GT Conditions de stabilité.
18.10.2019.

Décompositions semi-orthogonales et de Lefschetz, suite exceptionnelles, exemples.

Contexte: X variété projective lisse $/\mathbb{C}$, $D^b(X)$ sa catégorie dérivée.

Propriétés essentielles: . $Coh(X) \hookrightarrow D^b(X)$

. Il existe un décalage [1].

. Il existe des triangles distingués.

But: . Comprendre $D^b(X)$ à travers certaines de ses sous-catégories

. Toutes les sous catégories seront pleines (ie inclusion pleinement fidèle) et triangulées.

I Décompositions orthogonales:

Def: (i) Une suite semi-orthogonale de $D^b(X)$ est une suite de sous-catégories $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ de $D^b(X)$ telle que

$$Hom_{D^b(X)}(A_i, A_j) = 0 \quad \forall A_i \in \mathcal{A}_i, A_j \in \mathcal{A}_j \text{ et } i > j.$$

[il n'y a pas de flèche vers la gauche].

(ii) Une suite semi-orthogonale est une décomposition semi-orthogonale, notée $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ si les $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ engendrent $D^b(X)$ ie:

$\forall T \in D^b(X)$, il existe une filtration de T (ie des morphismes) de la forme:

$$0 = T_m \longrightarrow T_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 = T \quad (*)$$

telle que $Cone(T_i \to T_{i-1}) \in \mathcal{A}_i$.

Lemme: [Kuznetsov - arXiv 0711.1734v2?, lemme 2.3].
La filtration $(*)$ ci-dessus est canonique et fonctorielle.

Preuve: C'est le pt (1): Si on a $T \to T'$ alors on a $T_1 \in \langle \mathcal{A}_2, \dots \mathcal{A}_m \rangle$ et par semi-orth. $Hom(T_1, cone(T_1' \to T')[k]) = 0 \ \forall k$ donc la flèche $T \to T'$

induit un unique morph. de triangles
$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r] & \mathrm{Cone}(T_1 \to T_0) \arrow[d] \\ T_1' \arrow[r] & T_0' \arrow[r] & \mathrm{Cone}(T_1' \to T_0') \end{tikzcd}$$

Ce qui montre le résultat.

Corollaire: On a un foncteur projection: si $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$, alors on a un foncteur $\mathrm{proj}_{\mathcal{A}_i} : D^b(X) \to \mathcal{A}_i$
$$T \longmapsto \mathrm{Cone}(T_i \to T_{i-1}).$$

Définition: si $\mathcal{A} \subset D^b(X)$, on définit son orthogonal à droite/à gauche par:
$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\perp &= \{E \in D^b(X) \mid \mathrm{Hom}(A,E) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{E \in D^b(X) \mid \mathrm{Hom}(A[k], E) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$
[équivalent car $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A[k] \in \mathcal{A} \ \forall k \in \mathbb{Z}$].
$$\begin{aligned} {}^\perp\mathcal{A} &= \{E \in D^b(X) \mid \mathrm{Hom}(E,A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{E \in D^b(X) \mid \mathrm{Hom}(E, A[k]) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Remarque: la condition (1) de la définition de suite semi-orthogonale est équivalente à
$$\mathcal{A}_i \subset {}^\perp\mathcal{A}_j \quad \text{pour } i > j$$
ou à
$$\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_i^\perp \quad \text{pour } i > j.$$

Définition: Une sous-catégorie $\mathcal{A} \subset D^b(X)$ est dite admissible si le foncteur d'inclusion $\alpha : \mathcal{A} \hookrightarrow D^b(X)$ admet un adjoint à gauche α^* et un adjoint à droite $\alpha^!$

ie
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\alpha(A), E) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha^!(E)) \\ \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(E, \alpha(A)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^*(E), A). \end{aligned}\right\} \quad \forall E \in D^b(X), \forall A \in \mathcal{A}.$$

Remarque: Ça impose $\alpha^!\alpha = \mathrm{id}$ et $\alpha^*\alpha = \mathrm{id}$.

