^{2u+1}\chi_v\chi_v'^{-1}(t)\, \mathrm{d}^X t$$
$$\times\ \chi_v(\det g)\, |\det g|^{u+1/2}, \tag{5.2.4}$$

où Φ_v est la fonction caractéristique des entiers. Aux places v dans S on peut écrire

$$\phi_v(g) = \int \Phi_v[(0, 1)g]\, |t|^{2u+1}\chi_v\chi_v'^{-1}(t)\, \mathrm{d}^X t\ \chi_v\ (\det g)\, |\det g|^{u+1/2}, \tag{5.2.5}$$

où Φ_v est une fonction de Schwart–Bruhat telle que la fonction $\Phi_v[(0, 1)g]$ sur $SL(2, F_v)$ soit à support compact, modulo le groupe des matrices trigonales strictes supérieures. Cela étant, en notant Φ le produit des fonctions Φ_v on obtient pour $L(\ldots, u)$ l'expression

$$L(\Omega^{-1}, \phi, \chi, \chi', u) = L(2u + 1, \chi\chi'^{-1S})^{-1}$$
$$\times \iint \Phi'(a, b)\Omega^{-1}\chi(a)|a|^{u+1/2}\, \mathrm{d}a\ \Omega^{-1}\chi'(b)\, |b|^{-u+1/2}\, \mathrm{d}b, \tag{5.2.6}$$

où Φ' désigne une transformée de Fourier partielle de Φ. Le facteur L dans cette formule désigne le produit des facteurs $L(2u + 1, \chi_v\chi_v'^{-1})$ pour v non dans S. Sur la ligne $Re(u) = 0$ il est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, en fait à croissance logarithmique. Son inverse est à croissance lente; ses dérivées sont donc aussi à croissance lente. Le deuxième facteur est une intégrale de Tate sans pôle sur la même droite. Il est donc borné ainsi que toutes ses dérivées. D'où le lemme.

(5.2.8) LEMME: *Sur la droite $Reu = 0$ la fonction $R(c, u, \phi)$ et ses dérivées sont à croissance lente. De plus, lorsque c tend vers l'infini, la fonction et ses dérivées tendent vers* 0 *dans l'espace des fonctions à croissance lente.*

Démonstration: On utilise encore l'expression intégrale ci-dessus pour la fonction ϕ. On obtient alors pour $R(c, u, \phi)$ l'expression:

$$L(2u + 1, \chi\chi'^{-1S})^{-1} \int \left[\int \Phi'(ta, t^{-1})\chi\chi'^{-1}(t)\, |t|^{2u}\, \mathrm{d}t \right] \Omega^{-1}\chi(a)\, |a|^{u+1/2}\, \mathrm{d}^X a,$$

où l'intégrale extérieure porte sur les idèles de norme plus grande que c ou plus petite que c^{-1}. Soit $R_+(c, u)$ l'intégrale sur les a tels que $|a| > c$. Il existe une fonction de Schwartz–Bruhat $\phi \geqslant 0$ telle que:

$$\int |\Phi'|\, (ta, t^{-1})\, \mathrm{d}^X t \leqslant \phi(a)\, |a|^{-1}.$$

On obtient donc une majoration de $R_+(c, u)$ par l'intégrale

$$\int \phi(a)\, |a|^{1/2}\, d^X a, \quad |a| > c.$$

qui est à décroissance rapide pour c grand. On a donc bien la majoration cherchée pour $R_+(u, c)$. Pour $R_-(c, u)$ on a, après un changement de variables, la représentation intégrale suivante, où l'on intègre sur les a de norme plus grande que c:

$$L(2u + 1, \chi\chi'^{-1S})^{-1}$$

$$\times \int \left[\int \Phi'(t^{-1}, at)\chi'\chi^{-1}(t)\, |t|^{-2u}\, \mathrm{d}t \right] \chi^{-1}(a)\, |a|^{-u+1/2}\, \mathrm{d}^X a.$$

On obtient donc une estimée pour $R_-(c, u)$ et puis $R(c, u)$. Enfin on obtient des estimées analogues pour les dérivées de $R(c, u)$ en remplaçant les facteurs $|t|^{2u}$ et $|a|^u$ par leurs dérivées.

(5.2.9) LEMME: *Sur la droite $Re(u) = 0$ la fonction*:

$$\int_{c^{-1}}^{c} E\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \; f\cdot\phi, \chi, \chi', u\right] \mathrm{d}a$$

et toutes ses dévivées sont à décroissance rapide. La fonction $M(u, \chi, \chi')\phi(e)$ et ses dérivées sont à croissance lente.

Démonstration: On peut écrire

$$f\cdot\phi = \sum_i m_i(u)\phi_i$$

où les fonctions m_i sont à décroissance rapide. On voit donc que pour la première assertion il suffit de démontrer que l'intégrale obtenue en remplaçant $f\cdot\phi$ par ϕ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. En revenant à l'expression (5.2.2) et en utilisant les lemmes précédents on voit qu'il suffit de vérifier que $M(u, \chi, \chi')\phi(e)$ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées sur la ligne $Re(u) = 0$. A cet effet on écrit:

$$M(u, \chi, \chi')\phi(e) = L(2u, \chi\chi'^{-1})L(2u + 1, \chi\chi'^{-1})^{-1} \Pi_v R(u, \chi_v, \chi_v')\phi_v(e)$$

où $R(u, \chi_v, \chi_v')$ est l'opérateur d'entrelacement normalisé. Dans le produit infini presque tous les facteurs sont 1. De plus si v est une place finie le facteur correspondent est une fraction rationnelle en q_v^{-u}. Si v est une place infinie le facteur correspondant est une fraction rationelle en u. En utilisant l'équation fonctionelle des fonctions L le rapport, à un facteur exponentiel près, peut s'écrire sous la forme:

$$L(1 - 2u, \chi'\chi_S^{-1})L(1 + 2u, \chi\chi_S'^{-1})^{-1}$$

$$\times L(1 - 2u, \chi'\chi^{-1S})L(1 + 2u, \chi\chi'^{-1S})^{-1},$$

où S désigne maintenant l'ensemble des places à l'infini et le premier facteur est le produit des facteurs L locaux pour toutes les places dans S. Comme dans la démonstration du lemme (5.2.3) le deuxième rapport et ses dérivées croissent lentement. Le premier rapport est de valeur absolue 1; d'autre part d'après les propriétés classiques de la fonction gamma le quotient d'une dérivée de la fonction $L(1 + 2u, \ldots_S)$ par elle même est à croissance lente. Il en résulte que toutes les dérivées du premier quotient sont à croissance lente. D'où la conclusion.

On aura aussi besoin du résultat suivant:

LEMME (5.2.10): *On suppose que χ est le relèvement d'un caractère de F et que la restriction de χ à F est égale à $\omega\eta$. Alors la fonction $L(\Omega^{-1}, f \cdot \phi, \chi, \chi', u)$ est nulle en* 0.

Démonstration: Sous les hypothèses du lemme on a $\chi = \chi'$. Comme plus haut, en désignant par S l'ensemble des places infinies, on a:

$$L(\Omega^{-1}, \phi, \chi, \chi', u) = L(2u + 1, 1^S)^{-1}$$

$$\times \iint \Phi'(a, b)\Omega^{-1}(a)\chi(a)\,|a|^{u+1/2}\,\mathrm{d}a\,\Omega^{-1}(b)\chi'(b)\,|b|^{-u+1/2}\,\mathrm{d}b.$$

Le premier facteur a bien un zéro au point 0 et les deux autres n'ont pas de pôle. Le lemme s'en suit.

(5.3) Soit encore χ un caractère du groupe des classes d'idèles de E et χ' le caractère $\omega'\chi^{-1}$. Si ϕ est comme plus haut on posera: (5.3.1)

$$I(\phi, \chi, \chi', u) = \int \phi(g)\eta\omega^{-1}(\det g)\,\mathrm{d}g,\ g \in Z(F_{\mathbf{A}})T(F)\backslash G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}}).$$

Pour calculer l'intégrale on peut intégrer d'abord sur le tore T. L'intégrale sur le tore se réduit à l'intégrale de $\chi(a/a^\sigma)$ sur le quotient de $E_{\mathbf{A}}^X$ par le produit $E^X F_{\mathbf{A}}^X$. Elle est donc nulle à moins que χ ne soit invariant par la conjugaison de E par rapport à F. Sous cette hypothèse elle est égale au volume de ce quotient et l'intégrale totale égale à:

$$I(\phi, \chi, \chi', u) = \int \phi(g)\,\eta\omega^{-1}(\det g)\,\mathrm{d}g\ \mathrm{vol}\,(E_{\mathbf{A}}^X/F_{\mathbf{A}}^X E^X),$$

$$g \in Z(F_{\mathbf{A}})T(F_{\mathbf{A}})\backslash G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}}). \tag{5.3.2}$$

LEMME (5.3.3). *Si ε n'est pas une norme et la partie réelle de u est assez grande alors:*

$$\int_{Z(F_{\mathbf{A}})G_\varepsilon(F)\backslash G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}})} E(g, \phi, \chi, \chi'\ u)\,\mathrm{d}g = I(\phi, \chi, \chi', u).$$

Démonstration: en effet on a $G(E) = P(E)G_\varepsilon(F)$ et l'intersection de ces deux sous-groupes est $T(F)$. La série qui définit la série d'Eisenstein peut donc s'écrire:

$$E(g) = \sum \phi(\gamma g),\quad \gamma \in T(F)\backslash G_\varepsilon(F).$$

et l'assertion du lemme est donc immédiate.

Si ε est une norme l'intégrale ci-dessus diverge et l'on doit utiliser un opérateur de troncation. A cet effet on suppose $\varepsilon = 1$, on choisit un élément de E de trace nulle s et l'on pose:

$$m = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Alors on vérifie que $mG_1(F)m^{-1} = G(F)$. D'autre part d'après le lemme (2.2) on a:

$$G(E) = P(E)G_1(F) \cup P(E)mG_1(F).$$

On a donc aussi:

$$G(E) = P(E)G_1(F) \cup P(E)G(F)m$$

Si f est une fonction sur $G(E)\backslash G(E_{\mathbf{A}})$ la fonction tronquée "à la hauteur c" est la fonction $T^c f$ sur $G_1(F)\backslash G_1(F_{\mathbf{A}})$ donnée par la somme:

$$T^c f(g) = f(g) - \Sigma f_{\mathrm{N}}(\gamma mg) H_c(\gamma mgm^{-1}), \quad \gamma \in P(F)\backslash G(F),$$

où f_N est le terme constant de f, c'est-à-dire l'intégrale:

$$f_N(g) = \int f\left[\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g\right] \mathrm{d}x,\ x \in E_{\mathbf{A}}/E.$$

et l'on a posé:

$$H(g) = |ab^{-1}|_E \quad \text{si} \quad g = \begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} k \quad \text{avec} \quad k \in K,$$

$$H_c(g) = H(g) \text{ si } H(g) \geqslant c, = 0 \text{ sinon.}$$

(5.3.4) LEMME: *On prend* $\varepsilon = 1$. *Alors, pour un choix convenable des mesures de Haar on a:*

$$\int T^c E(g, \phi, \chi, \chi', u)\, \eta\omega^{-1}(\det g)\, \mathrm{d}g = I(\phi, \chi, \chi', u)$$

$$+ \delta(\chi\omega^{-1}\eta) c^{2u}(2u)^{-1} \int \phi(km)\, \mathrm{d}k$$

$$- \delta(\chi'\omega^{-1}\eta) c^{-2u}(2u)^{-1} \int [M(u, \chi, \chi')\phi].(km)\, \mathrm{d}k.$$

Dans cette formule k est dans le sous-groupe compact maximal usuel K_F de $G(F_{\mathbf{A}})$; de plus le premier δ par exemple est 1 si la restriction de χ à F est égale à $\omega\eta^{-1}$, 0 sinon. Enfin $\mathrm{I} = 0$ à moins que χ ne soit un relèvement.

Démonstration: En combinant les séries qui définissent E et sa troncation on obtient l'expression:

$$T^c E = \sum_{T(F)\backslash G_1(F)} \phi(\gamma g)$$

$$+ \sum_{P(F)\backslash G(F)} [\phi(\gamma m g) - E_N(\gamma m g) H_c(\gamma m g m^{-1})].$$

On intègre maintenant cette expression contre $\eta\omega^{-1}$ sur le quotient de $G_1(F_{\mathbf{A}})$ par $Z(F_{\mathbf{A}})G_1(F)$. La première somme donne l'intégrale I. La deuxième devient l'intégrale:

$$\int_{P(E)Z(F_{\mathbf{A}})\backslash G(F_{\mathbf{A}})} [\phi(gm) - E_N(gm)H_c(g)]\eta\omega^{-1} (\det g)\, \mathrm{d}g,$$

ou encore:

$$\int \phi(gm)[1 - H_c(g)]\eta\omega^{-1} (\det g)\, \mathrm{d}g$$

$$- \int M(u, \chi, \chi')\phi(gm)H_c(g)\eta\omega^{-1} (\det g)\, \mathrm{d}g.$$

Les intégrales portemt sur $P(E)Z(F_{\mathbf{A}})\backslash N(F_{\mathbf{A}})$ où N est le groupe des matrices unipotentes supérieures. On arrive au résultat cherché en utilisant la décomposition d'Ivasawa.

