Équivalences de catégories de type K3

$\textcircled{1}$

$/\mathbb{C}$

Dans l'exposé précédent, on a construit des variétés X avec :

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \underbrace{{}^{\perp}\mathcal{A}_X}_{\text{connue}} \rangle \quad \begin{pmatrix} \text{d.s.o.e.} \\ \text{(obj. exc.)} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ cat de type K3 (?)

$\mathcal{A}$ cat. triang $\rightsquigarrow \underset{\text{homologie}}{HH_\bullet(\mathcal{A})}, \underset{\text{cohomologie}}{HH^\bullet(\mathcal{A})}$ de Hochschild

* si $\mathcal{A} = D^b(X)$, X proj lisse, $HH_i(\mathcal{A}) = \bigoplus_{p-q=i} H^p(\Omega^q_X)$ colonnes du diamant de Hodge

$HH^i(\mathcal{A}) = \bigoplus_{p+q=i} H^p(\Omega^q_X)$ lignes "

* $HH_\bullet(\mathcal{A})$ est "facile" à calculer : (additivité) | si $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ d.s.o., alors $HH_\bullet(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^m HH_\bullet(\mathcal{A}_i)$

* E obj. exc., $HH_\bullet(E) = k[0]$

* $HH^\bullet(\mathcal{A})$ facile à calculer seulement si $\mathcal{A}$ est de type n-Calabi-Yau, i.e. $(n\text{-}CY)$

si $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Serre}(\mathcal{A}) = [n] \\ \text{et } \mathcal{A} \underset{\text{admissible}}{\subseteq} D^b(X) \end{array}\right\} \Rightarrow HH^i(\mathcal{A}) \cong HH_{i-n}(\mathcal{A})$

$\left(HH_\bullet(D^b(K3))\right)$ $/\!/$

déf | $\mathcal{A}$ de type K3 si $\mathrm{Serre}(\mathcal{A}) = [2]$ et $HH_\bullet(\mathcal{A}) = k[-2] \oplus k^{22}[0] \oplus k[2]$

$\boxed{\text{ex}}$ 1) X cubique $\Rightarrow D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle$

$\mathrm{Serre}(\mathcal{A}_X) = [2]$ par Céline $\Rightarrow \mathcal{A}_X$ de type K3 $\Leftarrow$ (additivité) diam. de Hodge de X

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 0 && 0 &&& \\ && 0 && 1 && 0 && \\ & 0 && 0 && 0 && 0 & \\ 0 && 1 && 21 && 1 && 0 \\ & 0 && 0 && 0 && 0 & \\ && 0 && 1 && 0 && \\ &&& 0 && 0 &&& \\ &&&& 1 &&&& \end{array}$$

2) $X \underset{\substack{\text{hyperpl} \\ \text{DV}}}{\subseteq} Gr(3,10) \Rightarrow D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, E_1, \dots, E_{108} \rangle$ et $\mathcal{A}_X$ type K3

3) X Gushel-Mukai (GM) de dimension paire n

$\Rightarrow D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, E_1, \dots, E_m \rangle$, et $\mathcal{A}_X$ de type K3

(m dépend de la dimension de la GM n)

Programme (des notes) :

i) cubiques génériques

ii) cubiques $\in \mathcal{C}_8$ ⟵ cat. dér. des fibr. en quadriques K3 tordues

iii) cubiques singulières ⟵ DV singulières ⟶ rés. cat. des singularités

iv) cubiques $\in \mathcal{C}_{14}$ ⟵ dualité proj. homologique (HPD) linéaire

v) Gushel-Mukai ⟶ HPD NON-linéaire (Jiang?) ⟶ HPD linéaire quadriques

i) $\boxed{\text{Cubiques génériques } X \subseteq \mathbb{P}^5}$ $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle$ (type K3)

prop Si $X \notin \mathcal{C}_d$ pour un certain d, alors $\nexists S$ K3 t.q. $\mathcal{A}_X \cong D^b(S)$

Rq 1 Ce résultat vaut de façon similaire pour DV et GM

Rq 2 $\mathcal{A}_X$ ne déforme "plus" qu'une K3

Idée preuve $\ast$ $K_0(\mathcal{A}_X) := \bigoplus_{F \in \mathcal{A}_X} \mathbb{Z}[F] \Big/ [G] = [F] + [H]$ si $\exists$ triang. disting. $F \to G \to H$