Remarque: Normalement on parle d'admissibilité à droite et à gauche mais dans $D^b(X)$, il existe un foncteur de Serre et donc (α^* existe $\Leftrightarrow$ $\alpha^!$ existe)

Preuve: supposons p.ex que $\alpha^!$ existe, on calcule:
$$\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(E, \alpha(A)) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\alpha(A), S(E))^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha^! S(E))^\vee \underset{\mathcal{A}\text{ pleine}}{=} \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(A, \alpha^! S(E))^\vee$$

$= \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(S^{-1}\alpha^! S(E), A)$ donc $\alpha^* = S^{-1}\alpha^! S$ convient. ②

<u>Rappel</u>: le foncteur de Serre S dans $D^b(X)$ est $E \mapsto (E \otimes \omega_X)[\dim X]$ et vérifie : $\mathrm{Hom}(E,F) = \mathrm{Hom}(F, S(E))^\vee$.

<u>Lemme</u>: Si $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ est une décomposition semi-orthogonale, alors $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_m$ sont admissibles.

<u>Preuve</u>: Il suffit de mq $\alpha_m : \mathcal{A}_m \hookrightarrow D^b(X)$ admet un adjoint à droite $\alpha^!$. Il suffit de poser $\alpha^! = \mathrm{proj}(D^b(X) \to \mathcal{A}_m)$. On a :

$$\mathrm{Hom}(\alpha(A), E) = \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Cone}(T_m \to T_{m-1})) \quad \text{car } \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Cone}(T_i \to T_{i-1})) = 0 \ \forall i < m.$$

<u>Lemme</u>: (1) Si $\mathcal{A} \subset D^b(X)$ est admissible, alors on a 2 décomp. semi-orth.

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}, {}^\perp\mathcal{A} \rangle = \langle \mathcal{A}^\perp, \mathcal{A} \rangle.$$

(2) Plus généralement, si $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_m$ est une suite semi-orthogonale de sous-catégories admissibles, on a

$$D^b(X) = \langle \langle \mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_m \rangle^\perp, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$$

et si : $\forall k \in [1,m]$:

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, {}^\perp\langle \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_k \rangle \cap \langle \mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_m \rangle^\perp, \mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$$

(3) Les catégories ${}^\perp\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^\perp$ (pour $\mathcal{A}$ admissible) sont équivalentes (mais plongées différemment dans $D^b(X)$). Une équivalence est donnée par les mutations à gauche et à droite $\mathbb{L}_\mathcal{A}$ et $\mathbb{R}_\mathcal{A} : D^b(X) \to D^b(X)$ définies par :

$$\alpha\alpha^! \to \mathrm{id} \to \mathbb{L}_\mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_\mathcal{A} \to \mathrm{id} \to \alpha\alpha^*.$$

(triangles distingués de foncteurs).

"<u>Preuve</u>": (1) On prend $T \in D^b(X)$ et on regarde le triangle

$$\alpha\alpha^!(T) \to T \to \mathbb{L}_\mathcal{A}(T).$$

Il faut vérifier que $\mathbb{L}_\mathcal{A}(T) \in \mathcal{A}^\perp$ i.e. $\forall A \in \mathcal{A}$, on a $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{L}_\mathcal{A}(T)) = 0$. Il suffit de mq la flèche

$$\mathrm{Hom}(A, \alpha\alpha^!(T)) \to \mathrm{Hom}(A, T)$$ est un isom.

Mais on a $\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(A, \alpha\alpha^!(T)) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\alpha(A), \alpha\alpha^!(T))$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha^!\alpha\alpha^!(T))$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha^!(T))$$

$$= \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\alpha(A), T) = \mathrm{Hom}(A, T).$$

Ce qui montre le résultat.

(2) et (3) sont démontrés de la même manière.

II Décomposition de Lefschetz :

Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ le plus souvent (et très rapidement ici $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ pour un plgt).