(5.4) On aura besoin des propiétés analytiques des fonctions $I(\ldots u)$.

(5.4.1) LEMME: *On suppose que χ soit le relèvement d'un caractère de F. Alors $I(\ldots u)$ est holomorphe et à décroissance rapide dans la bande $0 \leqslant Re u \leqslant 1/2$, excepté pour un pôle simple en $u = 0$ et un pôle simple en $u = 1$ si la restriction de χ à F est égale à $\omega\eta$. Ses dérivées sont à croissance lente sur la droite $Re(u) = 1/2$.*

Démonstration: Si χ est le relèvement du caractère μ, alors la restriction de χ à F est le carré de μ. On utilise la même représentation intégrale que plus haut pour la fonction ϕ, mais on l'écrit sous la forme:

$$\phi(g) = L(2u + 1, \chi\chi'^{-1S})^{-1} \int \Phi\left[(0, 1)\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{\sigma} \end{vmatrix} g\right] \mu^2\omega^{-1}(tt^{\sigma})\, |tt^{\sigma}|_E^{u+1/2}$$

$$dt\, \chi(\det g)\, |\det g|_E^{u+1/2},$$

l'intégrale portant sur le tore T. En intégrant ceci sur le quotient $T(F_{\mathbf{A}})\backslash G_{\varepsilon}(F_{\mathbf{A}})$ on obtient une intégrale sur $G_{\varepsilon}(F_{\mathbf{A}})$:

$$L(2u + 1, \chi\chi'^{-1S})^{-1} \int \Phi[(0, 1)g]\mu^2\omega^{-1}\eta(\det g)\, |\det g|^{2u+1}\, dg.$$

La fonction L n'est pas nulle dans la bande en question. Son inverse est donc holomorphe et à croissance lente dans la bande. Le deuxième facteur est une intégrale de Tate pour l'algèbre à division dont G_{ε} est le groupe multiplicatif. D'après la thérie de ces intégrales, c'est le produit d'une fonction entière, de la fonction $L(2u + 1, \mu^2\omega^{-1}\eta)$ et de la fonction $L(2u, \mu^2\omega^{-1}\eta)$. D'autre part, dans le premier facteur, le caractère est le composé de $\mu^2\omega^{-1}$ et de la norme. Les propriétés d'holomorphie sont donc manifestes. Une intégrale de Tate est bornée à l'infini dans toute bande verticale. Ses dérivées sont de même à croissance lente dans toute bande verticale. Il est donc clair que la fonction est à croissance lente dans la bande. On passe au comportement sur la droite $Reu = 1/2$. Comme $L(2u + 1, \mu^2\omega^{-1}\eta^S)$ est défini par un produit convergent (ou une série de Dirichlet convergente) ses dérivées sont bornées sur la droite en question. On en conclut que les dérivées du produit sont à croissance lente. D'ou la conclusion.

(5.4.2) LEMME: *On suppose que le caractère χ est un relèvement et que sa restriction à F est ω. On désigne par z^* l'imaginaire conjugé du nombre complexe z. Alors le produit*

$$M(u, \chi, \chi')f.\phi(e)I(\phi, \chi, \chi', -u^*)^*$$

est holomorphe et à décroissance rapide dans la bande $0 \leqslant Reu \leqslant 1/2$. Ses dérivées sont à décroissance rapide sur la droite $Reu = 1/2$.

Démonstration: Par hypothèse on a $\chi = \chi'$. Par linéarite on peut supposer que l'on est dans la situation suivante: la fonction ϕ est le produit de fonctions locales ϕ_v et S est un ensemble fini de places de E. Pour v non dans

S la fonction ϕ_v se transforme sous K_v selon le caractère χ_v (det $k)^{-1}$. Pour v dans S on a:

$$\int_{K_v} \phi_v(gk)\chi_v(\det k)^{-1}\, \mathrm{d}k = 0$$

On remarquera que S peut ne pas contenir certaines des places archimédiennes. On a alors une représentation intégrale analogue à celle que l'on a utilisé jusqu'ici. En particulier la quantité en question s'écrit:

$$L(2u, 1)L(2u + 1, 1)^{-1}R(u, \chi, \chi')f.\phi(e)L(-2u + 1, 1^S)^{-1}$$

$$\times \int \Phi^*[(0, 1)g]\eta\ (\det g)\ |\det g|^{1-2u}\, \mathrm{d}g.$$

La dernière intégrale est une intégrale de Tate sur le groupe G_ε. On écrit $L(2u, 1) = L(1 - 2u, 1)$, à un facteur exponentiel près. On obtient ainsi l'expression sous la forme d'un produit de facteurs:

$$L(2u + 1, 1^S)^{-1}\,[\Pi_{v\in S}L(1 - 2u, 1_v)L(1 + 2u, 1_v)^{-1}f_v . R(u, \chi_v, \chi_v')\phi_v(e)]$$

$$\times \int \Phi^*[(0, 1)g]\eta\ (\det g)\ |\det g|^{-2u+1}\, \mathrm{d}g.$$

Cette formule donne déjà l'holomorphie. En effet le dernier facteur est un multiple holomorphe de $L(1 - 2u, \eta)L(-2u, \eta)$ donc est holomorphe. Le premier facteur et l'opérateur d'entrelacement normalisé sont holomorphes dans la bande en question. Le facteur $L(-2u + 1, 1_v)$ où v est dans S archimédien a un pôle au point $1/2$; toutefois d'après nos conventions $R(u, \chi, \chi')\phi_v = 0$ au point $1/2$. Donc le pôle du facteur $L(-2u + 1, 1_v)$ est compensé par un zéro. Un argument analogue s'applique aux pôles du facteur $L(-2u + 1, 1_v)$ pour v finie dans S. Pour obtenir l'estimée requise on peut encore changer S comme suit: on agrandit S en y ajoutant toutes les places à l'infini. Alors le premier facteur est à croissance lente dans la bande; ses dérivées sont à croissance lente sur la ligne $Reu = 1/2$. le dernier facteur est borné ainsi que toutes ses dérivées dans la bande. Le facteur contenant l'opérateur d'entrelacement est à décroissance rapide pour v archimédien. D'après les propriétés de la fonction gamma le facteur correspondant à une place archimédienne v dans S est à croissance lente dans la bande ainsi que toutes ses dérivées. Enfin les facteurs restants sont des fonctions rationnelles de q_v^{-s} sans pôle dans la bande. Notre assertion s'en suit.

(5.5) On considère maintenant le noyau K_{eis}. On rappelle que z^* désigne l'imaginaire conjugué de z complexe. On a:

$$K_{eis}(g, h) = 1/4i\pi \sum_{\chi, \phi} \int E(g, f, \phi, \chi, \chi' u) . E(h, \chi, \chi', u)^* \, \mathrm{d}u;$$

la somme porte sur tous les caractères χ et, pour chaque χ, sur une base orthonormale de l'espace de la représentation $\varrho(\chi, \chi', u)$, regardée comme agissant sur un espace de fonction sur K. On a écrit et on écrira souvent dans la suite $f \cdot \phi$ pour l'action de f sur ϕ dans la représentation $\varrho(\chi, \chi', u)$.

On choisit $C > 0$ et $c > 0$ et on applique au noyau l'opérateur de troncation par rapport à la deuxième variable "à la hauteur c". Il est clair que l'on peut échanger l'intégration et la troncation. On considère l'intégrale suivante:

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int T_2^c K_{\mathrm{eis}} \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h \right] \Omega^{-1} (a) \eta\omega(\det h) \, \mathrm{d}h \mathrm{d}^X a. \tag{5.5.1}$$

L'intégrale en h est sur le quotient $G_\varepsilon(F)Z(F_{\mathbf{A}})\backslash G_e(F_{\mathbf{A}})$; l'intégrale en a porte sur les éléments a du groupe des classes d'idèles de E tels que $C^{-1} < |a| < C$. On supposera que ε est une norme et même que $\varepsilon = 1$. On indiquera au passage les modifications à faire si ε n'est pas une norme.

(5.5.2) Lemme: *Il existe un polynome $P(t)$ tel que $|T^c E(h, \phi, \chi, \chi', it)| \leqslant P(t)$ pour tout t et tout h. D'autre part étant donné f, χ, un sous-ensemble compact M et un entier N il existe une constante C telle que $|E(h, f, \phi, \chi, \chi', it)| \leqslant C|t|^{-N}$ pour h dans M.*

Démonstration: la deuxième assertion est standard. La première est le lemme (8.2.1) de [J–L].

Le lemme montre que l'intégrale (5.5.1) est en fait égale à une somme finie d'intégrales:

$$\int \left[\int_{C^{-1}}^{C} E \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, f . \phi, \chi, \chi', u \right] \Omega^{-1} (a) \, \mathrm{d}^X a \right.$$

$$\left. \times \int T^c E(h, \phi, \chi, \chi', u)^* \, \eta\omega \, (\det h) \, \mathrm{d}h \right] \mathrm{d}u.$$

D'après (5.3.4) en posant:

$$\int_{C^{-1}}^{C} E\left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, f.\phi, \chi, \chi', u\right) \Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}^X a \;=\; J(C, u),$$

on peut écrire ceci sous la forme:

$$\begin{aligned}&\int J(C, u) I(\phi, \chi, \chi', u)^*\, \mathrm{d}u \\ &\quad + \delta(\chi\omega^{-1}\eta) \int c^{-2u}(-2u)^{-1} J(C, u) \int \phi\,(km)\, \mathrm{d}k^*\, \mathrm{d}u \\ &\quad - \delta(\chi'\omega^{-1}\eta) \int c^{2u}(-2u)^{-1} J(C, u) \int M(u, \chi, \chi')\phi(km)\, \mathrm{d}k^*\, \mathrm{d}u. \qquad (5.5.3)\end{aligned}$$

Le premier terme est nul à moins que χ ne soit un relèvement. Les deux derniers sont nuls à moins que la restriction de χ à F ne soit $\omega\eta$. D'autre part, d'après le lemme (5.2.9) $J(C, u)$ et ses dérivées décroissent rapidement sur la ligne $Reu = 0$. Les deux dernières intégrales sont donc des intégrales oscillantes avec une limite losrque c tend vers l'infini, à savoir:

$$i\pi/2 \int_{C^{-1}}^{C} E\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, f.\phi, \chi, \chi', 0\right] \Omega^{-1}\,(a)\, \mathrm{d}^X a \int \phi(km)\, \mathrm{d}k^*,$$

$$\begin{aligned}&i\pi/2 \int_{C^{-1}}^{C} E\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, f.\phi, \chi, \chi', 0\right] \Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}^X a \\ &\quad \times \int M(0, \phi, \chi, \chi')\phi(km)\, \mathrm{d}k^*.\end{aligned}$$

On suppose d'abord que χ est le relèvement à E d'un caractère μ de F. Comme la restriction de χ à F est μ^2 on doit avoir $\mu^2 = \omega\eta$. Il en résulte que χ' est égale à χ. D'après un résultat bien connu on alors $M(0, \chi, \chi') = -1$ et les termes précédents se détruisent. On suppose maintenant que χ n'est pas un relèvement. On utilise maintenant l'expression (5.2.4) pour le calcul des intégrales ci-dessus. Les termes $\delta(\chi\Omega^{-1})$ et $\delta(\chi'\Omega^{-1})$ sont nuls car la restriction de Ω à F est ω tandis que la restriction de χ et χ' à F est $\omega\eta$. Le terme $R(C, u, f, \phi)$ tend vers 0 lorsque C tend vers l'infini. On obtient donc finalement la contribution suivante pour la double limite des deux derniers termes de (5.5.3):

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\phi,\chi} L(\Omega^{-1}, f.\phi, \chi, \chi', 0)\,(i\pi/2) \\ &\quad \times \left[\int \phi[km]\, \mathrm{d}k^* + \int [M(0, \chi, \chi')\phi]\,(km)\, \mathrm{d}k^*\right]. \qquad (5.5.4)\end{aligned}$$

La somme porte sur tous les χ dont la restriction à F est $\omega\eta$ et qui ne sont pas des relèvements. Ces termes ne sont pas présents si ε n'est pas une norme.