(gp de Grothendieck)

forme de Euler ⟶ $\chi(F,G) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Hom}(F, G[i])$

$\ast$ $K_0(\mathcal{A}_X)_{num} = K_0(\mathcal{A}_X) / \operatorname{Ker}(\chi)$ Ker à gauche = Ker à droite car $\mathcal{A}_X$ est de type CY

$\ast$ X proj lisse $\Rightarrow K_0(D^b(X)) \otimes \mathbb{Q} \cong CH(X) \otimes \mathbb{Q}$, $K_0(D^b(X))_{num} \otimes \mathbb{Q} = CH(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$

via Chern character

conj. de Hodge pour X + additivité de $K_0(\bullet)$ et $K_0(\bullet)_{num}$ pour les d.s.o. $\Rightarrow K_0(\mathcal{A}_X)_{num} \cong \mathbb{Z}^2$.

De plus, en utilisant la projection $p : D^b(X) \to \mathcal{A}_X$, on peut démontrer que $K_0(\mathcal{A}_X)_{num} = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, où $\lambda_1 = p[\mathcal{O}_{droite}(1)]$, $\lambda_2 = p[\mathcal{O}_{pt}(1)]$

On peut donc calculer la forme de Euler sur $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ déf. négative

Absurde : Si $\mathcal{A}_X \cong D^b(S)$, S K3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \neq [\mathcal{O}_{pt}] = \lambda \in K_0(S)_{num}$, et $\Rightarrow \lambda$ isotrope.

$\chi(\mathcal{O}_{pt}, \mathcal{O}_{pt}) =$ $\underset{\text{ind}}{1} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esp. tang. en pt de dim 2}}}{2} + \underset{\text{S.Serre}}{1} = 0$

Mais χ est déf. négative sur $K_0(\mathcal{A}_X)_{num}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}_X \not\cong D^b(S)$ ∎

ii) $\boxed{X \subset \mathbb{P}^5,\ X \in C_8}$ [Kuz]

Fibration en quadriques

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow p \\ S \end{array}$$ fib. en quadriques plate, $\dim_{\text{relative}} = n-2$

exemple
$X \subseteq \mathbb{P}_S(E)$ est le lieu de zéros de $\tilde{\sigma} \in H^0(\mathbb{P}_S(E), \mathcal{O}_{rel}(2) \otimes \mathcal{L}^*)$

E f.v. sur S de rang n

$\mathcal{L} \to S$ f. en droites

$\mathcal{O}_{rel}(1)$ tautologique* relatif

Thm | $D^b(X) = \langle D^b(S, B_0), p^*(D^b(S)) \otimes \mathcal{O}_{rel}(1), \ldots, p^*(D^b(S)) \otimes \mathcal{O}_{rel}(n-2) \rangle$

cat. der. de $\mathrm{Coh}(S, B_0)$

* Si $X \subseteq \mathbb{P}_S(E)$, alors $B_0 = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^{2i} E \otimes \mathcal{L}^i$ ← faisceau des parties paires de l'algèbre de Clifford

comme e.v. $\mathbb{R}$: $\bigoplus_{j \geq 0} \Lambda^j E \otimes \mathcal{L}^{\lfloor j/2 \rfloor}$

* Supposons que $\tilde{\sigma}$ vient d'une section $\sigma : \mathcal{L} \to S^2 E^*$.

Dans ce cas, on peut définir :

$S_i = \{ s \in S \mid \mathrm{Im}(\sigma(s)) \text{ a corang} \geq i \} \subseteq S_{i-1} \subseteq \cdots \subseteq S$

* $\boxed{n = 2m}$ et supposons de plus que $S_2 = \emptyset$ et S, S_1 sont lisses. Alors $\exists \tilde{S}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ram} & \hookrightarrow & \tilde{S} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S \oplus \det E \otimes \mathcal{L}^{m}) \\ {\scriptstyle 1:1}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 2:1} \\ S_1 & \hookrightarrow & S \end{array}$$

sous-alg. centrale de B_0

Thm | $D^b(S, B_0) \cong D^b(\tilde{S}, \tilde{B}_0)$ pour un certain $\tilde{B}_0$ faisceau d'algèbres de Azumaya sur $\tilde{S}$