<u>Définition</u> : (1) Une <u>suite de Lefschetz</u> est une suite semi-orthogonale de la forme suivante : $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathcal{B}_{m-1} \otimes \mathcal{L}^{m-1}$ avec

$$\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \dots \supset \mathcal{B}_{m-1}.$$

(2) C'est une <u>décomposition de Lefschetz</u> si on a

$$D^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathcal{B}_{m-1} \otimes \mathcal{L}^{m-1} \rangle$$ toujours avec

$$\mathcal{B}_0 \supset \dots \supset \mathcal{B}_{m-1}.$$

[Par définition $\mathcal{B}_i \otimes \mathcal{L}^i = \langle E \otimes \mathcal{L}^i \mid E \in \mathcal{B}_i \rangle$.]

(3) Elle est rectangulaire si $\mathcal{B}_0 = \dots = \mathcal{B}_{m-1}$.

(4) La partie rectangulaire est $\mathrm{Rect} = \langle \mathcal{B}_{m-1}, \dots, \mathcal{B}_{m-1} \otimes \mathcal{L}^{m-1} \rangle$

(5) La catégorie résiduelle est $(\mathrm{Rect})^{\perp}$.

<u>Remarque</u> : [Kuznetsov : Lefsch. decomp & cat. resl° of sing, Lemme 2.18].

Le bloc $\mathcal{B}_0$ détermine tous les blocs par la formule

$$\mathcal{B}_k = {}^{\perp}(\mathcal{B}_0(-k)) \cap \mathcal{B}_{k-1}.$$

Définition: Une décomposition de Lefschetz est dite minimale si $\mathcal{B}_0$ est minimal pour l'inclusion.

Remarque: [Kuznetsov, Semi-ortho. decomp in alg geom, page 7] Il n'est pas clair de donner un critère qui permette de dire quand une sous-catégorie $\mathcal{B}_0 \subset D^b(X)$ admissible est le bloc initial d'une décomp. de Lefschetz

Un $\mathcal{B}_0$ qui ne marche pas est par ex. $\mathcal{B}_0 = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \rangle \subset D^b(\mathbb{P}^2)$.

Remarque: On peut aussi définir ~~[illegible]~~ une notion de décomp° de Lefschetz duale par :

$$D^b(X) = \langle \mathcal{B}_{m-1}(1-m), \ldots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle \text{ avec } \mathcal{B}_{m-1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_0.$$

III Suites exceptionnelles :

Un cas particulier important est lorsque les $\mathcal{A}_i$ sont les plus simples possible : $D^b(pt) = \mathcal{A}_i$.

Définition: Un objet $E \in D^b(X)$ est dit exceptionnel si :

$$\mathrm{Hom}(E,E) = \mathbb{C} \text{ et } \mathrm{Hom}(E, E[t]) = 0 \;\; \forall t \neq 0.$$

Remarque: C'est équivalent à dire que $\langle E \rangle = D^b(pt)$.

Lemme: E except $\Rightarrow \langle E \rangle$ est admissible.

Preuve: Il suffit de prendre :

$$\alpha^!(F) = R\mathrm{Hom}(F,E) \otimes E \quad \text{et} \quad \alpha^*(F) = R\mathrm{Hom}(E,F)^\vee \otimes E$$

avec $R\mathrm{Hom}(-,-) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(-,-[t])$.

Définition: Une suite d'objets $E_1 \ldots E_m$ est dite collection exceptionnelle si (1) E_i est exceptionnel $\forall i$

(2) $\langle E_1 \rangle \ldots \langle E_m \rangle$ est une suite semi-orthogonale

$\left(\Leftrightarrow \mathrm{Hom}(E_i, E_j[t]) = 0 \quad \begin{matrix} \forall i > j \\ \forall t \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right)$

Définition : Une collection exceptionnelle $E_1 \dots E_m$ est dite :

(1) complète si $D^b(X) = \langle E_1 \dots E_m \rangle$

(2) Forte si $\mathrm{Hom}(E_i, E_j[t]) = 0 \quad \forall t \neq 0$. et $i < j$.

Prop : [Bondal, Rep. of ass. alg and coh. sheaves, Thm 6.2]

si $D^b(X) = \langle E_1 \dots E_m \rangle$ avec $E_1 \dots E_m$ forte, on pose $A = \mathrm{End}(\oplus E_i)$ alors $D^b(X) \simeq D^b(\text{mod-}A)$.

