

Notation: Y pour les variétés avec $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$

X pour les fans associés.

K_i = sous-fibré tautologique de rang i sur une
certain manière.

Q_i = Quotient tauto

$DV_1 \quad \sigma \in \tilde{\Lambda}^3 V_{10}$

$Y_0 \subset G(6,10) = G(6, V_{10}^\vee)$

$\tilde{\Lambda}^3 V_{10} = H^0 \tilde{\Lambda}^3 K_6^\vee$

$K_6 =$ sous fibre tautologique de $\text{rg } 6$ sur $G(6,10)$

$Y_0 =$ Zeros de la sec 0 : $\mathcal{O}_{G(6,10)} \xrightarrow{\sigma} \tilde{\Lambda}^3 K_6^\vee$

$\omega_{Y_0} = \mathcal{O}_{Y_0} \quad d^0 Y_0 = 1452$

• $Y_0 = DV(\sigma)$ variété hyperkählère de dim 4

• On peut aussi associer 3 Fano naturels à σ :

$X_1 \subset \mathbb{P}_3$	$X_2 \subset G(2,10)$	$X_3 \subset G(3,10) = G(3, V_{10}^\vee)$
$\dim(X_1) = 6$	$\dim(X_2) = 8$	$\dim(X_3) = 20$
$G(2, V_{10}^\vee)$	$G(2, V_{10}^\vee)$	

ii) $\tilde{\Lambda}^3 V_{10} = H^0 \mathcal{J}_{\mathbb{P}_3}^2(3) = H^0(Q_8^\vee(1)) = H^0 \mathcal{O}_{G(3,10)}(1)$
 où Q_8 est le quotient tautologique de $\text{rg } 8$ sur $G(2,10)$

• $X_2 = \text{Pek}(6)$ définie par le lieu des points où $\text{rang}(M_\sigma) \leq 6$

$\sigma \in H^0(\mathcal{J}^2(3))$ donne $T_{\mathbb{P}_3}^1(-1) \xrightarrow{M_\sigma} \mathcal{J}_{\mathbb{P}_3}^1(2)$ avec: $M_\sigma = -M_\sigma$

On a donc: $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-3) \rightarrow T_{\mathbb{P}_3}^1(-1) \rightarrow \mathcal{J}_{\mathbb{P}_3}^1(2) \rightarrow \mathcal{I}_{X_2}(4) \rightarrow 0$ de $\mathcal{J}_{\mathbb{P}_3}^1$

où \mathcal{I}_{X_2} est l'idéal de X_2 de \mathbb{P}_3

On a donc

$d^0 X_1 = 15$, X_1 Eisenstein de codim 3,
 ligne pour σ général.

$$\omega_{X_1} = \mathcal{O}_{X_1}(-3)$$

NB: Motivation de Pinkie pour ces X_1 : Théorie de Zak sur les congruences de droites et problèmes de normalité quadratique.

La résolution de l'idéal I_{X_1} donne directement $H^1 I_{X_1}(2) = \mathbb{C}$

point important: avoir une variété X telle que son idéal I_X

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2) \rightarrow I_X(k) \rightarrow 0 \quad (*)$$

le noyau est globalement engendré, X ligne de codim c inév.

donc $H^0(\mathcal{F}) \rightarrow \tilde{H}^0 \mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}^{n-1}}$ donne les équations d'une

sous variété $B \subset G(2, n)$ telle que ~~le reste~~.

$$\text{Flag}(k, 2)_B = \{(\ell, \delta) \mid \ell \in \mathbb{P}^{n-1}, \delta \in B, \ell \in \delta\} \cong \tilde{\mathbb{P}}_{n-1}(X)$$

|| soit l'élévation de \mathbb{P}^{n-1} en X via (*)

$$\text{Proj}(\text{Sym}_{\mathbb{P}^{n-1}} \mathcal{S}_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2))$$

on a alors: $\omega_B = \mathcal{O}_B(-c)$ où $c = \text{codim} X$ dans \mathbb{P}^{n-1}
 et $N = (c-1)k + 2$

Alors B est la congruence des ~~(k-1)~~ - sécants à X (dim = moitié de $\text{dim } G(2, n)$)

Ex D: $G(2, n) \xleftarrow{\pi_1} \text{Flag}(k, 2) \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}^{n-1}$ ~~$\text{Proj}(\text{Sym}_{\mathbb{P}^{n-1}} \mathcal{S}_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)) \xrightarrow{\pi_3} \mathbb{P}^{n-1}$~~

$$H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-2) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{P}^{n-1}}^1 \rightarrow I_X(k-2) \rightarrow 0 \quad \text{donc}$$

Ce qui donne.