On examine maintenant le premier terme de (5.5.3). On remplace l'intégrale en a par son expression tirée de (5.2.2). On obtient les termes suivants:

$$\int L(\chi^{-1}f.\phi, \chi, \chi', u)I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u$$

$$+ \delta(\chi\Omega^{-1}) \int C^{u+1/2}(u + 1/2)^{-1}f.\phi(e)I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u$$

$$+ \delta(\chi'\Omega^{-1}) \int C^{-u+1/2}(-u + 1/2)^{-1}f.M(u, \chi, \chi')\phi(e)\, I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u$$

$$+ \delta(\chi'\Omega^{-1}) \int C^{u+1/2}(u + 1/2)^{-1}f.\phi(e)\, I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u$$

$$+ \delta(\chi\Omega^{-1}) \int C^{-u+1/2}(-u + 1/2)^{-1}f.M(u, \chi, \chi')\phi(w)\, I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u$$

$$+ \int R(C, u, f.\phi)\, I(\phi, \chi, \chi', u)^* \,\mathrm{d}u.$$

Chaque terme est nul à moins que χ ne soit un relèvement. On peut donc supposer que tel est le cas. Si de plus la restriction de χ à F est le caractère $\omega\eta$ alors I a un pôle point $u = 0$ (lemme (5.4.1)); les intégrales ci-dessus sont alors impropres. Lorsque C tend vers l'infini, le dernier terme tend vers 0 comme il résulte du lemme (5.2.8). On examine maintenant la limite lorsque C tend vers l'infini des intégrales 2 à 5. Elles sont nulles à moins que $\chi = \chi' = \Omega$. Comme la restriction de Ω à F est ω, celle de χ est aussi ω et en particulier différente de $\omega\eta$. D'après le lemme (5.4.1) la fonction $f.\phi(e)I(\phi, \chi, \chi', -u^*)^*$ est holomorphe dans la bande $-1/2 \leqslant Re u \leqslant 0$, à décroissance rapide; ses dérivées sont à décroissance rapide sur la droite $Re u = -1/2$. On peut donc déformer le contour d'intégration et écrire l'intégrale 2 sous la forme:

$$\int C^{v}v^{-1}f.\phi(e)\, I(\phi, \chi, \chi', \tfrac{1}{2} - v^*)^* \,\mathrm{d}v,$$

l'intégrale étant étendue à l'axe imaginaire, excepté que l'arc de $-i\varepsilon$ à $i\varepsilon$ est remplacé par le demi-cercle passant par $-i\varepsilon$, ε, $i\varepsilon$; en faisant tendre ε vers 0 on voit que l'expression ci-dessus est égale à l'intégrale (impropre) sur tout l'axe imaginaire plus $i\pi$ fois la valeur de l'intégrande au point $v = 0$. En faisant maintenant tendre C vers l'infini on obtient finalement:

$$2i\pi f\,.\,\phi(e)\; I(\phi,\,\Omega,\,\Omega,\,1/2)^*.$$

On procède de même avec l'intégrale 4 et on obtient un résultat analogue. Pour les integrales 3 et 5, on procède comme plus haut excepté que le contour d'intégration devient la droite $Reu = 1/2$ convenablement déformée et on utilise le lemme (5.4.2). Au total on obtient l'expression suivante pour la double limite du premier terme de (5.5.3):

$$\begin{aligned}&\int L(\Omega^{-1}, f.\phi,\chi,\chi',u)\; I(\phi,\chi,\chi',u)^*\,\mathrm{d}u\\ &\quad+\{2i\pi[\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)\phi(e)+\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)\phi(w)]I(\phi,\Omega,\Omega,1/2)^*\\ &\quad+2i\pi[\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)M(1/2,\Omega,\Omega)\phi(e)\\ &\quad+\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)M(1/2,\Omega,\Omega)\phi(w)]\}\; I(\phi,\Omega,\Omega,-1/2)^*,\end{aligned}$$

les deux derniers termes n'étant présents que si Ω est un relèvement. En résumé, on a la formule suivante:

PROPOSITION: *On considère l'intégrale (sans T_2^c si ε n'est pas dans N_0)*

$$\int_{C^{-1}}^{C} T_2^c E_{\text{eis}}\left(\begin{vmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}, h\right)\eta\omega\,(\det h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}^X a.$$

La double limite où c puis C tend vers l'infini existe. Elle est égale à $4i\pi^{-1}$ fois:

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi,\phi}\int L(\Omega^{-1}, f.\phi,\chi,\chi',u)\; I(\phi,\chi,\chi',u)^*\,\mathrm{d}u\\ &\quad+\sum_{\phi}2i\pi\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)\phi(e)\; I(\phi,\Omega,\Omega,1/2)^*\\ &\quad+\sum_{\phi}2i\pi\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)\phi(w)\; I(\phi,\Omega,\Omega,1/2)^*\\ &\quad+\sum_{\phi}2i\pi\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)M(1/2,\Omega,\Omega)\phi(e)\; I(\phi,\Omega,\Omega,-1/2)^*\\ &\quad+\sum_{\phi}2i\pi\varrho(\Omega,\Omega,-1/2)(f)M(1/2,\Omega,\Omega)\phi(w)\; I(\phi,\Omega,\Omega,-1/2)^*\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\chi, \phi} L(\Omega^{-1}, f.\phi, \chi, \chi', 0)\, (i\pi/2)$$

$$\times \left[\int \phi[km]\, \mathrm{d}k^* + \int [M(0, \chi, \chi')\phi]\, (km)\, \mathrm{d}k^* \right]$$

La première somme porte sur tous les χ qui sont des relèvements. Les termes suivants sont nuls à moins que Ω ne soit le relèvement d'un caractère de F. La dernière somme porte sur tous les caractères χ qui ne sont pas des relèvements et dont la restriction à F est $\omega\eta$. Ell est nulle si ε n'est pas une norme.

(5.6) Pour l'application que l'on a en vue, on peut reformuler cette identité comme suit. Dans la première intégrale le facteur I peut avoir un pôle au point $u = 0$ si la restriction de χ à F est $\omega\eta$. Toutefois d'après le lemme (5.2.8) le premier facteur a alors un zéro. Cette intégrale est donc toujours une intégrale ordinaire. Soit S un ensemble fini de places de E contenant toutes les places à l'infini; si ε n'est pas une norme on suppose que S contienne toutes les places où ε n'est pas une norme ainsi que toutes les places où ε n'est pas une unité. Pour v non dans S on prend pour f_v une fonction K_v invariante. On écrit f^S (resp. f_S) pour le produit des f_v, v non dans S (resp. dans S). Alors la transformée de Satake $f^{\hat{S}}(\chi, \chi', u)$ est définie par la formule:

$$f^{\hat{S}}(\chi, \chi', u)\phi = \varrho(\chi, \chi', u)\,(f^S)\phi,$$

si ϕ est K^S-invariante. Alors l'expression précédente a la forme:

$$\sum \int L(\Omega^{-1}, f_S, \phi, \chi, \chi', u)\, I(\phi, \chi, \chi', u)^*\, f^{\hat{S}}\,(\chi, \chi', u)\, \mathrm{d}u$$

$$+ \sum_{X} A(f_S, \phi, \chi) f^{\hat{S}}\,(\chi, \chi', 0) + B(f_S, \phi, \Omega) f^{\hat{S}}(\Omega, \Omega, 1/2),$$

où A et B dépendent linéairement de leur premier argument. De plus les caractères qui apparaissent dans les sommes sont les caractères non ramifiés en dehors de S. La première somme porte sur tous les caractères χ qui sont des relèvements, la deuxième sur tous les caractères qui ne sont pas des relèvements et dont la restriction à F est $\omega\eta$. De plus la deuxième somme est nulle si ε n'est pas une norme. Enfin le dernier terme est nul à moins que Ω ne soit un relèvement.

(5.7) On étudie maintenant l'intégrale de la proposition (5.6) pour le noyau spécial. Celui-ci est donné par la somme:

$$K_{\text{spe}}(x, y) \;=\; 1/\text{vol} \sum_{\chi} \int f(g)\chi(\det g)\, dg\; \chi(x)\chi(y)^*,$$

la somme portant sur tous les caractères χ dont le carré est ω'. On suppose d'abord $\varepsilon = 1$. L'intégrale en question s'écrit:

$$\int_{C^{-1}}^{C} T_2^c K_{\text{spe}}\left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right) \eta\omega\,(\det h)\; dh\Omega^{-1}(a)\; d^X a.$$

L'intégrale en a est nulle à moins que χ ne soit égal à Ω. L'intégrale en h donne une différence:

$$\int_{Z(F_{\mathbf{A}})G_1(F)\backslash G_1(F_{\mathbf{A}})} \chi^*(g)\omega\eta\,(\det g)\, dg \;-\; \int_{Z(F_{\mathbf{A}})P(F)\backslash G(F_{\mathbf{A}})} \chi^*\omega\eta(\det gm)\; H_c(gm)\; dg.$$

Les deux intégrales sont nulles à moins que la restriction de χ à F ne soit égale à $\eta\omega$. On en conclut que l'intégrale totale est nulle. On a une conclusion analogue pour le cas où ε n'est pas une norme. D'où:

PROPOSITION: *Si $\varepsilon = 1$ alors l'intégrale*

$$\int_{C^{-1}}^{C} T_2^c\, E_{\text{spe}}\left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right) \eta\omega\,(\det h)\; dh\Omega^{-1}(a)\; d^X a.$$

est convergente et nulle. Si ε n'est pas une norme l'intégrale

$$\int_{C^{-1}}^{C} E_{\text{spe}}\left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right) \eta\omega\,(\det h)\; dh\Omega^{-1}(a)\; d^X a.$$

est convergente et nulle.

§6. Intégration du noyau K

(6.1) On garde les notations du §5. On pose

$$K(x, y) \;=\; \Sigma f(x^{-1}\xi y), \quad \xi \in G(E)/Z(E).$$

Si $\varepsilon = 1$ on étudie l'intégrale

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int T_2^c K \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h \right] \eta\omega \text{ (det } h)\Omega^{-1}(a) \text{ d}h \text{ d}a,$$

$$a \in E_{\mathbf{A}}^{X}/E^{X}, \quad h \in Z(F_{\mathbf{A}})G_1(F)\backslash G_1(F_{\mathbf{A}}). \tag{6.1.1}$$

Si ε n'est pas une norme on étudie l'intégrale

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int K \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h \right] \eta\omega \text{ (det } h)\Omega^{-1} (a) \text{ d}h \text{ d}a,$$

$$a \in E_{\mathbf{A}}^{X}/E^{X}, \quad h \in Z(F_{\mathbf{A}})G_\varepsilon(F)\backslash G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}}). \tag{6.1.2}$$

(6.2) On va d'abord montrer que l'opérateur de troncation dans (6.1.1) est superflu. A cet effet on pose:

$$S^c\phi(g) \;=\; (T^c - 1)\phi(g) = \sum \phi_N(\gamma m g)H_c(\gamma m g m^{-1}).$$

On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION: *Etant donnés f et $C > 0$, il existe $D > 0$ tel que les relations $c > D$ et $C^{-1} < |a| < C$ entrainent*

$$S_2^c K \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h \right] = 0.$$

Démonstration: On utilise sans démonstration le lemme suivant:

(6.2.1) LEMME: *Soit U un sous ensemble compact de $SL(2, F_{\mathbf{A}})$. Alors il existe $D > 0$ tel que les relations*

$$g \in U, \quad \gamma \in SL(2, F) \text{ et } H(\gamma g) > D$$

entrainent que γ soit triangulaire.

Cela étant le terme constant de K par rapport à la seconde variable s'écrit:

$$K_{2N} \left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, y \right] = \int_{N(E_{\mathbf{A}})} \sum_{\gamma \in Z(E)\backslash G(E)/N(E)} f \left[\begin{vmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \gamma n y \right] \text{d}n.$$

Il vient donc:

$$S_2^c K\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}, g\right]$$

$$= \sum_{\theta \in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(E_{\mathbf{A}})} \sum_{\gamma} f\left[\begin{vmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \gamma n \theta m g\right] H_c(\theta m g m^{-1})\, \mathrm{d}n.$$

Dans cette expression on peut supposer que a est dans un ensemble compact. Sous cette hypothèse si l'intégrande n'est pas nul alors $h = \gamma n \theta m g m^{-1}$ est dans un ensemble compact modulo le centre et $H(\gamma^{-1} h) > c$. D'après le lemme on a donc $\gamma \in P(E)$ si c est assez grand. Ainsi l'expression précédente, pour c assez grand, se réduit à:

$$\sum_{\theta \in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(E_{\mathbf{A}})} \sum_{\alpha} f\left[\begin{vmatrix} \alpha a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n \theta m g\right] H_c(\theta m g m^{-1})\, \mathrm{d}n.$$

On écrit maintenant:

$$\theta m g m^{-1} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n' k, \ |b| \geqslant c, \quad k \in K.$$

Il vient pour l'expression précédente:

$$\sum_{\theta} \int \sum_{\alpha} f\left[\begin{vmatrix} a^{-1}\alpha b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n k m\right] \mathrm{d}n\, |b|.$$

Si cette expression n'est pas nulle alors $|\alpha a^{-1} b| = |a^{-1} b|$ est dans un compact de $\mathbf{R}^{\times}$. Il en est donc de même de $|b|$. Cette expression est donc nulle si c est assez grand. D'où la conclusion.

