Y calabi Yau $\longleftrightarrow$ X Fano

I Beauville - Donagi

- $Y = F = \mathrm{Fano}(X)$
  $\subset G(2,6)$
  $F = Z(s_X)$ où $s_X \in H^0(S_3 K_2^\vee)$
  $\dim F = 8 - 4 = 4$
- K_2 sous fibré tauto de rg 2 sur $G(2,6)$
- $d^\circ Y = 108 \qquad \omega_Y = \mathcal{O}_Y$

$X \subset \mathbb{P}_5 \qquad d^\circ X = 3 \quad$ lisse $\quad \dim X = 4$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
H^0 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & \\
H^2 & & & 0 & & 1 & & 0 & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
H^4(X,\mathbb{Z}) & 0 & & 1 & & 21 & & 1 & & \boxed{0}_{\text{Fano}} \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

NB: X hypersurface cubique :

$\dim X$	$H^{\dim(X)}$
1	1 1
2	0 7 0
3	0 5 5 0
4	0 1 21 1 0
5	0 0 21 21 0 0

- Incidence pt/dte $= \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, K_2^\vee)$
  $= \mathbb{P}(K_2)$

restriction à Y

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(K_{2|Y}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & X \subset \mathbb{P}_5 \\
G(2,6) \supset Y = \mathrm{Fano}(X) &
\end{tikzcd}
$$

Th [B-D 85] $\quad \alpha : p_* q^* : H^4(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{Z})$

$\qquad 0 \quad 1 \quad 21 \quad 1 \quad 0 \qquad\qquad 1 \quad 21 \quad 1$

est un iso de structures de Hodge

de plus $\quad S^2(H^2(Y, \mathbb{Q})) \longrightarrow H^4(Y, \mathbb{Q})$ est un iso

de structure de Hodge

$H^4 =$	1	21	232	21	1
	(4,0)	3,1	(2,2)	1,3	(0,4)

<u>Notation</u>: Y pour les variétés avec $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$

X pour les Fano associés.

K_i = sous fibré tautologique de rang i sur une Grassmannienne.

Q_i = Quotient tauto

Debarre – Voisin HK variété Fanos (F. Han le 25/10/19) 1

DV, $\sigma \in \bigwedge^3 V_{10}$

$Y_\sigma \subset G(6,10) = G(6, V_{10}^\vee)$ $\bigwedge^3 V_{10} = H^0 \bigwedge^3 K_6^\vee$

K_6 = sous fibré tautologique de rg 6 sur $G(6,10)$

Y_σ = Zéros de la secθ : $\mathcal{O}_{G(6,10)} \xrightarrow{\sigma} \bigwedge^3 K_6^\vee$

$\omega_{Y_\sigma} = \mathcal{O}_{Y_\sigma}$ $d^\circ Y_\sigma = 1452$

- $Y_\sigma = DV(\sigma)$ variété hyper kähler de dim 4

- On peut aussi associer 3 Fano naturels à σ :

$X_1 \subset \mathbb{P}_9$ $\dim(X_1) = 6$ $\overset{\shortparallel}{G(1, V_{10}^\vee)}$	$X_2 \subset G(2,10)$ $\dim X_2 = 8$ $\overset{\shortparallel}{G(2, V_{10}^\vee)}$	$X_3 \subset G(3,10) = G(3, V_{10}^\vee)$ $\dim X_3 = 20$

car $\bigwedge^3 V_{10} = H^0 \Omega^2_{\mathbb{P}_9}(3) = H^0(Q_8^\vee(1)) = H^0 \mathcal{O}_{G(3,10)}(1)$

où Q_8 est le quotient tautologique de rg 8 sur $G(2,10)$

- $X_1 = \mathrm{Pesk}(\sigma)$ définie par le lieu des points où $\mathrm{rang}(M_\sigma) \leq 6$

$\sigma \in H^0(\Omega^2(3))$ donne $T^1_{\mathbb{P}_9}(-1) \xrightarrow{M_\sigma} \Omega^1_{\mathbb{P}_9}(2)$ avec : $\bar{M}_\sigma = -M_\sigma$

$T^1_{\mathbb{P}_9}$ = tangent à $\mathbb{P}_9$ = dual de $\Omega^1_{\mathbb{P}_9}$

On a donc, $\boxed{0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(-3) \to T^1_{\mathbb{P}_9}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}_9}(2) \to I_{X_1}(4) \to 0}$

où I_{X_1} est l'idéal de X_1 ds $\mathbb{P}_9$

2

On a donc

$d^o X_1 = 15$, X_1 Gorenstein de codim 3 , $\boxed{\omega_{X_1} = \mathcal{O}_{X_1}(-3)}$

lisse pour σ général.

<u>NB</u>: Motivation de Reskine pour créer X_1: Théorie de Zak sur les congruences de droites et problème de normalité quadratique.