$$H^0(\mathcal{F}) \otimes R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \rightarrow R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1 \mathcal{S}_{\mathbb{P}^1}^2 \rightarrow R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1 \mathcal{I}_x(k-1)$$

\parallel \parallel
 $\mathcal{O}_G(-1)$ \mathcal{O}_G

$$H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{G(2,10)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_G \rightarrow R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1 \mathcal{I}_x(k-1) \rightarrow 0$$

\uparrow
 équations de B

faisceau supporté par les k -sécants à X

- * Le cas $\text{Psk}(0)$ est le plus grand N où X est lisse; avec $c=3$ via 1 trivecteur.
- * On définit alors $X_2 :=$ la congruence des quadrisécants à $\text{Psk}(0)$
- * NB1: $X_2 =$ Zéros de $\sigma \in H^0(Q_8^V(1))$ où Q_8 est le quotient tautologique sur $G(2,10)$

En effet: $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{P}^3}^2 \rightarrow \mathcal{I}_{X_2}(4) \rightarrow 0$ donne

via: $R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1$
 on obtient $0 \rightarrow \mathcal{O}_G(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{G(2,10)} \rightarrow R_{\pi_{2x} \pi_1^*}^1 \mathcal{I}_x(1) \rightarrow 0$

NB: restriction à une droite S : $\mathcal{S}_{\mathbb{P}^3}^2 = \mathcal{O}_S(2) \oplus \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{I}_{X_2}(4) \oplus \mathcal{O}_S \rightarrow 0$
 quotient taut. \mathcal{O}_S sur 4-sécants \parallel supporté par \mathcal{O}_{X_2} les 4-sécants

Gallaire 2

* X_2 est aussi l'ensemble des droites S telles que tous les plans π contenant S sont tq $\pi \in X_3$ (ie $\sigma_{|\pi} \equiv 0$)

\supseteq : $S = e_1 \cap e_2$ on cherche les $p \in Q_{8,1/53}$ tq

$\sigma(e_1 \cap e_2, p) = 0$ \square

- NB3
- * si $\pi \in X_3$ alors
 - cas général: π contient une droite $S \in X_2$
 - cas particulier: π contient un pinceau d'éclats de X
- (car équations linéaires)

- NB: $S \in X_2$ générale, cette Δ est dans $3-IP_5 \in Y_0 = DV(\sigma)$
- Travaux en cours de Manivel - Bernardara - Fatigenti (cf exposé Luning 2019)

diagram de $X_2 = Psk(\sigma)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & H^0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & H^2 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & H^4 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & H^6 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & H^8
 \end{array}$$

• Lemme (cf [4]) Pfaffian bundles on cubic surf ...

$p \in Y_0 = DV(\sigma)$ alors $IP_5 = X_p \subset IP_5$ coupe $X_2 = Psk(\sigma)$ général
 en un plan 3 -folé \mathbb{P}^2_p donné par:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}^4 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}^2_{\mathbb{P}^5}(2) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{P}^5/p} \rightarrow 0$$

mais sommes donc maintenant dans le cas (*) mais avec $c = \text{codim}(\mathbb{P}^2_p, \mathbb{P}^5) = 2$

• $\alpha \in W_4 \otimes \Lambda^2 V_6$ $V_6 = H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$, $W_4 = \mathbb{C}^4$

NB 6' • \mathbb{P}^2_p est $\text{Proj}(F)$ où F est le fibré de rang 2 sur la surface cubique pfaffienne donnée par α

$$0 \rightarrow V_6^v \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} V_6 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow F \rightarrow 0$$

• $d^0 \mathbb{P}^2_p \subset \mathbb{P}^5$ est F ↑ $\text{supp}(F) =$ surface cubique.

Δ : $W_{\mathbb{P}^2_p}^v$ | $2:1$ vers \mathbb{P}^3 contracté 5 cubiques générales

Remarque 7

• α existe au dessus de $Y_0 = DV(\sigma)$

D : $K_{\mathbb{P}^5/Y_0} \xrightarrow{\sigma} \Lambda^2 K_{\mathbb{P}^5/Y_0}^v$ est identiquement nulle
 donc elle induit: $Q_{4/Y_0} \xrightarrow{\alpha} \Lambda^2 K_{\mathbb{P}^5/Y_0}^v$