<u>Algèbre d'Azumaya</u> $\mathcal{A}$ sur Y lisse : localement $\mathcal{A} \underset{loc}{=} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ loc. libre

Thm | $(\{\mathcal{A} \text{ Azumaya}\}/\sim, \otimes) \cong \mathrm{Br}(Y)$, où $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ si $\exists\, \mathcal{E}, \mathcal{E}'$ globales t.q. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{E}) \cong \mathcal{A}' \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{E}')$

<u>Rq1</u> Avec cette rel. d'equiv, $\otimes$ est bien défini

<u>Rappel</u> Y surface, alors $\mathrm{Br}(Y) = H^2_{et}(Y, \mathcal{O}_Y^*)$

En générale, il y a seulement l'inclusion

Retournons aux cubiques $X \subseteq \mathbb{P}(V_6)$, $V_6 \cong \mathbb{C}^6$, X contient $\mathbb{P}(V_3)$ $\quad \boxed{V_3 \subseteq V_6,\ \cong \mathbb{C}^3}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & Bl_{\mathbb{P}(V_3)}X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\mathbb{P}(V_3) \arrow[r, hook] & X \subseteq \mathbb{P}(V_6) \arrow[r, dashed] & \mathbb{P}(V_6/V_3)
\end{tikzcd}$$

p est une fibration en quadriques $\subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V_6/V_3)}(\mathcal{O}(-1)+V_3)$ dégénérée sur une courbe C de degré 6.

Si X définie par $s \in S^3V_6^*$ et $V_3 \subseteq W_4 \in \mathbb{P}(V_6/V_3)$, $s|_{W_4} = \ell_{V_3} \cdot s'(W_4)$ (eq. linéaire de V_3; $s'(W_4) \in S^2W_4^*$)

$\Rightarrow$ s' définit la fibration avec $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-1)$ et $E = \mathcal{O}(-1)+V_3$

De plus, qu'est-ce que c'est $\tilde{S}$?

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ram} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{S} \arrow[d] \\
C \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(V_6/V_3)
\end{tikzcd}$$

, $\tilde{S}$ surface K3 degré 2

Par les résultats sur la cat. dér. d'une fibration en quadriques:

$$D^b(Bl_{\mathbb{P}(V_3)}X) = \langle D^b(\tilde{S}, \tilde{B}_0), \underbrace{\mathcal{O}(-h), \mathcal{O}, \mathcal{O}(h)}_{D^b(\mathbb{P}(V_6/V_3))}, \mathcal{O}(H-h), \mathcal{O}(H), \mathcal{O}(H+h) \rangle$$

$D^b(\tilde{S}, \tilde{B}_0)$: cat. dér. d'une K3 TWISTÉE ; $\quad h$: $\mathcal{O}(1)$ relatif de p

De plus, en utilisant la d.s.o. du blow-up pour q:

$$D^b(Bl_{\mathbb{P}(V_3)}X) = \langle q^*\mathcal{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(H-h), \mathcal{O}(2H-2h), i_*(q|_D^*(D^b\mathbb{P}(V_3))) \rangle$$

($q|_D^*$: pleinement fidèle)

mutations ... $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ Thm $\Big|$ $\mathcal{A}_X \cong D^b(\tilde{S}, \tilde{B}_0)$

De plus, on peut prouver que

Thm $\Big|$ $X \supseteq \mathbb{P}(V_3)$ et un cycle T de dim 2 t.q. $(T(H-h)^2 - T)\,\mathbb{P}(V_3) \equiv 1 \bmod (2)$

$\xRightarrow{\text{Hassett}}$ X rationnelle

$\xRightarrow{\text{Kuznetsov}}$ $\tilde{B}_0$ "scindé" et $D^b(\tilde{S}, \tilde{B}_0) \cong D^b(\tilde{S})$ (est trivial)

$\blacksquare$

iii) $\boxed{X \subset \mathbb{P}^5, \ \underline{X \text{ singulière}}}$ [Kuz]