La résolution de l'idéal I_{X_1} donne directement $\boxed{H^1 I_{X_1}(2) = \mathbb{C}}$

point important: avoir une variété X telle que son idéal I_X

$$0 \to \mathcal{F} \to \Omega^1_{\mathbb{P}_{N-1}}(2) \to I_X(k) \to 0 \qquad (*)$$

le noyau est globalement engendré, X lisse de codim c irred

alors $H^0(\mathcal{F}) \to \tilde{\Lambda} H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(1)$ donne les équations d'une sous variété $B \subset G(2,N)$ ~~telle~~ que ~~[illegible]~~ .

$\mathrm{Flag}(1,2)_{|B} = \{(p,\delta) \mid p \in \mathbb{P}_{N-1},\ \delta \in B,\ p \in \delta\} \simeq \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}(X)$

$\|$ soit l'éclaté de $\mathbb{P}_{N-1}$ en X via $(*)$

$\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, \Omega^1_{\mathbb{P}_{N-1}}(2))$

on a alors: $\omega_B = \mathcal{O}_B(-c)$ où $c = \mathrm{codim}\, X$ dans $\mathbb{P}_{N-1}$

et $N = (c-1)k + 2$

Alors B est la <u>congruence</u> des ([illegible]) – sécantes à X

(dim = moitié de dim $G(2,N)$)

<u>D</u>: $G(2,N) \xleftarrow{\pi_2} \mathrm{Flag}(1,2) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_{N-1}$ ~~[illegible]~~

$H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(-2) \to \Omega^1_{\mathbb{P}_{N-1}} \to I_X(k-2) \to 0$ donne

Ce qui donne :

$$H^0(\mathcal{F})\otimes \underbrace{R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(-1))}_{\mathcal{O}_G(-1)} \to \underbrace{R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^*\Omega^1_{\mathbb{P}_{N-1}}}_{\mathcal{O}_G} \to R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^* I_X(k-1) \to 0$$

$$H^0(\mathcal{F})\otimes \mathcal{O}_{G(2,N)}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^* I_X(k-1) \to 0$$

équations de $\mathcal{B}$ — faisceau supporté par les k-sécantes à X

× Le cas Pesk(σ) est le plus grand N où X est lisse ; on a $c=3$ via 1 trivéteur.

× <u>On définit alors</u> $X_2 :=$ la congruence des quadrisécantes à Pesk(σ) $\ni X_1$

× <u>NB1</u> : $X_2 =$ Zéros de $\sigma \in H^0(Q_8^\vee(1))$ où Q_8 est le quotient tautologique sur $G(2,10)$

En effet : $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{B}}(-3)\to T^1_{\mathbb{P}_9}(-3)\to\Omega^1_{\mathbb{P}_9}\to I_{X_1}(4)\to 0$ donne

via : $R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^*$ on obtient $\cancel{0\to \ldots} \to Q_8(-1)\xrightarrow{\sigma}\mathcal{O}_{G(2,10)}\to R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^* I_X(2)\to 0$

<u>NB</u> : restriction à une dte δ : $\Omega^1_{\mathbb{P}_9|\delta}(4) = \underbrace{\mathcal{O}_\delta^8(1)}_{\text{quotient tauto}}\oplus\mathcal{O}_\delta \longrightarrow I_{X_1}(4)\otimes\mathcal{O}_\delta \to 0$

0 ssi δ est 4-sécante

$R^1_{\pi_{2*}}\pi_1^* I_X(2) = \mathcal{O}_{X_2}$ supporté par les 4-sécantes

× $\boxed{\text{Corollaire 2}}$

• X_2 est aussi l'ensemble des droites δ telles que tous les plans π contenant δ sont tq $\pi\in X_3$ (ie $\sigma_{|\pi}\equiv 0$)

<u>D</u> : $\delta = e_1\wedge e_2$ on cherche les $p\in Q_{8,|\delta}$ tq

$\sigma(e_1\wedge e_2\wedge p) = 0$ ... $\square$

$\boxed{\text{NB3}}$ • Si $\pi\in X_3$ alors π : • cas général : π contient une unique dte $\delta\in X_2$
(car équations linéaires) • cas particulier : π contient un pinceau d'élt de X_2

- NB4: $S \in X_2$ générale, cette fibre est dans $g - \mathbb{P}_5 \in Y_\sigma = DV(\sigma)$
- Travaux en cours de Manivel – Benedetti – Fatighenti (cf exposé Luminy 2019)

diamant de $X_1 = \mathrm{Pesk}(\sigma)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & H^0 \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & & H^2 \\
 & 0 & 1 & & 22 & & 1 & 0 & H^4 \\
0 & 0 & 1 & & 22 & & 1 & 0 & 0\,H^6 \\
 & 0 & 1 & & 22 & & 1 & 0 & H^8
\end{array}$$