(6.3) On est maintenant ramené dans tous les cas à considérer l'intégrale (6.1.2). On va en prouver la convergence. Pour cela on écrit K comme somme de K_{reg} et K_{sin} avec:

$$K_{\mathrm{reg}}(x, y) = \sum f(x^{-1} \xi y), \quad \xi \text{ régulier}, \tag{6.3.1}$$

$$K_{\mathrm{sin}}(x, y) = \sum f(x^{-1} \xi y), \ \xi \text{ singulier}. \tag{6.3.2}$$

Dans cette section on étudie l'intégrale de K_{reg}. Tout élément régulier peut s'écrire:

$$\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n(\xi)\mu, \quad n(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

avec

$$\alpha \in E^X, \quad \mu \in G_\varepsilon(F)/Z(F), \quad N(\xi) \neq 0, \varepsilon.$$

De plus α, μ et $N(\xi)$ sont uniquement déterminés. Il en résulte aussitôt que:

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int K_{\text{reg}}\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right] \eta\omega\,(\det h)\; \mathrm{d}h\Omega^{-1}(a)\; \mathrm{d}a$$

$$= \sum_{N(\xi)} \int_{C^{-1}}^{C} \int f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n(\xi)\, h\right] \eta\omega(\det h)\; \mathrm{d}h\Omega(a)\; \mathrm{d}a, \tag{6.3.3}$$

où dans le membre de droite a est dans $E_{\mathbf{A}}^X$, h dans $G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}})$ et la somme porte sur la norme de ξ, supposée différente de 0 et ε. Le support de la fonction f est contenue dans un ensemble compact modulo le centre; l'image de cet ensemble par l'application $P(g) = gg^{-i}$ associé à G_ε est donc contenue dans une réunion

$$\bigcup \begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix} M, \quad N(u) = 1,$$

où M est compact. Si l'intégrande du membre de droite de (6.3.3) n'est pas nul alors l'image de la matrice intérieure par P est dans l'ensemble précédent, ce qui donne:

$$\begin{vmatrix} a^{-1}u & \xi u \\ -\varepsilon^{-1}\xi^\sigma a^{\sigma-1}u & (1 - \varepsilon^{-1}N(\xi))a^\sigma u \end{vmatrix} \in M,$$

pour au moins un u de norme 1. L'élément ξu est dans un compact des adèles. Il en est donc de même de sa norme $N(\xi)$ laquelle ne prend ainsi qu'un nombre fini de valeurs. D'après le choix de ξ, il en va de même de ξ. Donc u est dans un compact des adèles. Puisque le quotient $N_1(F_{\mathbf{A}})/N_1(F)$

est compact u est donc en fait dans un ensemble compact de $N_1(F_{\mathbf{A}})$, ou encore un ensemble compact des idèles; donc a^{-1} est dans un compact des adèles. Puisque $1 - \varepsilon^{-1}N(\xi)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs a^σ est aussi dans un compact des adèles. Il en résulte que a est dans un compact des idéles; cela entraine que h est lui même dans un compact. Cela montre que le membre de droite de (6.3.3) converge et que sa valeur est indépendante de C, pourvu que C soit assez grand. De plus cette valeur n'est autre que la valeur de l'intégrale analogue sans restriction sur a. Une conclusion analogue s'applique au membre de gauche et l'égalité est vérifiée. On obtient donc:

$$\lim_{C\to\infty} \int_{C^{-1}}^{C} \int K_{\text{reg}}\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right] \eta\omega\,(\det h)\mathrm{d}h\ \Omega^{-1}(a)\ \mathrm{d}a$$

$$= \sum_{N(\xi)} \Omega(\xi) \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n(\xi)\ h\right] \eta\omega\,(\det h)\mathrm{d}h\ \Omega(a)\mathrm{d}a, \tag{6.3.4}$$

le facteur $\Omega(\xi)$ étant en fait égal à un.

On écrit maintenant les intégrales de (6.3.4) comme produit d'intégrales locales. Si v est une place de F inerte dans E et w l'unique place de E au-dessus de v, on pose:

$$U_v(x) = \Omega_v(u) \iint f_w\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h\right] \Omega_w(a)\eta_v\omega_v(\det h)\mathrm{d}h\ \mathrm{d}a$$

$$\text{si} \quad x = -\varepsilon^{-1}N(u)\,(1 - \varepsilon^{-1}N(u))^{-1} \text{ pour un } u \text{ au moins,}$$

$$= 0 \quad \text{sinon.} \tag{6.3.5}$$

Alors le facteur local à la place v dans l'expression (6.3.4) n'est autre que:

$$U_v(\mu), \quad \text{où} \quad \mu = -\varepsilon^{-1}N(\xi)(1 - \varepsilon^{-1}N(\xi))^{-1}. \tag{6.3.6}$$

On considère maintenant une place v qui se décompose en v_1 et v_2. On a donc des isomorphismes:

$$E_{v_1} \to F_v, \quad E_{v_2} \to F_v$$

et on note ξ_1 et ξ_2 les images de ξ dans F_v. Le groupe $G_{\varepsilon v}$ est ismorphe au groupe des couples (h_1, h_2) tels que

$$h_2 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} h_1 \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1},$$

$$h_1 \in GL(2, F_v).$$

Alors le facteur local à la place v dans l'expression (6.3.4) s'écrit:

$$\int f_{v_1}\left[\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h_1\right] \int f_{v_2}\left[\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h_2\right] \Omega_{v_1}(a_1)\,\Omega_{v_2}(a_2)\omega_v(\det h_1)$$

$$\mathrm{d}a_1\,\mathrm{d}a_2\,\mathrm{d}h_1\Omega_{v_1}(\xi_1)\,\Omega_{v_2}(\xi_2).$$

On introduit maintenant la fonction f_v sur $GL(2, F_v)$ définie par:

$$f_v(g) = \int f_{v_1}(gh_1)f_{v_2}(h_2)\omega_v(\det h_1)\mathrm{d}h_1. \tag{6.3.7}$$

Alors f_v se transforme selon l'inverse de ω_v sous le centre. On définit une fonction U_v sur le groupe multiplicatif de F_v par la formule:

$$U_v(x) = \Omega_{v_1}(x) \iint f_v\left[\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a_1)\Omega_{v_2}(a_2)\,\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2$$

si $x \neq 1$,

$$= 0 \quad \text{si} \quad x = 1. \tag{6.3.8.}$$

On voit sans peine que cette intégrale converge. Après un changement de variables, le facteur correspondant à la place v dans l'intégrale (6.3.4) devient:

$$\Omega_{v_2}(-\varepsilon)U_v(\mu), \quad \mu = -\varepsilon^{-1}\xi_1\xi_2(1 - \varepsilon^{-1}\xi_1\xi_2)^{-1}. \tag{6.3.9}$$

Au total on voit que l'intégrale de K_{reg} peut s'écrire:

$$\iint K_{\mathrm{reg}} \ldots = \sum_{\mu} \Pi_v\; U_v(\mu)\; \Pi\Omega_{v_2}(-\varepsilon); \tag{6.3.10}$$

le deuxième produit porte sur l'ensemble des places v décomposées dans E; pour une telle place on choisit, une fois pour toutes, une numérotation v_1, v_2 des places de E au-dessus de v; la somme porte sur tous les éléments μ de F^X de la forme

$$-\varepsilon^{-1}N(\xi)\,(1 - \varepsilon^{-1}N(\xi))^{-1}, \quad \text{avec} \quad N(\xi) \neq \varepsilon.$$

Si μ n'est pas de cette forme il existe au moins une place v inerte dans E telle que μ ne soit pas de la forme

$$-\varepsilon^{-1}N(u)(1 - \varepsilon^{-1}N(u))^{-1}, \quad \text{avec} \quad u \in F_v^\times .$$

Alors $U_v(\mu) = 0$. On peut donc regarder la somme dans (6.3.10) comme portant sur tous les $\mu \neq 0$ dans F.

(6.4) On passe aux termes singuliers. Si $\varepsilon = 1$, alors il y a quatre doubles classes singulières, celles de n_1, $n_1 r$, e, r, où l'on a posé:

$$r = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad n_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{6.4.1}$$

On note K_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, les noyaux correspondants. D'après le lemme (2.6) ils sont donnés par:

$$K_1 = \sum f\left[x^{-1}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 \gamma y\right], \quad \alpha \in E^\times, \quad \gamma \in G_1(F)/Z(F),$$

$$K_2 = \sum f\left[x^{-1}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 r \gamma y\right], \quad \alpha \in E^\times, \quad \gamma \in G_1(F)/Z(F),$$

$$K_3 = \sum f\left[x^{-1}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \gamma y\right], \quad \alpha \in E^\times/N_1(F), \quad \gamma \in G_1(F)/Z(F),$$

$$K_4 = \sum f\left[x^{-1}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} r \gamma y\right], \quad \alpha \in E^\times/F^\times, \quad \gamma \in G_1(F)/Z(F). \tag{6.4.2}$$

Si ε n'est pas une norme alors la seule classe singulière est celle de e et K_{sin} se réduit à K_3.

(6.5) On étudie l'intégrale de K_3. On obtient:

$$\iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h\right] \Omega(a)\, \eta\omega\ (\det h) \mathrm{d}a\ \mathrm{d}h, \tag{6.5.1}$$

où a est intégré sur l'ensemble des éléments de $E_{\mathbf{A}}^{\times}/N_1(F)$ satisfaisant l'inégalité $C^{-1} < |a| < C$. Comme dans (6.3) il existe un ensemble compact M de $GL(2, E_{\mathbf{A}})$ tel que si l'intégrande n'est pas nul alors

$$uP\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in M$$

pour un u de norme 1. Cela donne

$$\begin{vmatrix} au & 0 \\ 0 & a^{-\sigma}u \end{vmatrix} \in M.$$

Il en résulte que la norme de a est dans un compact et que a lui même est dans un sous-ensemble compact modulo $N_1(F_{\mathbf{A}})$. Comme $N_1(F_{\mathbf{A}})/N_1(F)$ est compact, on voit que a est en fait dans un ensemble compact. Il en résulte que l'intégrale converge et que sa valeur est indépendante de C, pourvu que C soit assez grand. Cette valeur est d'ailleurs celle de l'intégrale obtenue en intégrant sur le quotient $E_{\mathbf{A}}^{\times}/N_1(F)$ tout entier.