Def (1) Une coll. excp. dite de Lefschetz si elle est de la forme

$$(E_1 \dots E_{\lambda_0}, E_1(1), \dots, E_{\lambda_1}(1), \dots, E_1(m-1), \dots, E_{\lambda_{m-1}}(m-1))$$

avec $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_{m-1}$.

(2) Si de plus elle est complète on dit que c'est une suite exc. de Lefschetz complète. Elle induit une décomp° de Lefschetz

$$D^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{m-1}(m-1) \rangle$$

avec $\mathcal{B}_i = \langle E_1 \dots E_{\lambda_i} \rangle$.

IV Exemples :

(1) $X = \mathbb{P}^n$, la suite $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)$ est une suite exceptionnelle, forte, complète, de Lefschetz et rectangulaire.

"Preuve" : Annulation classique et résolution de la diagonale

$$C^\bullet = (0 \to \mathcal{O}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \dots \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n}) \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

donnée par $id \in \mathrm{Hom}(V, V) = H^0(\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1))$ et le complexe de Koszul. Ensuite, pour $\mathcal{F} \in D^b(X)$ faire $p_{1*}(C^\bullet \otimes p_2^* \mathcal{F})$ qui donne la suite spectrale de Beilinson.

(2) Si $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est une hypersurface de degré $d \leq n+1$, alors $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n+1-d)$ est une suite exceptionnelle (non nect. complète) et on obtient une décomposition semi-orthogonale :

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(n+1-d) \rangle \text{ avec } \mathcal{A} := \langle \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(n+1-d) \rangle^{\perp}$$

(3) Par exemple, si $d = 2$, alors $\mathcal{A}$ admet une suite exceptionnelle complète :

<u>si n est impair:</u> $\mathcal{A} = \langle S^\vee \rangle$ S fibré des spineurs et

[Kuznetsov-Smirnov Res. cat. for Grass. Ex. 1.8] $D^b(X) = \langle S^\vee, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(n-1) \rangle$ est une suite de Lefschetz <u>minimale</u> non rectangulaire

[Kapranov, Der. cat. of coh. sh. on some hom. spaces].

<u>si n est pair:</u> $\mathcal{A} = \langle S_+^\vee, S_-^\vee \rangle$ S_+, S_- fibrés des spineurs et

$$D^b(X) = \langle S_+^\vee, S_-^\vee, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(n-1) \rangle \text{ suite de Lefschetz } \underline{\text{non minimale}}$$

(4) Fibrés projectifs :

<u>Proposition</u> [Orlov, Proj. bundles, monoidal transf. & derv. cat. of coh. sheaves]

$X = \mathbb{P}_S(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} S$ $\mathcal{E}$ fv. de rg $r+1$.

- Alors $\phi_i : D^b(S) \longrightarrow D^b(X)$, $T \longmapsto T \otimes \mathcal{O}_\pi(i)$ est pleinement fidèle $\forall i \in \mathbb{Z}$.
- $D^b(X) = \langle \phi_0(D^b(S)), \dots, \phi_r(D^b(S)) \rangle$.

[Orlov, ibidem].

(5) <u>Eclatements :</u> $Y \subset X$ int. loc. comp. de codim c.

$X \xleftarrow{f} \tilde{X} = Bl_Y(X)$, D = div. excp., $i : \tilde{D} \hookrightarrow X$, $p : D \longrightarrow Y$

on a $D \simeq \mathbb{P}_Y(N_{Y/X})$.

- Les foncteurs : $f^* : D^b(X) \longrightarrow D^b(\tilde{X})$, $F \longmapsto f^*F$, $\psi_k : D^b(Y) \to D^b(\tilde{X})$, $F \longmapsto i_*(p^*F \otimes \mathcal{O}_p(k))$

sont pleinement fidèles $\forall k \in \mathbb{Z}$.

et $D^b(\tilde{X}) = \langle f^* D^b(X), \Psi_0(D^b(Y)), \dots, \Psi_{c-2}(D^b(Y)) \rangle$.

(6) Fib° en quadriques: [Kuznetsov: lef sch. decomp. and cat. resol° of sing].