- Lemme 6 (cf [H] Pfaffian bundles on cubic surf ... 5.2)

$p \in Y_\sigma = DV(\sigma)$ général alors $\mathbb{P}_5 = K_p \subset \mathbb{P}_9$ coupe $X_1 = \mathrm{Pesk}(\sigma)$ en un palatini 3-fold Π_p donné par :

$$0 \to \mathcal{O}^4_{\mathbb{P}_5} \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{\mathbb{P}_5}(2) \to \mathcal{I}_{\Pi_p}(4) \to 0$$

nous sommes donc maintenant dans le cas (*) mais avec

$c = \mathrm{codim}(\Pi_p, \mathbb{P}_5) = 2$

- $\alpha \in W_4 \otimes \Lambda^2 V_6$ $\qquad V_6 = H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$, $W_4^* = \mathbb{C}^4$

$\boxed{\text{NB 6'}}$

- Π_p est $\mathrm{Proj}(F)$ où F est le fibré de rang 2 sur la surface cubique pfaffienne donnée par α_S :

$$0 \to V_6^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) \xrightarrow{\alpha} V_6 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3} \to F \to 0$$

$\mathrm{supp}(F) =$ surface cubique.

- $d^\circ \Pi_p \subset \mathbb{P}_5$ est 7

$\boxed{\text{Remarque 7}}$ ⚠ : $|\omega^\vee_{\Pi_p}|$ 2:1 vers $\mathbb{P}_3$ contracte 5 cubiques gauches

- α existe au dessus de $Y_\sigma = DV(\sigma)$

D : $K^*_{6|Y_\sigma} \xrightarrow{\sigma} \Lambda^2 K^\vee_{6|Y_\sigma}$ est identiquement nulle

donc elle induit : $Q_{4|Y_\sigma} \xrightarrow{\alpha} \Lambda^2 K^\vee_{6|Y_\sigma}$

$\boxed{A}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{P}(Q_8(-1)) \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "s_2"] & \\ X_3 \subset G(3,10) & & X_2 \subset G(2,10) \end{tikzcd}$$

$|x_2$

~~$\dim X_3 = 20$~~ $\quad \dim X_2 = 8$

l'Image de s_3 est dans X_3 selon Corollaire 2, s_3 est birationnel sur $Im(s_3) \subsetneq X_3$

selon NB3 et certains fibres peuvent être en $\mathbb{P}_1$.

on obtient $H^{20}(X_3, \mathbb{Q}) \xrightarrow{s_{2*} s_3^*} H^6(X_2\, \mathbb{Q})$

$\boxed{B}$ $H^{10}(X_2, \mathbb{Q}) \xrightarrow{s_{6*} s_2^*} H^{2}(Y_\sigma, \mathbb{Q})$

$\dim B = 8$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B = s_2^{-1}(X_2) \arrow[dl, "s_2"'] & \subset G(2, K_6|_{Y_\sigma}) \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[d, "s_6"] \\ X_2 & G(2,10) & Y_\sigma \end{tikzcd}$$

$s_{6|B}$

- Tout $\mathbb{P}_5$ de Y_σ contient des quadrisécantes à X_1, la fibre générale de $s_6 : B \to Y_\sigma$ est $G(2,6) \cap \underbrace{H^4}_{4 \text{ hyperplans}}$
  (Fano de genre 8 et dim 4)

NB: construction de B par équations :

page 4 : On a construit : $Q_4|_{Y_\sigma} \xrightarrow{\alpha} \Lambda^2 K_6^\vee|_{Y_\sigma}$

remarque 7

B est le lieu d'annulation $s_6^* Q_4|_{Y_\sigma} \longrightarrow \mathcal{O}_{G(2, K_6|_{Y_\sigma})}(1)$

$\boxed{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{P}(K_{6|Y_\sigma}) \arrow[dll, dashed, "9:1"', "r_1"] \\
 & & \mathcal{B}_7 = \text{palatini universel } (\dim \mathcal{B}_7 = 7) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
\mathbb{P}_9 \supset & X_1 & & Y_\sigma
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}_7 \supset r_1^{-1}(X_1)$

$\dim X_1 = 6$

La fibre générale de $r_2 : \mathcal{B}_7 \longrightarrow Y_\sigma$ est le 3-fold de d°7 $\subset \mathbb{P}_5$ décrit en $\boxed{NB\ 6'}$ (Palatini – 3fold)

$$H^8(X_1, \mathbb{Q}) \xrightarrow{r_{2*} r_1^*} H^2(Y_\sigma)$$

1 22 1 $\qquad\qquad$ $\cup$

1 20 1 $= H^2(Y_\sigma)_{van}$