On intègre maintenant sur $N_1(F_{\mathbf{A}})/N_1(F)$ (variable b) puis sur $E_{\mathbf{A}}^{\times}/N_1(F_{\mathbf{A}})$. Il vient:

$$\int f\left[\begin{vmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h\right] \Omega(a)\Omega(b)\eta\omega\ (\det h)\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}a\ \mathrm{d}b.$$

Si on écrit $b = u^{1-\sigma}$ ceci devient:

$$\iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{\sigma} \end{vmatrix} h\right] \Omega(a)\Omega(b)\omega(N(u))\eta\omega(\det h)\ \mathrm{d}h.$$

Après une translation sur h on obtient comme facteur l'intégrale de Ω sur le quotient $N_1(F_{\mathbf{A}})/N_1(F)$. Ce facteur est donc nul, à moins que Ω ne soit trivial sur ce sous-groupe, c'est-à-dire soit le relèvement d'un caractère λ de F. S'il en est ainsi l'intégrale s'écrit:

$$\operatorname{vol}(N_1(F_{\mathbf{A}})/N_1(F)) \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h\right] \Omega(a)\eta\omega\,(\det h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a,$$

$$a \in E_{\mathbf{A}}^X/N_1(F_{\mathbf{A}}), \quad h \in G_1(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}}). \tag{6.5.2}$$

On relie maintenant cette intégrale aux fonctions U_v et f_v (Cf. (6.3.5), (6.3.7), (6.3.8)). Soit v une place de F inerte dans E et w la place de E correspondante. Alors on sait (Prop. (3.4)) que

$$\lim_{x \to 0,\, x \in -\varepsilon N_{0v}} U_v \lambda_v^{-1}(x) = \iint f_w\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h\right] \Omega_w(a)\eta_v\omega_v(\det h)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}h\,\lambda(-\varepsilon). \tag{6.5.3}$$

Dans l'intégrale de (6.5.2) le facteur correspondant à la place v a la même forme que ci-dessus excepté que l'intégrale porte sur le quotient E_v^X/N_{1v}; ce facteur est donc

$$\lim_{x \to 0,\, x \in -\varepsilon N_{0v}} U_v \lambda_v^{-1}(x) \operatorname{vol}(N_{1v})^{-1}\,\lambda(-\varepsilon). \tag{6.5.4}$$

Si v se décompose en v_1 et v_2 alors le facteur local correspondant à v dans (6.5.2) n'est autre que:

$$\iint f_{v_1}\left[\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h_1\right] f_{v_2}\left[\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} h_2\right] \Omega_{v_1}(a_1)\Omega_{v_2}(a_2)\omega_v(\det h_1)\,\mathrm{d}h_1, \tag{6.5.5}$$

l'intégrale portant sur le groupe des couples (a_1, a_2), modulo le sous-groupe des couples de la forme (b, b^{-1}). Aprés un changement de variables ceci peut s'écrire:

$$\int f_v(a)\lambda_v(a)\,\mathrm{d}a, \quad a \in A_v/Z_v.$$

où f_v est la fonction (6.3.7). En résumé:

PROPOSITION (6.4): *On a:*

$$\lim_{c \to \infty} \int_{C^{-1}}^{C} \int K_3 = \iint K_3.$$

Ces intégrales sont nulles à moins que Ω ne soit de la forme $\lambda \circ N$. S'il en ainsi la valeur de cette expression est le produit des quantités suivantes:
(i) vol $E_{\mathbf{A}}^{\times}/N_1(F_{\mathbf{A}})$;
(ii) *pour chaque place inerte v:*

$$\lim_{x \to 0, x \in -\varepsilon N_{0v}} U_v \lambda_v^{-1}(x) \operatorname{vol} (N_{1v})^{-1} \lambda(-\varepsilon);$$

(iii) *pour chaque place v décomposée:*

$$\int f_v(a)\lambda_v(a) \, \mathrm{d}a, \; a \in A_v/Z_v.$$

(6.6) On étudie maintenant l'intégrale de K_4. D'après le lemme (2.6) elle s'écrit

$$\iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} rh\right] \Omega(a)\eta\omega(\det h) \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}h,$$

$$a \in E_{\mathbf{A}}^{\times}/F^{\times}, \quad C^{-1} < |a| < C, \quad h \in G_1(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}}).$$

Comme plus haut il existe un ensemble compact M tel que si l'intégrande n'est pas nul alors

$$uP\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} rh\right] \in M,$$

où u est de norme 1. Cela s'écrit aussi:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^{1-\sigma}u \\ -u & 0 \end{vmatrix} \in M.$$

Il en résulte d'abord que u est dans un compact, puis que $a^{1-\sigma}$ est dans un compact. Ainsi a est de la forme btc où b est dans un compact, c dans le groupe des idèles de F de norme 1 et t dans un sous-groupe des idèles de F isomorphe au groupe des nombres réels > 0. Comme la valeur absolue de a est dans un ensemble compact il en va de même de t. Ainsi a est dans un compact et l'intégrale converge. D'après le lemme (2.6) on a:

$$r^{-1}\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} r \in G_1;$$

après un changement de variables on voit que l'intégrale admet:

$$\int \Omega(c)\eta\omega^{-1}(c)\,\mathrm{d}c \;=\; \int \eta(c)\,\mathrm{d}c$$

comme facteur. Comme ce facteur est nul on en conclut que l'intégrale est nulle. D'où:

PROPOSITION (6.6):

$$\lim_{c\to\infty} \int_{C^{-1}}^{C} \int K_4 \;=\; 0.$$

(6.7) On étudie maintenant les intégrales de K_1 et K_2. On rappèle que ces termes sont nuls à moins que ε ne soit une norme, donc $\varepsilon = 1$ avec les conventions faites. Elles s'écrivent:

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 h\right] \Omega(a)\,\omega\eta(\det h)\,\mathrm{d}h, \tag{6.7.1}$$

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int f\left[\begin{vmatrix} \dot{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 r h\right] \Omega(a)\omega\eta(\det h)\,\mathrm{d}h. \tag{6.7.2}$$

On étudie la première intégrale par exemple. On va voir qu'elle est convergente et a une limite lorsque C tend vers l'infini, égale à la valeur en $s = 0$ du prolongement analytique de l'intégrale:

$$\iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 h\right] |a|^{-s}\Omega(a)\omega\eta\;(\det h)\,\mathrm{d}h, \tag{6.7.3}$$

intégrale qui elle-même converge pour $Re s > 1$. A cet effet on introduit un caractère μ du groupe des classes d'idèles de E dont la restriction à F soit η et on pose:

$$f_1(g) \;=\; f(g)\,\mu\Omega(\det g).$$

Alors l'intégrale ci-dessus s'écrit:

$$\iint f_1\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 h\right] |a|^{-s}\mu^{-1}(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}h. \tag{6.7.4}$$

On introduit la fonction Φ définie par

$$\Phi(a^{-1}) = \int f_1\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 h\right] \mathrm{d}h. \tag{6.7.5}$$

Alors l'intégrale (6.7.4) s'écrit, après un changement de variables:

$$\int \Phi(a)\, |a|^s \mu(a)\, \mathrm{d}a. \tag{6.7.6}$$

On écrit la fonction Φ comme un produit portant sur toutes les places de F. Soit v une place inerte de F et w l'unique place de E au-dessus de v. Comme P est submersive il existe une fonction f_{0w} sur $G(E_w)$, lisse, à support compact, telle que:

$$f_{0w}(P(g)) = \int f_{1w}(gh)\, \mathrm{d}h. \tag{6.7.7}$$

On a d'autre part:

$$P\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1\right] = \begin{vmatrix} 0 & a^{1-\sigma} \\ -1 & a^{-\sigma} \end{vmatrix}. \tag{6.7.8}$$

Il en résulte que le facteur local pour la fonction Φ qui correspond à la place v s'écrit:

$$\Phi_v(a) = f_{0w}\left[\begin{vmatrix} 0 & a^{\sigma-1} \\ -1 & a^{\sigma} \end{vmatrix}\right]. \tag{6.7.9}$$

Si on écrit $a = tb$ avec t dans F_v et b non nul, on obtient une fonction de Schwartz–Bruhat de t dépendant de b. De plus, pour tous les w non dans T, la fonction f_{0w} est la fonction caractéristique de K_w (et Φ_w la fonction caractéristique de R_w), comme il résulte du lemme suivant:

(6.7.10) LEMME: *On suppose v finie, inerte et non ramifiée dans E. Soit x dans K_w tel que $xx^{\iota} = 1$, Alors $x = P(h)$ avec h dans dans K_w.*

Démonstration: Il suffit de montrer que $y = t + xt^{\iota}$ est dans K_w pour au moins un scalaire t qui est une unité de E; en effet on a $xy^{\iota} = y$ d'où $x = p(y)$ si y est inversible. Comme la matrice y est à coefficients entiers il suffit de montrer qu'elle est inversible mod P. On est donc ramené au problème analogue pour un corps fini e et une extension quadratique f: étant donnée une matrice deux deux inversible x, il existe un scalaire t tel que la matrice y soit inversible. S'il n'en était pas ainsi la matrice x admettrait tous les nombres $-t^{1-\sigma}$ pour valeur propres. Comme il y a $a + 1 > 2$ tels nombres on obtiendrait une contradiction. D'où la conclusion.

On considère maintenant une place v de F qui se décompose en v_1 et v_2. On pose:

$$f_{0v}(g) \;=\int f_{v_1}(gh_1)f_{v_2}(h_2)\mathrm{d}h_1 \quad (=\Omega_{v_1}\mu_{v_1}(\det g)f_v(g)). \tag{6.7.11}$$

C'est une fonction lisse, à support compact modulo le centre, fonction caractéristique de Z_vK_v pour presque tout v. Alors le facteur qui correspond à la place v pour la fonction Φ s'écrit:

$$\Phi_v(a_1, a_2) \;=\; f_{0v}\left[\left|\begin{matrix} 0 & a_1^{-1}a_2 \\ -1 & a_2 \end{matrix}\right|\right] \tag{6.7.12}$$

Ainsi Φ est le produit des expressions (6.7.9) et (6.7.12). En particulier si $\Phi(a)$ n'est pas nul alors $a^{1-\sigma}$ est dans un compact des idèles; on peut alors écrire $a = mb$, où m est dans un compact fixé et b dans les idèles de F. De plus a est dans un compact des adèles de E. On peut donc regarder la fonction Φ comme une fonction de Schwartz–Bruhat de b, dépendant du parametre m. Il en résulte que l'intégrale (6.7.6) converge lorsque la partie réelle de s est assez grande. De même l'intégrale dont on était parti peut s'écrire:

$$\int \Phi(a)\,\mu(a)\,\mathrm{d}a, \quad C^{-1} < |a| < C. \tag{6.7.13}$$

Elle converge donc. On rappelle d'autre part le résultat suivant:

(6.7.14). LEMME: *soit ϕ une fonction de Schwartz–Bruhat. Alors la limite suivante existe:*

$$\lim \int_{C^{-1}}^{C} \phi(b)\,\eta(b)\,\mathrm{d}b, \quad C \to \infty.$$

Elle est égale au prolongement analytique au point 0 *de l'intégrale*

$$\int \phi(b)|b|^s\eta(b)\,db.$$

Enfin cette limite est égale au produit des facteurs suivants:
(*i*) $L(0, \eta)$;
(*ii*) *pour chaque place inerte* v:

$$L(0, \eta_v)^{-1} \int \phi_v(b)\eta_v(b)\,\mathrm{d}b;$$

(*iii*) *pour chaque place* v *décomposée dans* E:

$$\lim_{s\to 0} L(s, 1_v)^{-1} \int \phi_v(b)\,|b|^s\,\mathrm{d}b \;=\; |a_v|^{1/2}\phi_v(0):$$

où a *désigne un idèle différentiel de* F. *Presque tous les facteurs sont égaux à* 1.

On applique ce lemme, ou plutôt une variante de ce lemme avec parametres, à l'intégrale (6.7.13). On obtient d'abord que l'intégrale (6.7.1), autrement dit l'intégrale de K_1, a une limite lorsque C tend vers l'infini, égale à la valeur de l'intégrale (6.7.4) au point 0. De plus on peut calculer cette limite comme le produit des facteurs suivants, presque tous égaux à 1:
(*i*) $L(0, \eta)$;
(*ii*) *pour chaque place inerte* v *au dessous d'une place* w *de* E:

$$L(0, \eta_v)^{-1} \int f_{0w}\left[\begin{vmatrix} 0 & a^{\sigma-1} \\ -1 & a^{\sigma} \end{vmatrix}\right] \mu_w(a)\,\mathrm{d}a;$$

(*iii*) *pour chaque place* v *décomposée dans* E:

$$|a_v|^{1/2} \int f_{0v}\left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right] \mu_{v_1}(a)^{-1}\,\mathrm{d}a. \tag{6.7.15}$$

De même en utilisant le fait que

$$P\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} n_1 r\right] = \begin{vmatrix} -2a & a^{1-\sigma} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

on trouve que l'intégrale de K_2 a une limite lorsque C tend vers l'infini, égale au produit des facteurs suivants:
(*i*) $L(0, \eta)$;

(*ii*) *pour chaque place inerte v au dessous d'une place w de E:*

$$L(0, \eta_v)^{-1} \int f_{0w}\left[\begin{vmatrix} a & a^{\sigma-1} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right] \mu_{w'}(a)\, \mathrm{d}a;$$

(*iii*) *pour chaque place v décomposée dans E:*

$$|a_v|^{1/2} \int f_{0v}\left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right] \mu_{v_1}(a)^{-1}\, \mathrm{d}a. \qquad (6.7.16)$$

On peut aussi formuler ces résultats en termes des fonctions U_v pour v inerte et des fonctions f_v pour v décomposée. On sait que

$$U_v(x) \;=\; M_{1v}(x^{-1}) + \eta_v(-x)M_{2v}(x^{-1}), \qquad (6.7.10)$$

où les fonctions M_{iv} sont lisses près de 0 et on a (Prop 3.5):

$$M_{1v}(0) \;=\; \int f_{0w'}\left[\begin{vmatrix} 0 & a^{\sigma-1} \\ -1 & a^{\sigma} \end{vmatrix}\right] \mu_{w'}(a)\, \mathrm{d}a,$$

$$M_{2v}(0) \;=\; \int f_{0v}\left[\begin{matrix} a & a^{\sigma-1} \\ -1 & 0 \end{matrix}\right|\left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ -1 \end{matrix}}\right] \mu_{w'}(a)\, \mathrm{d}a.$$

De même l'intégrale (6.7.15) (iii) ci-dessus n'est autre que

$$|a_v|^{1/2} \int f_v\left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right] \Omega_{v_1}(a)\, \mathrm{d}a,$$

et une remarque analogue s'applique à (6.7.16) (iii).