$f : X \to S$ telle que $X \subset \mathbb{P}_S(E)$ diviseur de degré 2 correspondant à $\mathcal{L} \subset S^2E^\vee$, E de rg $s+2$.

- $\forall i$ il existe un foncteur pleinement fidèle : $\Phi_i : D^b(S) \to D^b(X)$

$$F \mapsto f^*F \otimes \mathcal{O}_\pi(i)$$

- On a une decomp. semi-orth.

$$D^b(X) = \langle D^b(S, \mathcal{C}l_0), \Phi_0(D^b(S)), \dots, \Phi_{s-1}(D^b(S)) \rangle$$

où $D^b(S, \mathcal{C}l_0)$ est la cat. derivée des fasc. coh. de $\mathcal{C}l_0$-modules

où $\mathcal{C}l_0$ = partie paire de l'alg. de Clifford :

$$\mathcal{C}l_0 = \mathcal{O}_S \oplus (\Lambda^2 E \otimes \mathcal{L}) \oplus (\Lambda^4 E \otimes \mathcal{L}^2) \oplus \cdots$$

(7) Grassmanniennes :

Dans tous les esp. homogènes projectifs rationels, il est conjecturé qu'il existe une suite exceptionnelle complète.

C'est vérifié dans peu de cas mais dans (presque?) tous les cas, on a construit (Kuznetsov – Polishchuk) une suite exceptionnelle de la bonne taille ($= \dim H^*(X, \mathbb{C})$).

Kapranov [loc. cit] a construit une telle suite pour les grassmanniennes :

Thm (Kapranov) Soit $\mathcal{U}$ le sous-fibré tautologique de $Gr(k,n)$ (de rang k) et soit $Y_{n,k} = \{$partitions $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ avec $n-k \geq \lambda_1 \geq \lambda_k \geq 0\}$

Alors $D^b(Gr(k,n)) = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U} \mid \lambda \in Y_{n,k} \rangle$ et c'est une collection exceptionnelle pour l'ordre lexicographique sur λ.

[Σ^λ = foncteur de Schur].

"Preuve" : • C'est semi-orthogonal grâce à l'appli° successive de Borel-Weil-Bott (qui permet de calculer $H^*(Gr(k,n), E)$) si E est GL_n-équivariant.

• Il existe une résolution de la diagonale qui induit une suite spectrale pour $\mathcal{F} \in D^b(X)$:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\lambda|=-p} H^q(\mathcal{F}^\cdot, \Sigma^{\lambda^T} \mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^\lambda \mathcal{U} \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{F}^\cdot)$$

avec $\mathcal{U}^\perp = \left(\mathbb{C}^n/\mathcal{U}\right)^\vee$ et λ^T la partition duale ;

$\lambda =$ 

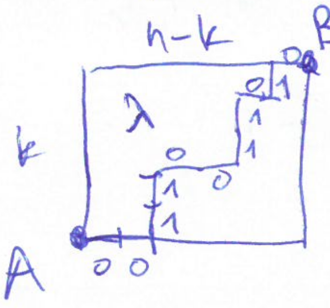
$\lambda^T =$ 

Problème : Ce n'est pas du tout minimal comme suite de Lefschetz. Peut-on faire mieux ?

C'est (presque résolu) par Fonarev (arXiv 1108.2292v2).

Une opération sur les partitions : $\lambda \in Y_{n,k}$: $n-k \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$.

peut être représenté par une suite de 0 et 1 ie comme un chemin du coin A vers le coin B du rectangle :



0 si on va à l'horizontale

1 si on monte.

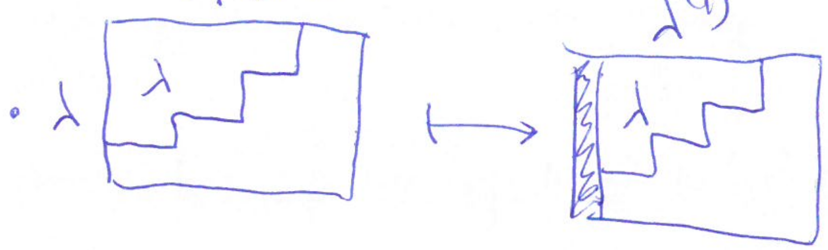
$\lambda \leftrightarrow a_1 \dots a_n$ avec $a_i \in \{0,1\}$.