A

$$\mathbb{P}(Q_8(-1)) \Big|_{X_2}$$

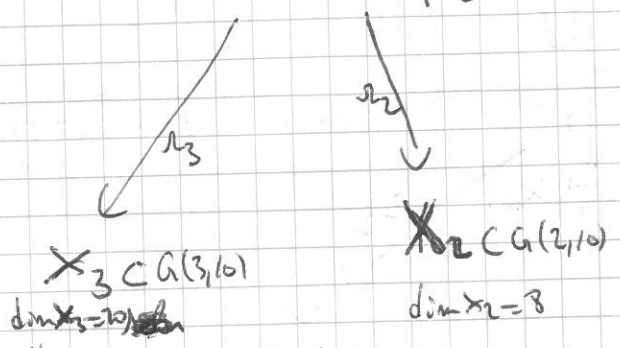


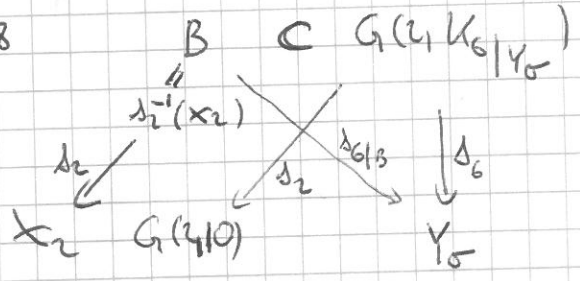
Image de α_3 est dans X_3 selon Corollaire 2, α_3 est birationnel sur $\text{Im}(\alpha_3) \subsetneq X_3$ selon NB3 et certains fibres peuvent être en \mathbb{P}_1 .

on obtient $H^{20}(X_3, \mathcal{Q}) \xrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_3^*} H^6(X_2, \mathcal{Q})$

B

$$H^{10}(X_2, \mathcal{Q}) \xrightarrow{\delta_6^*} H^3(Y_0, \mathcal{Q})$$

$\dim B = 8$



• Tout \mathbb{P}_1 de Y_0 contient des quadriques car à X_2 , la fibre générale de $\delta_6: B \rightarrow Y_0$ est $G(2,6) \cap \mathbb{P}^4$ (Fano de genre 8 et dim 4) 4 hyperplan

NB: construction de B par équations:

page 4: On a construit: remarque 7

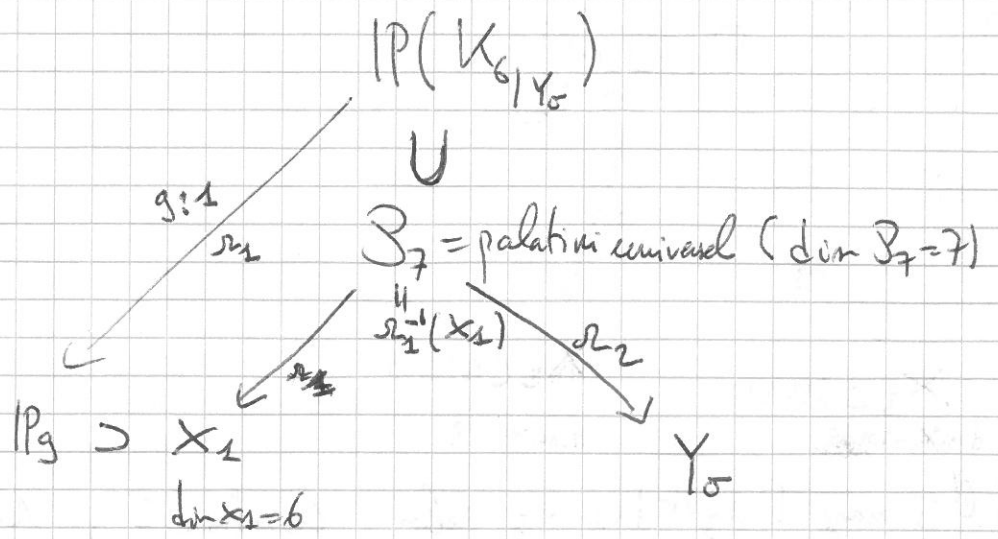
B est le lieu d'annulation,

$$Q_{4|Y_0} \xrightarrow{\alpha} \tilde{K}_{6|Y_0}^{\vee}$$

$$\delta_6^* Q_{4|Y_0} \rightarrow \mathcal{O}_{G(2, K_6|Y_0)}(1)$$

[C]

(6)



La fibre générale de $\sigma_2: \mathbb{P}_7 \rightarrow Y_5$ est le 3-fold de $d=7 \subset \mathbb{P}_5$ dénoté en $\overline{NS6}$ (Palatini-3fold)

$$\begin{array}{ccc}
 H^8(X_2, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\sigma_2 + \sigma_1^*} & H^2(Y_5) \\
 1 \quad 22 \quad 1 & & 1 \\
 & & 1 \quad 20 \quad 1 = H^2(Y_5)_{\text{van}}
 \end{array}$$