(6.8) On peut résumer la discussion précédente comme suit: pour chaque place inerte v on a la fonction intégrale orbitale U_v définie par (6.3.5) et les nombres $M_{iv}(0)$ définis par (6.3.7); pour chaque place décomposée v on a la fonction f_v sur le groupe $GL(2, F_v)$ définie par (6.3.7), ainsi que la fonction U_v définie en termes de f_v par (6.3.8).

Proposition: *L'intégrale*

$$\int_{C^{-1}}^{C} \int K \left(\text{resp} \int_{C^{-1}}^{C} \int T_2^{c} K \quad \text{si} \quad \varepsilon = 1 \right)$$

a une limite lorsque C tend vers l'infini (resp. lorsque c tend vers l'infini et puis C tend vers l'infini). La limite est égale à la somme des termes suivants:

(1) $\sum_{\mu \neq 0} \Pi_v U_v(\mu)\, \Pi \Omega_{v_2}(-\varepsilon)$;

(2) *un terme présent seulement si Ω est le relèvement d'un caractère λ de $F^\times$; c'est le produit des facteurs suivants:*
(*i*) vol $(N_{1\mathbf{A}}/N_{1F})$;
(*ii*) *pour chaque place inerte v de F:*

$$\lim_{x \to 0,\, x \in -\varepsilon N_{0v}} U_v \lambda_v^{-1}(x) \operatorname{vol}(N_{1v})^{-1}\, \lambda(-\varepsilon);$$

(*iii*) *pour chaque place décomposée v:*

$$\int f_v(a)\lambda_v(a)\, \mathrm{d}a, \quad a \in A(F_v)/Z(F_v);$$

(3) *deux termes présents seulement si $\varepsilon = 1$; chaque terme est le produit des facteurs suivants où l'indice i prend les valeurs 1 ou 2 selon le terme:*
(*i*) $L(0, \eta)$;
(*ii*) *pour chaque place inerte v:*

$$M_{iv}(0) L(0, \eta_v)^{-1};$$

(*iii*) *pour chaque place décomposée v:*

$$|a_v|^{1/2} \int f_v \left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right] \Omega_{v_1}(a)\, \mathrm{d}a.$$

§7. Comparaison

(7.1) On fixe maintenant un élément ε_0 de $F^\times$. Si ε_0 est une norme on suppose $\varepsilon_0 = 1$. On écrit G_0 pour le groupe G_ε avec $\varepsilon = \varepsilon_0$. On se donne un ensemble fini S de places de F contenant toutes les places à l'infini, toutes les places qui se ramifient dans E et enfin toutes les places finies où ε_0 n'est pas une unité. On note T l'ensemble des places de E qui sont au-dessus d'une place de E contenue dans S. On suppose de plus que S soit assez grand pour que ω soit sans ramification en dehors de S et Ω sans ramification en dehors de T. On se donne comme au §6 une fonction lisse f sur $G(E_{\mathbf{A}})$, se transformant par l'inverse de ω' sous le centre et à support compact modulo le centre; la fonction f est produit de fonctions locales f_w. Pour w non dans T on suppose que f_w est K_w- invariante. A partir de la fonction f, on définit pour toute place inerte v une fonction U_v sur $F_v^\times$ et pour toute place décomposée v une fonction f_v sur G_v ainsi qu'une fonction U_v; pour ce faire on choisit si v est décomposée une numérotation des deux places de E au-dessus de v (6.3).

On choisit d'autre part un système de représentants des classes du groupe des normes N_0 dans le groupe multiplicatif de F. On suppose que $-\varepsilon_0^{-1}$ est dans ce système. Pour chaque ε dans ce sytème on choisit une fonction f_ε sur le groupe adèlique de G_ε, se transformant par l'inverse du caractère ω sous le centre et à support compact modulo le centre. La fonction f_ε est un produit de fonctions locales $f_{\varepsilon v}$. Si v se décompose en v_1 et v_2 alor $G_{\varepsilon v}$ est le groupe des couples de matrices de $G_v = GL(2, F_v)$ de la forme:

$$(h_1, h_2) \quad \text{avec} \quad h_2 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} h_1 \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1}. \tag{7.1.1}$$

En transportant f_v à $G_{\varepsilon v}$ par l'isomorphisme de $G_{\varepsilon v}$ sur G_v qui envoie le couple (h_1, h_2) sur h_1 on peut regarder f_v comme une fonction sur $G_{\varepsilon v}$. On prendra:

$$f_{\varepsilon v} = f_v \Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)\Omega_{v_1}(\varepsilon). \tag{7.1.2}$$

Si v est une place inerte et w l'unique place de E au-dessus de v alors on considère la fonction intégrale orbitale $H_{\varepsilon v}$ définie par $f_{\varepsilon v}$:

$$H_{\varepsilon v}(x) = \Omega_w(u) \iint f_{\varepsilon v}\left[t_1 \begin{vmatrix} 1 & u\varepsilon \\ u^\sigma & 1 \end{vmatrix} t_2 \right] \Omega_w(t_1)\, \Omega'_w(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2,$$

si x est de la forme $\varepsilon N(u)$ pour au moins un u,

$$H_{\varepsilon v}(x) = 0 \text{ sinon.} \tag{7.1.3}$$

On choisit $f_{\varepsilon v}$ de telle sorte que

$$H_{\varepsilon v}(x) = U_v(x) \quad \text{si} \quad x \in \varepsilon N_{0v}. \tag{7.1.4}$$

Cela est possible d'après les résultats du §3. En particulier si v est inerte mais n'est pas dans S alors la fonction f_w est K_w-invariante. Il en résulte que $U_v(x) = 0$ si la valuation de x est impaire (lemme (4.7.2)). D'après le choix de $f_{\varepsilon v}$, si ε n'est pas une norme à la place v, c'est à dire si $v(\varepsilon)$ est impaire, alors $H_{\varepsilon v} = 0$. On prendra en fait $f_{\varepsilon v} = 0$. Soit d'autre part f_v la fonction K_v-invariante qui est l'image de f_w par l'homomorphisme (4.1.2); alors f_v se transforme par l'inverse du caractère ω_v sous le centre. Si ε est une norme alors on choisit un isomorphisme de $GL(2, F_v)$ sur $G_{\varepsilon v}$ et on prend pour $f_{\varepsilon v}$ l'image de f_v par cet isomorphisme, comme il est possible de le faire d'après la Prop. (4.1). On note $K_{\varepsilon v}$ l'image de K_v par cet isomorphisme; c'est donc un sous-groupe compact maximal de $G_{\varepsilon v}$ et la fonction $f_{\varepsilon v}$ est invariante sous ce groupe. Si de plus ε est une unité à la place v alors on choisit l'isomorphisme de telle sorte que $K_{\varepsilon v}$ soit l'intersection de K_w avec $G_{\varepsilon v}$ ("isomorphisme privilégié").

On notera que $f_\varepsilon = 0$ si ε n'est pas une norme en au moins une place de F qui n'est pas dans S. On peut donc ignorer un tel ε. Les ε restant, c'est-à-dire sont ceux qui sont des normes en toutes les places non dans S, forment un ensemble fini.

(7.2) Soit τ une représentation cuspidale de $G_\varepsilon(F_{\mathbf{A}})$ de caractère central ω; c'est donc une représentation de dimension infinie, par définition si ε n'est pas une norme. Soit ϕ_i une base orthonormale de l'espace de la représentation τ. On pose:

$$K_\tau(x, y) = \sum \varrho(f_\varepsilon)\phi_i(x)\phi_i(y)^*.$$

(7.2.1) LEMME: *La série*

$$\sum_\tau K_\tau(x, y)$$

converge uniformément sur tout compact. Si de plus ε est une norme alors la série converge uniformément.

Démonstration: La série converge en tout cas dans l'espace L^2. D'autre part on sait que f_ε est une somme finie de produit de convoltions $f_1 * f' * f_2$. Par linéarité on peut supposer que f_ε est un tel produit. En notant K'_τ le noyau associé à f' il vient:

$$K_\tau(x, y) = \int K'_\tau(h_1 x, h_2 y) f_1(h_1) f_2(h_2^{-1})\, \mathrm{d}h_1\, \mathrm{d}h_2.$$

Autrement dit la série associée à f_ε s'obtient en appliquant à la série associée à f' des opérateurs de convolutions avec des fonctions lisses à support compact. En général ces opratoeurs envoient l'espace L^2 dans l'espace des fonctions lisses; si de plus ε est une norme alors ces opérateurs envoient l'espace des fonctions L^2 et cuspidales dans l'espace des fonctions continues bornées. Le résultat s'en suit.

(7.2.2) On posera:
(noyau diédral)

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{die}} = \Sigma K_\tau, \ \tau \text{ dièdrale;}$$

(noyau propre)

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{pro}} = \Sigma K_\tau, \ \tau \text{ cuspidale non dièdrale;}$$

(noyau spécial)

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{spe}} = \Sigma K_\tau, \ \dim \tau = 1;$$

(noyau géometrique)

$$K_\varepsilon(x, y) = \Sigma f_\varepsilon(x^{-1}\xi y), \text{ all } \xi;$$

(noyau régulier)

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}}(x, y) = \Sigma f_\varepsilon(x^{-1}\xi y), \quad \xi \text{ régulier;}$$

(noyau singulier)

$$K_{\varepsilon\,\sin}(x, y) = \Sigma f_\varepsilon(x^{-1}\xi y), \quad \xi \text{ singulier.}$$

Enfin on notera $K_{1\,\mathrm{eis}}$ le noyau d'Eisenstein associé au groupe G_ε et à la fonction f_ε, où ε est l'unique élément qui est une norme dans E. On a donc:

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{pro}} = K_\varepsilon - K_{\varepsilon\,\mathrm{spe}} - K_{\varepsilon\,\mathrm{die}} - K_{1\,\mathrm{eis}}, \tag{7.2.3}$$

le dernier terme n'étant présent que si ε est une norme.

On a d'autre part le noyau K_{cusp} associé à fonction f. Le résultat principal de ce travail s'énonce alors ainsi:

THÉORÈME (7.2): *Avec les notations ci-dessus on a:*

$$\sum_{\varepsilon} \iint K_{\varepsilon\,\mathrm{pro}}\,(t_1, t_2)\,\Omega^{-1}(t_1)\,\Omega'(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

$$= \iint K_{\mathrm{cusp}}\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right]\Omega^{-1}(a)\eta\omega\,(\det h)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}h,$$

$$t_i \in T(F_{\mathbf{A}})/T(F)Z(F_{\mathbf{A}}), \quad a \in E_{\mathbf{A}}^{\times}/E^{\times}, \quad h \in G_0(F)Z(F_{\mathbf{A}})\backslash G_0(F_{\mathbf{A}}).$$

(7.3) On va calculer le membre de gauche. Pour cela on intègre chaque terme dans le membre de droite de (7.2.3) et on fait la somme sur ε. On commence par le noyau régulier. On a:

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}}(x, y) = \sum_{N(\xi)} \sum_{\tau_1, \tau_2} f_{\varepsilon}\left[x^{-1}\tau_1 \begin{vmatrix} 1 & \xi\varepsilon \\ \xi^{\sigma} & 1 \end{vmatrix} \tau_2 y\right];$$

dans la somme chaque τ_i parcourt $T(F)/Z(F)$ et $N(\xi)$ parcourt le groupe des normes privé du point 1 si ε est une norme. Il en résulte que l'intégrale du noyau régulier s'écrit:

$$\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}} = \sum \Omega(\xi) \int f_{\varepsilon}\left[t_1 \begin{vmatrix} 1 & \xi\varepsilon \\ \xi^{\sigma} & 1 \end{vmatrix} t_2\right]\Omega(t_1)\,\Omega'(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2,$$

le facteur $\Omega(\xi)$ étant en fait égal à 1. Cette intégrale se décompose en un produit d'intégrales locales. Le facteur correspondant à une place v de F inerte dans E est par définition l'intégrale orbitale de $f_{\varepsilon v}$ évaluée au point $N(\xi)\varepsilon$. D'après le choix même de $f_{\varepsilon v}$ ce facteur est égal à $U_v(N(\xi)\varepsilon)$. Si au contraire v est une place qui se décompose en v_1 et v_2 alors le facteur local correspondant s'écrit:

$$\Omega_{v_1}(\xi_1)\Omega_{v_2}(\xi_2)\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)\Omega_{v_1}(\varepsilon)$$

$$\int f_v\left[\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi_1\varepsilon \\ \xi_2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$\Omega_{v_1}(a_1)\Omega_{v_2}(a_2)\Omega_{v_1}(b_2)\Omega_{v_2}(b_1)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.$$