Rés. des singularités d'une catégorie

<u>rés sing</u> : $\underset{\text{lisse}}{\tilde{Y}} \xrightarrow[\text{propre birat}]{\pi} Y \Rightarrow$ $\pi_* : D^b(\tilde{Y}) \to D^b(Y)$, $\pi^* : D^{perf}(Y) \to D^b(\tilde{Y})$

loc. q-iso complexe de faisceaux loc. libre de types fini

π^* "adjoint" à gauche de π_*

- $Sing(Y)$ sont rat $\Leftrightarrow$ $\pi_* \pi^* = id$
- π crépant $\Rightarrow$ π^* "adjoint" à droite de π_*

<u>déf</u> | Une <u>rés. des sing.</u> de $D^b(Y)$ est $\tilde{D} \underset{\pi^*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} D^b(Y)$ t.q. π^* adj à gauche de π_*, $\pi_* \pi^* = id$

saturée, Ext-bornée (ens. proj) $\downarrow$ $\tilde{D}$ "lisse"

elle est <u>crépante</u> si π^* adj à droite de π_*

<u>X singulière</u> :

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & Bl_{[V_1]}X \arrow[d] \arrow[dr, "p"] & & D_2 \arrow[ll, "j"'] \arrow[d] \\
{[V_1]} \arrow[r, hook] & X & \mathbb{P}(V_6/V_1) & S \arrow[l, hook'] \\
& \mathbb{P}(V_6) \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

S degré 6

<u>lemme</u> | $Bl_{V_1} X = Bl_S \mathbb{P}(V_6/V_1)$

($s \in S^3 V_6^*$, V_1 sing $\Rightarrow$ s est dans $S^2(V_6/V_1)^* \cdot V_6^*$, i.e. une section de $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(3)$ sur $\mathbb{P}(V_6/V_1)$)

$D^b(Bl_{[V_1]}(X)) = \langle \tilde{D}, \underbrace{i_*(\dots)}_{2 \text{ obj. exc.}} \rangle$

$\underbrace{\tilde{D} = \langle \tilde{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle}_{\tilde{A}_X}$ est une rés. crépante de $\underbrace{D^b(X)}_{A_X}$ ''

De plus, $D^b(Bl_{[V_1]}(X)) = D^b(Bl_S \mathbb{P}(V_6/V_1)) = \langle j_*(p|_{D_2}^*(D^b(S))), \underbrace{\dots}_{6 \text{ obj. exc}} \rangle$

<u>Rq</u> par la structure des blow-ups, on sait que j_* est plein. fidèle !

mutations . . .

<u>Thm</u> | $D^b(S) \cong \tilde{A}_X$

Debarre-Voisin singulières

[BCFLPP pas publié]

$\sigma \in \Lambda^3 V_{10}^* \rightsquigarrow X_3 \subset Gr(3, V_{10})$, $Y \subset Gr(6, V_{10})$

X_3 singulière $\iff \exists V_3$ sing dans $X_3 \iff \sigma|_{\Lambda^2 V_3 \wedge V_{10}} = 0$

$\Rightarrow \sigma$ vit dans $\Lambda^2 (V_{10}/V_3)^* \wedge V_{10}^*$ qui induit une section de $\Lambda^3 (V_{10}/V_3)^* \oplus \Lambda^2 (V_{10}/V_3)^* \otimes V_3$ sur $Gr(3, V_{10}/V_3)$, dont le lieu de zéros est une surface K3 S de degré 28. De plus, on a :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X}_3 = Bl..Bl..Bl_{[V_3]} X_3 \arrow[dl] \arrow[ddr, "p", "\text{génériquement fibration en hypersurfaces dans } Bl..Bl..Gr(3,6)"'] & & D \arrow[ll, hook', "\iota"'] \arrow[dd, "q", "\text{fib. en } Bl..Bl..Gr(3,6)"'] \\
Bl_{[V_3]} X_3 \arrow[d, "\pi"] & & & \\
X_3 \arrow[d, phantom, "\cap"] & & Gr(3, V_{10}/V_7) & S \arrow[l, hook'] \\
Gr(3, V_{10}) \arrow[urr, dashed] & & &
\end{tikzcd}$$

$[V_3] \hookrightarrow X_3$

<u>Faits démontrés</u> [BCFLPP] (PAS EN LIGNE)