On a une action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $Y_{n,k}$ donné par l'action du générateur :

$$\lambda \leftrightarrow a_1 \dots a_n \longmapsto \lambda^{(1)} \leftrightarrow a_n a_1 \dots a_{n-1}.$$

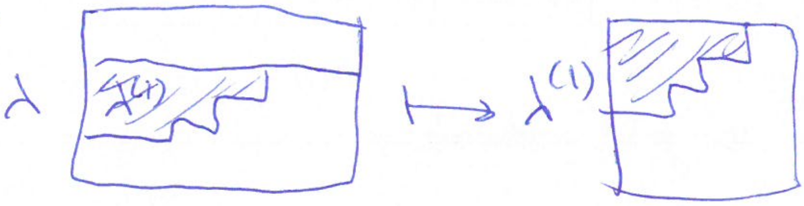
sur les partitions, c'est la multiplication quantique par la première colonne:

$\lambda_1 < n-k$



on ajoute la première colonne.

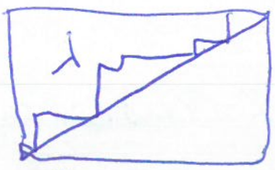
$\lambda_1 = n-k$



on enlève la première ligne.

On cherche des représentants des orbites de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $Y_{n,k}$.

Définition: Un diagramme $\lambda \in Y_{n,k}$ est triangulaire sup. s'il est au-dessous de la diagonale



$\iff \lambda_i \le \dfrac{(n-k)(k-i)}{k}$.

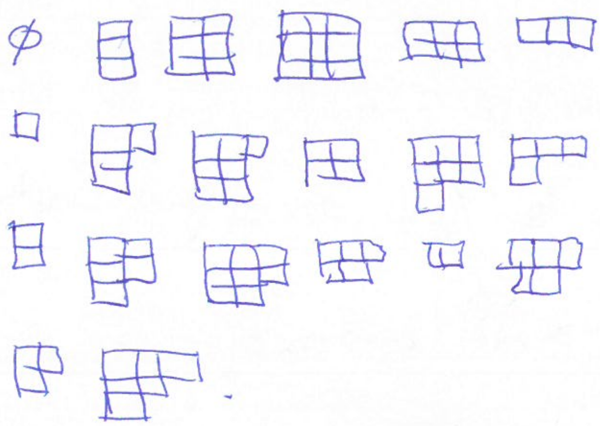
L'ensemble de ces partitions est noté $Y^u_{n,k}$.

Lemme: (1) Toute orbite de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $Y_{n,k}$ contient au moins un elt de $Y^u_{n,k}$.

(2) Si $k \wedge n = 1$, il n'y a qu'un seul elt de $Y^u_{n,k}$ par orbite.

Ex: $Y_{6,3}$: les elts de $Y^u_{6,3}$ sont $\emptyset$, .

les $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-orbites sont:

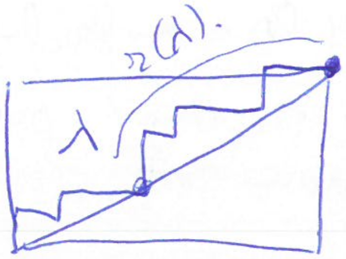


Ici $Y^{u}_{6,3} = \{\emptyset, □, ⊟, □□, ⊞\}$.

Définition : $Y^{mu}_{n,k}$ est l'ensemble des él^{ts} de $Y^{u}_{n,k}$ qui sont minimaux pour l'ordre lexicographique dans leur orbite.

Ex : $Y^{mu}_{6,3} = \{\emptyset, □, ⊟, ⊞\}$: □□ et ⊟ sont dans la m̂ orbite mais ⊟ $<_{lex}$ □□.