Comme la restriction de Ω à F est ω le produit $\Omega_{v1}\Omega_{v2}$ est égal à ω_v. Après un changement de variables cette intégrale s'écrit:

$$\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)\Omega_{v_1}(\varepsilon\xi_1\xi_2)\int f_v\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi_1\xi_2\varepsilon \\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a)\Omega_{v_2}(b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.$$

Ceci n'est autre que

$$\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)U_v(\varepsilon\xi_1\xi_2).$$

En écrivant μ pour $\varepsilon N(\xi)$ on voit que l'intégrale du noyau $K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}}$ s'écrit

$$\sum_\mu\prod_v U_v(\mu)\prod_v\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0),$$

où la somme porte sur tous les éléments de εN_0 différents de 0; le premier produit porte sur toutes les places v de F et le second sur celles qui se décomposent dans E. En faisant la somme sur tous les ε on trouve:

$$\sum_\varepsilon\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}} = \sum_\mu\prod_v U_v(\mu)\prod_v\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0), \tag{7.3.1}$$

la somme portant sur tous les éléments μ de F excepté le point 1. Ceci n'est autre que le terme (1) dans la proposition (6.8). On a donc prouvé la proposition suivante:

PROPOSITION (7.3): *On a*

$$\iint K_{\mathrm{reg}} = \sum_\varepsilon\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{reg}}.$$

(7.4) On passe maintenant à l'intégrale du noyau singulier. On a d'après les résultats du §2:

$$K_{\varepsilon\sin}(x,y) = \sum_\tau f_\varepsilon(x^{-1}\tau y) + \sum_\tau f_\varepsilon\left(x^{-1}\tau\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0\end{vmatrix}y\right),$$

où la somme porte sur tous les τ dans $T(F)/Z(F)$. On trouve donc:

$$\iint K_{\varepsilon\sin} = \iint f_\varepsilon(t_1t_2)\Omega(t_1)\Omega'(t_2)\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \iint f_\varepsilon\left[t_1\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0\end{vmatrix}t_2\right]\Omega(t_1)\Omega'(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2,$$

où t_1 est intégré sur $T(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}})$ et t_2 sur $T(F_{\mathbf{A}})/T(F)Z(F_{\mathbf{A}})$. Comme Ω' est en fait le transformé de Ω par l'automorphisme de Galois σ la deuxième intégrale s'écrit:

$$\mathrm{vol}\,(T(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}})T(F)\int f_\varepsilon\left[t\begin{vmatrix}0 & \varepsilon\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right]\Omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.4.1}$$

De même dans la première intégrale, l'intégrale du caractère $\Omega^{1-\sigma}$ est un facteur; l'intégrale est donc nulle à moins que Ω ne soit invariant par σ, c'est-à-dire ne soit le relèvement d'un caractère λ. L'intégrale s'écrit alors

$$\mathrm{vol}\,(T(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}})T(F)\int f_\varepsilon[t]\lambda\,(\det t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.4.2}$$

On va calculer ces intégrales en termes des données locales f_v et U_v. L'intégrale (7.4.2) est un produit d'intégrales locales. Le facteur correspondant à une place inerte v s'écrit:

$$\int f_{\varepsilon v}[t]\lambda_v\,(\det t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la proposition (3.1) ceci n'est autre que la limite de

$$\mathrm{vol}\,(T_v/Z_v)^{-1}\,H_{\varepsilon v}(x)\lambda_v(x)^{-1}$$

pour x tendant vers 0 dans εN_{0v}; d'après le choix même de $f_{\varepsilon v}$, ceci est la limite de

$$\mathrm{vol}\,(T_v/Z_v)^{-1}\,U_v(x)\lambda_v(x)^{-1}$$

pour x tendant vers 0 dans εN_{0v}. Toutefois si x est assez petit $U_v(x)\;=\;0$, à moins que x ne soit dans $-\varepsilon_0 N_{0v}$ (Prop. (3.4)). Il en résulte que (7.4.2) est 0 à moins que ε ne soit dans $-\varepsilon_0^{-1}N_{0v}$ pour toutes les places inertes v. Cette condition signifie en fait que ε est dans $-\varepsilon_0^{-1}N_0$; il y a donc un seul tel ε et d'après les choix faits c'est-à-dire ε_0^{-1}. D'autre part le facteur correspondant à une place v décomposée en v_1 et v_2 s'écrit:

$$\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)\Omega_{v_1}(\varepsilon)\int f_v\left[\begin{vmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a_1)\Omega_{v_2}(a_2)\,\mathrm{d}a_1\,\mathrm{d}a_2,$$

l'intégrale étant prise modulo le centre. Puisque:

$$\varepsilon\varepsilon_0\;=\;-1\quad\text{et}\quad\mu_{v_1}=\mu_{v_2}=\lambda_v$$

ceci n'est autre que:

$$\int f_v(a)\lambda_v\,(\det a)\,\mathrm{d}a, \quad a \in A_v/Z_v.$$

Au total la somme sur tous les ε des intégrales (7.4.2) est nulle à moins que Ω ne soit le relèvement à E d'un caractère λ de F. S'il en est ainsi cette somme se réduit à un terme; à son tour ce terme s'écrit comme le produit des facteurs suivants:

(*i*) vol $(E_{\mathbf{A}}^{\times}/F_{\mathbf{A}}^{\times}E^{\times})$;
(*ii*) pour chaque place inerte v:

$$\mathrm{vol}\,(E_v^{\times}/F_v^{\times})^{-1}\lim U_v\lambda_v^{-1}(x)\,\lambda(-\varepsilon_0),\ x \to 0,\ x \in -\varepsilon_0 N_{0v};$$

(*iii*) pour chaque place v décomposée dans E:

$$\int f_v(a)\lambda_v\,(\det a)\,\mathrm{d}a, \quad a \in A_v/Z_v. \tag{7.4.3}$$

On compare maintenant ce résultat avec l'expression (2) dans la proposition (6.8). Compte tenu de la suite exacte:

$$1 \to F^{\times} \to E^{\times} \to N_1 \to 1$$

où la deuxième flèche est

$$x \to x^{1-\sigma},$$

on voit que les volumes sont identiques dans les deux expressions. Les deux expressions sont donc elles-même identiques.

(7.5) On passe maintenant à (7.4.1). Le facteur correspondant à une place inerte v s'écrit:

$$\int f_{\varepsilon v}\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\sigma}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1\end{vmatrix}\right]\Omega_w(a)\,\mathrm{d}a.$$

Comme on a vu (Prop (3.1)) ceci n'est autre que la limite de

$$\mathrm{volt}\,(T_v/Z_v)^{-1}\,H_{\varepsilon v}(x)$$

pour x tendant vers l'infini dans εN_{0v} Toujours d'après le choix de la fonction $f_{\varepsilon v}$ ceci est aussi la limite de

$$\operatorname{vol}(T_v/Z_v)^{-1}U_v(x),$$

lorsque x tends vers l'infini dans εN_{0v}. Or on sait que pour, x assez grand, $U_v(x)$ est nul à moins que ε_0 ne soit une norme (Prop. (3.4)). On en conclut que (7.4.1) est nulle à moins que ε_0 ne soit une norme à chaque place inerte v, c'est-à-dire à moins que ε_0 ne soit une norme; avec les conventions faites cela implique $\varepsilon_0 = 1$. Sous cette hypothèse on sait (loc. cit.) que la fonction U_v a la forme:

$$U_v(x) = M_{1v}(x^{-1}) + \eta_v(-x)M_{2v}(x^{-1}),$$

où les fonctions M_{iv} sont lisses près de 0. La limite ci-dessus a donc la forme:

$$M_{1v}(0) + \eta_v(-\varepsilon)M_{2v}(0).$$

D'autre part le facteur correspondant à une place v qui se décompose en v_1 et v_2 s'écrit:

$$\Omega_{v_2}(-\varepsilon_0)\Omega_{v_1}(\varepsilon)\int f_v\left[\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0\end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a_1)\Omega_{v_2}(a_2)\,\mathrm{d}a_1\,\mathrm{d}a_2;$$

Comme $\varepsilon_0 = 1$, on obtient après un changement de variables:

$$\int f_v\left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0\end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a)\,\mathrm{d}a.$$

Finalement on voit que l'intégrale (7.4.1) est nulle à moins que $\varepsilon_0 = 1$. S'il en est ainsi cette intégrale est égale au produit des facteurs suivants:

(*i*) $\operatorname{vol}(E_{\mathbf{A}}^\times/E^\times F_{\mathbf{A}}^\times)$;
(*ii*) pour chaque place v, décomposée:

$$\int f_v\left[\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0\end{vmatrix}\right]\Omega_{v_1}(a)\,\mathrm{d}a; \tag{7.5.1}$$

(*iii*) pour chaque place inerte v sous la place w de E:

$$\operatorname{vol}(E_w^\times/F_v^\times)^{-1}[M_{1v}(0) + M_{2v}(0)\eta_v(-\varepsilon)]$$

On va maintenant montrer que la somme des intégrales (7.4.1) pour tous les ε est égale à la somme des deux termes 3 dans la proposition (6.8). En examinant les termes dans cette proposition et en les comparant avec l'expression ci-dessus on voit qu'il suffit de prouver l'identité suivante:

$$L(0, \eta)\left\{\prod_v M_{1v}(0)L(0, \eta_v)^{-1} + \prod_v M_{2v}(0)L(0, \eta_v)^{-1}\right\}\prod_{v\,\text{décomposée}} |a_v|^{1/2}$$

$$= \operatorname{vol}(E_{\mathbf{A}}^\times/F_{\mathbf{A}}^\times E^\times)\sum_\varepsilon\prod_v \{M_{1v}(0) + M_{2v}(0)\,\eta_v(-\varepsilon)\}\operatorname{vol}(E_w^X/F_v^X)^{-1}.$$

Dans cette formule les produits contenant les fonctions $M_{iv}(0)$ portent sur les places inertes. On notera que pour presque tous les v inertes on a $U_v(x) = 1$ si $v(x)$ est pair et x est assez grand, $U_v(x) = 0$ si $v(x)$ est impaire et x assez grand et $\eta_v(-\varepsilon) = 1$. Ces relations entrainent que $M_{iv}(0) = 1/2$. On a d'autre part $L(0, \eta_v) = 1/2$. On voit donc que les produits du membre de gauche ont presque tous leurs facteurs égaux à 1. Soit U un ensemble de places inertes tel que les conditions précédentes soient satisfaites pour v non dans U. Pour un ε donné si v n'est pas dans U et $\eta_v(-\varepsilon) = 1$ alors le facteur correspondant dans le produit infini du membre de droite correspondant à ε est 1. Cela montre déjà que les produits infinis du membre de droite ont bien un sens. D'autre part si $\eta_v(-\varepsilon) = -1$ pour un v inerte non dans U, alors le facteur correspondant est nul. Donc le produit est nul pour tout $-\varepsilon$ qui n'est pas une norme en au moins une place non dans U. La somme est donc bien finie.