* π rés. crépante $\tilde{\mathcal{A}}_{X_3} \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{A}_{X_3}$
 et $\tilde{\mathcal{A}}_{X_3} \subseteq D^b(\tilde{X}_3)$

* $\iota_*(p|_D^*(D^b(S)))$ est plein. fidèle (beaucoup de calculs !!!!) $\Rightarrow \boxed{D^b(S) \subseteq D^b(\tilde{X}_3)}$

* $D^b(\tilde{X}_3) = \langle \tilde{\mathcal{A}}_{X_3}, \underbrace{\quad \dots \quad}_{1851 \text{ obj exc.}} \rangle$

PROBLÈMES POUR OBTENIR $\tilde{\mathcal{A}}_{X_3} \cong D^b(S)$: mutations !!!

1V) $\boxed{X \subseteq \mathbb{P}^5, \; X \in C_{14}}$ $\qquad X \subseteq \mathbb{P}(V_6)$, $V_6 \cong \mathbb{C}^6$ $\qquad$ 4

HPD LINÉAIRE

X lisse proj, $D^b(X) = \langle A_0, A_1(1), \dots, A_{i-1}(i-1)\rangle$ ← Lefschetz

$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$

[Kuz] $\mathcal{X} := \{(x, \underset{\in H^0(\mathcal{O}_X(1))}{s}) \mid s(x) = 0\} \subseteq X \times \mathbb{P}(V^*)$, où $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}(\overset{\dim N}{V})$

prof

$\exists \, D_{HPD} \subseteq D^b(\mathcal{X})$ et une d.s.o. :

$$D^b(\mathcal{X}) = \langle D_{HPD}, A_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^*)), \dots, A_{i-1}(i-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^*))\rangle$$

déf: $Y \xrightarrow{g} \mathbb{P}(V^*)$ est HPD de $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}(V)$ si $\exists \, \mathcal{E} \in D^b(\mathcal{X} \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y)$ t.q. $\phi_{\mathcal{E}} : D^b(Y) \to D^b(\mathcal{X})$ est plein. fidèle et $\phi_{\mathcal{E}}(D^b(Y)) \cong D_{HPD}$

Fourier-Mukai

Thm: Y HPD $X \Rightarrow$ 1) Y lisse et $D^b(Y) = \langle B_{j-1}(1-j), \dots, B_1(-1), B_0\rangle$

(où si $A_k = \langle a_k, \dots, a_{i-1}\rangle$ alors $B_k = \langle a_0, \dots, a_{N-k-2}\rangle$) ← Lefschetz $0 \subset B_{j-1} \subset \dots \subset B_0$

2)* $\forall L \subset V^*$, $\dim L = r$ t.q. $\dim(X_L = X \cap \mathbb{P}(L)) = \dim X - \dim L$

$\dim Y_{L^\perp} = \dim Y + \dim L - N$, alors

$\exists \, \mathcal{C}_L$ cat. triang. t.q.

$D^b(X_L) = \langle \mathcal{C}_L, A_r(r), \dots, A_{i-1}(i-1)\rangle$ et

$D^b(Y_{L^\perp}) = \langle B_{j-1}(r-j), \dots, B(-1), \mathcal{C}_L\rangle$

Rq 1 On va avoir besoin de 2).

Rq 2 $\mathbb{P}(L^\perp)$ est HPD de $\mathbb{P}(L)$

Rq 3 Q quadrique lisse $\Rightarrow$ $Q^\vee$ ← duale projective classique est HPD de Q

(plus tard, on verra le cas de Q pas lisse)

Rq 4 Rq 2 $\Rightarrow$ on peut écrire 2)* de la façon suivante :

$D^b(X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L)) = \langle \mathcal{C}_L, \text{d.s.o.}\rangle$ $\quad$ où Y HPD X

$D^b(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L^\perp)) = \langle \text{d.s.o.}, \mathcal{C}_L\rangle$ $\quad$ et $\mathbb{P}(L^\perp)$ HPD $\mathbb{P}(L)$

("HPD linéaire")