Définition : soit $o(\lambda)$ = # orbite de λ par l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
soit $r(\lambda)$ = longueur du chemin non trivial maximal partant du coin en haut à droite du rectangle et allant à un pt du chemin de λ sur la diagonale :



Remarque : Si $k \wedge n = 1$ alors les seuls pts sur la diagonale sont les coins : ~~[illegible]~~ et $o(\lambda) = r(\lambda) = n$.

Théorème : Soit $A_i = \langle \Sigma^{\lambda} \mathcal{U}^{\vee} \mid \lambda \in Y^{mu}_{n,k}, o(\lambda) > i \rangle$

$B_i = \langle \Sigma^{\lambda} \mathcal{U}^{\vee} \mid \lambda \in Y^{u}_{n,k}, r(\lambda) > i \rangle$.

(1) Alors $A_0, A_1(1), \dots, A_{n-1}(n-1)$ est semi-orthogonale.

(2) $D^b(X) = \langle B_0, B_1(1), \dots, B_{n-1}(n-1) \rangle$ décomp° de Lefschetz.

Conjecture 1 $D^b(X) = \langle A_0, \dots, A_{n-1}(n-1) \rangle$.

Conj 2 : la suite $A_0, \dots, A_{n-1}(n-1)$ est minimale.

Prop : Si $k \wedge n = 1$ les conj. 1 et 2 sont vraies.

Preuve : (1) on a $A_i = B_i \ \forall i$ car $Y^u_{n,k} = Y^{mu}_{n,k}$ et $r(\lambda) = o(\lambda)$.

(2) on voit facilement que la longueur d'une décomp° de Lef. est au plus $n = G(X)$. En effet, si $E \in A_0$ et $E \in A_n$ alors

$$\mathrm{Hom}(E(n), E[t]) = \mathrm{Hom}(E, E[t+\dim X])^\vee = \mathrm{Hom}(E,E)^\vee \text{ pr } t = -\dim X$$

et c'est non nul ↯.

Donc une suite de Lefschetz a taille au plus n et son nombre d'élt est au moins $\dim H^\bullet(X)$.

Mais ici la décomp. est rectangulaire donc $\# B_0 = \# A_0 = \dfrac{\dim H^\bullet(X)}{n}$ et ne peut être moins grande.

Preuve de la décomp. de Kapranov :

(1) Semi-orthogonal : c'est des calculs avec Borel-Weil-Bott.

(2) le fait que ça engendre vient de Kapranov : pour s'y ramener on construit des complexes (nouveaux) comme suit :

si une partition λ vérifie $\lambda_1 = n-k$, alors

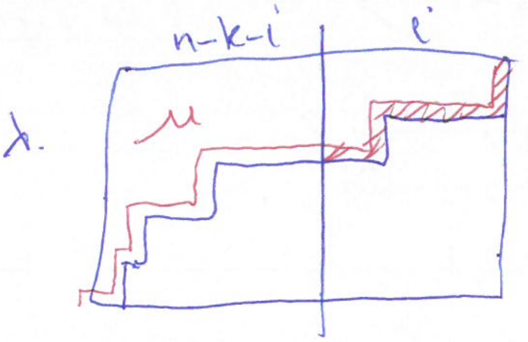
$$\mathrm{Ext}^p(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^\vee, \Sigma^{\lambda^{(1)}} \mathcal{U}^\vee(-1)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } p = n-k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut réaliser explicitement cette extension :

Prop : Il existe une suite exacte longue ; (sur $Gr(k,V)$)

$$0 \to \Sigma^{\lambda^{(1)}} \mathcal{U}^\vee(-1) \to \Lambda^{\nu_{n-k}} V^\vee \otimes \Sigma^{\mu_{n-k}} \mathcal{U}^\vee \to \dots \to \Lambda^{\nu_1} V^\vee \otimes \Sigma^{\mu_1} \mathcal{U}^\vee \to \Sigma^\lambda \mathcal{U}^\vee \to 0$$

où μ_i et ν_i sont donnés par le procédé suivant :



On trace le chemin rouge à une case au dessus de λ : ça donne μ en enlevant les cases hachurées à droite de $n-k-i$

$\nu_i = \#$ de boîtes hachurées.