Pour prouver cette identité on introduit un idèle différentiel b pour E. Le volume local qui apparait dans la formule n'est autre que:

$$2L(0, \eta_v)\,|b_w|^{1/2}\,|a_v|^{-1/2}$$

tandis que le volume global est $2L(1, \eta)$. En posant

$$A_v = M_{1v}(0)L(0, \eta_v)^{-1},\quad B_v = M_{2v}(0)L(0, \eta_v)^{-1}$$

on voit que la relation à prouver est conséquence des deux relations suivantes:

$$|a|^{1/2}L(0, \eta) = L(1, \eta)\prod_v |b_w|^{1/2},$$

$$1/2\left\{\prod_v A_v + \prod_v B_v\right\} = \sum_\varepsilon\prod_v 1/2\,\{A_v + \eta_v(-\varepsilon)B_v\}.$$

La première résulte de l'équation fonctionnelle des fonctions L. La seconde est un exercice de théorie des groupes (Cf. [J] §10). On a donc finalement prouvé le résultat suivant:

PROPOSITION (7.5): *La somme des intégrales des noyaux $K_{\varepsilon \sin}$ est égale à la somme des termes (2) et (3) dans la proposition (6.8).*

(7.6) La différence entre les deux membres de l'égalité du théorème (7.2) est donc égale à la différence des contributions des termes eisensteiniens, spéciaux et diédraux. De manière précise, soit U un ensemble de places de F contenant S et V l'ensemble de E au dessus de U. On suppose que ε_0 et tous les ε qui entrent effectivement dans la formule sont des unités à toutes les places non dans U. On écrit f_V pour le produit des f_w avec w dans V et f^V pour le produit des f_W avec w non dans T. Soit π une représentation cuspidale de $G(E_{\mathbf{A}})$ de caractère central ω' et admettant un vecteur invariant sous le groupe K^V, c'est-à-dire le produit des groupes K_w pour w non dans V. Soit ϕ_i une base orthormale de l'espace des vecteurs fixés par K^V; on pose

$$K_\pi(x, y) = \sum_i \varrho(f_V)\phi_i(x)\phi_i(y)^*.$$

On désigne aussi par $f^{\hat{V}}(\pi)$ la valeur propre de l'algèbre de Hecke associée à π:

$$\varrho(f^V)\phi_i = f^{\hat{V}}(\pi)\phi_i.$$

Alors le noyau cuspidal a l'expression suivante:

$$K_{\text{cusp}}(x, y) = \sum_\pi f^{\hat{V}}(\pi)K_\pi(x, y),$$

la série étant uniformément convergente. L'intégrale du noyau cuspidal peut donc s'écrire:

$$\iint K_{\text{cusp}} = \sum_\pi f^{\hat{V}}(\pi)A(\pi; f_V) \tag{7.6.1}$$

avec

$$A(\pi; f_V) = \iint K_\pi\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h\right]\Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}a\eta\omega\,(\det h)\, \mathrm{d}h. \tag{7.6.2}$$

De même la contribution du noyau d'Eisenstein est la somme de deux termes (C.f. (5.6)). Le premier s'écrit:

$$\sum_{\chi} \int A(u, \chi, \chi') f^{\hat{V}}(u, \chi, \chi')\, du \tag{7.6.3}$$

où $A(\ldots)$ désigne une fonction appropriée et le deuxième facteur est la valeur propre $f^{\hat{V}}(\pi)$ pour la représentation $\pi = \pi(\alpha^u \chi, \alpha^u \chi')$, la somme porte sur tous les caractères χ qui sont des relèvements et χ' est le produit de ω' par l'inverse de χ. L'autre terme s'écrit:

$$\sum_{\chi} f^{\hat{V}}(0, \chi, \chi') A(\chi, \chi'), \tag{7.6.4}$$

la somme portant sur tous les caractères χ qui ne sont pas des relèvements et dont la restriction à F est $\omega\eta$ et $A(\ldots)$ désigne une constante convenable.

La contribution du noyau spécial s'écrit:

$$f^{\hat{V}}(\Omega) A \tag{7.6.5}$$

où l'on écrit Ω pour la représentation Ω^0 det et A est une constante appropriée.

On considère de même pour chaque ε les fonctions $f_{\varepsilon U}$ et f_ε^U. On a une décomposition du noyau $K_{\varepsilon\,\mathrm{cus}}$:

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{cus}} = \sum_{V} f_\varepsilon^U(\sigma_\varepsilon) K_{\sigma_\varepsilon}, \quad K_{\sigma_\varepsilon}(x, y) = \sum \varrho(f_\varepsilon^U) \phi_i(x) \phi_i^*(y),$$

où la première somme porte sur toutes les représentations cuspidales σ_ε ayant un vecteur invariant sous le groupe compact K_ε^U et ϕ_i parcourt une base orthonormale de l'espace formé par ces vecteurs. En intégrant ce noyau on obtient donc:

$$\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{cus}} = \sum_{\sigma_\varepsilon} f_\varepsilon^{\hat{U}}(\sigma_\varepsilon) a(\sigma_\varepsilon, f_{\varepsilon U}), \tag{7.6.6}$$

où l'on a posé:

$$a(\sigma_\varepsilon, f_{\varepsilon U}) = \iint K_{\sigma_\varepsilon}(t_1, t_2) \Omega(t_1) \Omega'(t_2)\, dt_1\, dt_2. \tag{7.6.7}$$

On somme maintenant les intégrales (7.6.4) sur tous les ε. Pour une représentation donnée σ_ε il existe une représentation cuspidale ε de $G(F_{\mathrm{A}})$ qui lui correspond. Pour v non dans U et inerte sous w on a noté f_v l'image de f_w par l'homorphisme de Hecke. Pour v non dans S et décomposée en v_1 et v_2 on a défini une fonction f_v sur G_v. Vus les choix faits on voit que:

$$f^{\hat{U}}(\sigma) = f_\varepsilon^{\hat{U}}(\sigma_\varepsilon). \tag{7.6.8}$$

En faisant la somme annoncée il vient:

$$\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{pro}} = \sum_\sigma f^{\hat{U}}(\sigma) \sum_\varepsilon a(\sigma_\varepsilon, f_{\varepsilon U}). \tag{7.6.9}$$

La première somme porte sur toutes les représentations cuspidales σ de $G(F_{\mathbf{A}})$ qui ne sont pas diédrales pour l'extension E et la deuxième sur tous les ε qui sont des normes à toutes les places non dans S et tels qu'il existe une représentation cuspidale de G_ε correspondant à σ.

On a aussi défini des noyaux dièdraux. Ils ont des expressions analogues à celle ci-dessus et la somme des intégrales des noyaux dièdraux s'ècrit:

$$\sum \iint K_{\varepsilon\,\mathrm{die}} = \sum_\sigma f^{\hat{U}}(\sigma) \sum_\varepsilon a(\sigma_\varepsilon, f_{\varepsilon U}). \tag{7.6.10}$$

où la première somme est maintenant sur toutes les représentations diédrales cuspidales.

L'intégrale du noyau d'Eisenstein (pour ε une norme) s'ecrit de même:

$$\iint K_{1\,\mathrm{eis}} = \sum_\chi \int f^{\hat{U}}(u, \chi, \chi') a(u, \chi, \chi')\, \mathrm{d}u. \tag{7.6.11}$$

Enfin le noyau spécial s'écrit:

$$K_{\varepsilon\,\mathrm{spe}}(x, y) = \sum_\lambda \int \lambda(\det g) f_\varepsilon(g)\, \mathrm{d}g\, \lambda(\det x) \lambda^*(\det y)\, V^{-1}, \tag{7.6.12}$$

où la somme porte sur tous les caractèrers λ dont le carré est ω et V désigne le volume du quotient $G(F_{\mathbf{A}})/G(F)Z(F_{\mathbf{A}})$. En intégrant ceci on trouve 0 à moins que Ω ne soit le relèvement à E d'un caractère λ. Alors Ω est aussi le relèvement de $\eta\lambda$ et l'on peut écrire l'intégrale comme une somme:

$$\iint K_{\varepsilon\,\mathrm{spe}} = f^{\hat{U}}(\lambda) a_1 + f^{\hat{U}}(\lambda\eta) a_2. \tag{7.6.13}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes appropriées. On remarque maintenant que si σ se relève en π alors

$$f^{\hat{V}}(\pi) = f^{\hat{U}}(\sigma). \tag{7.6.14}$$

En effet si v est une place de F, inerte et non dans U, sous w alors on a:

$$\hat{f}_\omega(\pi_w) = \hat{f}_v(\sigma_v),$$

car π_w est le relèvement de σ_v. Si au contraire v se décompose en v_1 et v_2 alors compte tenu du fait que ε est une unité à la place v on a:

$$f_v(g) = \int f_{v_1}(gh) f_{v_2}(h)\omega_v\,(\det h)\,\mathrm{d}h.$$

Comme la représentation contragrédiente de σ_v est son produit tensoriel avec l' inverse de son caractère central et comme

$$\pi_{v_1} \simeq \pi_{v_2} \simeq \sigma_v$$

on voit que

$$\hat{f}_v(\pi_v) = \hat{f}_{v_1}(\pi_v) f_{v_2}(\pi_v) = \hat{f}_{v_1}(\pi_{v_1})\hat{f}_{v_2}(\pi_{v_2}).$$

La relation (7.6.14) découle de ces identité. On a de même:

$$f^{\hat{V}}(u, \chi, \chi') = f^{\hat{U}}(u, \lambda, \lambda')$$

si χ est le relèvement de λ, et

$$f^{\hat{V}}(\Omega) = f^{\hat{U}}(\lambda)$$

si Ω est le relèvement de λ. Enfin si σ est diedrale, il existe un caractère χ de E dont la restriction à F est $\omega\eta$ et qui est tel que $\pi(0, \chi, \chi')$ soit le relèvement de σ. On a alors:

$$f^{\hat{V}}(0, \chi, \chi') = f^{\hat{U}}(\sigma).$$

On considère maintenant la diffèrence des deux membres dans la proposition (7.2). D'aprés ce qui précède c'est une combinaison linéaire des différences des expressions (7.6.1) et (7.6.9), (7.6.3) et (7.6.11), (7.6.4) et (7.6.10), (7.6.5) et (7.6.13). D'après les égalités qui précedent, la diffèrence de (7.6.3) et (7.6.11) a la forme (7.6.3), avec une fonction A diffèrente. De même la différence de (7.6.5) et (7.6.13) a la forme (7.6.5), avec une autre constante A. De même encore la différence de (7.6.4) et (7.6.10) a la forme (7.6.4) avec une constante A diffèrente. Enfin puisque tout σ admet un relèvement la différence de (7.6.1) et de (7.6.9) a aussi la forme (7.6.1). Tout d'abord, comme dans le "Base Change", on utlise le fait qu'une mesure continue ne peut être égale à une mesure disbrète pour montrer que la différence de (7.6.3) et (7.6.11) est nulle. On applique alors le principe de l'indépendance linéaire infinie des caractères pour montrer que chacune des différences est en fait nulle. en particulier les termes (7.6.1) et (7.6.9) sont égaux ce qui dèmontre enfin l'assertion cherchée.

(7.6) On démontre maintenant le fait que la première condition de Waldspurger entraine la deuxième. On considère donc une représentation cuspidale propre σ de $G(F_{\mathbf{A}})$ de caractère central ω et on note π son relèvement à E. On suppose que $L(1/2, \pi \otimes \Omega^{-1})$ n'est pas nul. Il existe donc une fonction ϕ K-finie dans l'espace de π telle que l'intégrale suivante ne soit pas nulle:

$$\int \phi\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] \Omega^{-1}(a)\, \mathrm{d}a.$$

D'autre part ([H.L.R.]) on sait qu'il existe une fonction K-finie ϕ'dans l'espace de π telle que l'intégrale suivante soit non nulle:

$$\int \phi'(h)\, \eta\omega^{-1}\, (\det h)\, \mathrm{d}h, \quad h \in G_1(F_{\mathbf{A}})/Z(F_{\mathbf{A}})G_1(F).$$

On applique le résultat ci-dessus avec $\varepsilon_0 = 1$. On choisit S et U assez grands pour que les fonctions ϕ et ϕ' soient K^V invariantes. Il est alors clair que l'on peut choisir la fonction f_V de telle sorte que $A(\pi, f_V)$ ne soit pas nul. On sait que l'ensemble des représentations dont π est le relèvement se compose de σ et son produit tensoriel avec le caractère η. En appliquant encore l'indépendance linéaire des caractères on obtient:

$$A(\pi, f_v) = \sum_{\varepsilon} a(\sigma_\varepsilon, f_U) + \sum_{\varepsilon} a(\sigma_\varepsilon \otimes \eta, f_U).$$

Chaque somme porte sur l'ensemble des ε tels qu'il existe une représentation cuspidale σ_ε de G_ε correspondant à σ. Il existe donc au maoins un ε tel que $a(\sigma_\varepsilon, f_{\varepsilon V})$ ou bien $a(\sigma_\varepsilon \otimes \eta, f_{\varepsilon U})$ soit non nul. Dans les deux cas cela entraine l'existence d'un fonction ϕ dans l'espace de σ_ε telle que l'intégrale suivante soit non nulle:

$$\int \phi(t)\Omega^{-1}(t)\, \mathrm{d}t.$$

La seconde condition de Waldspurger est donc bien satisfaite.

Références

[H.L.R.] G. Harder, R.P. Langlands, M. Rapoport: Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen, *Journal Für Math.* 366 (1986) 53–120.

[J] H. Jacquet: Sur un résultat de Waldspurger, *Am. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^{e} série, t.19 (1986) 185–229.

[J.L] H. Jacquet et K.F. Lai: A relative trace formula, *Compositio Mathematica* 54 (1985) 243–300.

[L] R. Langlands: Base change for GL(2), *Annals of Math. Studies*, No. 96, Princeton University Press.

[W] J.L. Waldspurger: Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symetrie, *Compositio Mathematica* 54 (1985) 173–242.