ON CHERCHE LE HPD DE G

$$G := Gr(2,W_6) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 W_6) = \mathbb{P}(V)$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde Z \arrow[r, hook, "i_{\tilde Y}"] \arrow[d, "\text{fibr. en } Gr(2,4)"'] & \tilde Y \arrow[d, "g_Y"', "\text{génériquement } 1:1"] \arrow[r, "\text{fibr. en espaces projectifs } \simeq \mathbb{P}(\Lambda^2 K^\perp)"] & Gr(2,W_6) \\
Z = \mathrm{Sing}\, Y = Gr(2,W_6^*) \arrow[r, hook] & Y = \{Pf = 0\} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(\Lambda^2 W_6^*) = \mathbb{P}(V^*)
\end{tikzcd}$$

K tautologique

$Gr(2,W_6)$ paramètre les Kernels de la deux-forme

FAITS * $i_{\tilde Y *} : D^b(\tilde Z) \to D^b(\tilde Y)$ plein fidèle sur $\langle \mathcal{O}, K^* \rangle_{\tilde Z}^{\perp}$

tautologique sur Z

* $D^b(\tilde Y) = \langle i_{\tilde Y *}(\langle \mathcal{O}, K^* \rangle_{\tilde Z}^{\perp}), \tilde D \rangle$

* $\tilde D := \{ F \in D^b(\tilde Y) \mid i_{\tilde Y}^* F \in \langle \mathcal{O}, K^* \rangle_{\tilde Z} \} \simeq D^b(Y, R)$

où $D^b(Y,R)$ est une rés. NON-comm. de Y (car $g_{Y*} g_Y^* = id$)

et $R = g_{Y*}(\mathcal{E}nd(\mathcal{O}_{\tilde Y} \oplus K))$

Thm | (Y,R) est HPD à G

<u>Rq</u> $D^b(G) = \langle A_0, \dots, A_5(5) \rangle \rightsquigarrow D^b(Y,R) = \langle B_{11}(-11), \dots, B_0 \rangle$

CONSÉQUENCE $L = \mathbb{P}(V_6) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 W_6^*)$ générique

$\Rightarrow Y_L$ = cubique dans $\mathbb{P}(V_6)$ de dim 4

(<u>Rq</u> : dans ce cas, $\tilde Y \xrightarrow{\sim} Y$ pour questions de codimensions)

$\Rightarrow L^\perp$ codim 6 $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow G_{L^\perp} = S \hookrightarrow Gr(2,W_6)$ surface K3 degré 14

De plus, $D^b(S) = \mathcal{C}_L$

$$D^b(Y_L) = \langle \mathcal{O}(-3), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1), \mathcal{C}_L \rangle$$

Ce qui nous dit que pour les cubiques pfaffiennes Y_L,

$$\mathcal{A}_{Y_L} \simeq D^b(S)$$

v) $\boxed{X \subseteq Gr(2, \widehat{V_5}) \quad \text{Gushel-Mukai}}$ (5)

Joint catégorique [Kuznetsov, Perry]

$X_1 \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1)$

$X_2 \hookrightarrow \mathbb{P}(V_2)$

$$\tilde{J}(X_1,X_2) = \mathbb{P}_{X_1\times X_2}(\mathcal{O}(-1,-1))$$

désingul. $\downarrow$

$$J(X_1,X_2) = \bigcup_{\substack{p_1\in X_1\\ p_2\in X_2}} \mathbb{P}^1_{p_1,p_2} \subseteq \mathbb{P}(V_1\oplus V_2)$$

Joint classique

Supposons que pour $k=1,2$, on a des d.s.o.

$$D^b(X_k) = \langle A_{k,0}, \dots, A_{k,m_k-1}((m_k-1)H_k)\rangle$$

$\mathcal{O}(1)$ pour X_k

Prop | $\exists\, A_{X_1,X_2} \subseteq D^b(\tilde{J}(X_1,X_2))$ et une d.s.o. :

$$D^b(\tilde{J}(X_1,X_2)) = \langle A_{X_1,X_2},\ i_{1*}D^b(X_1)\boxtimes A_{2,1}(H_2), \dots, i_{1*}D^b(X_1)\boxtimes A_{2,m_2-1}((m_2-1)H_2),\ i_{2*}D^b(X_2)\boxtimes A_{1,1}(H_1), \dots, i_{2*}D^b(X_2)\boxtimes A_{1,m_1-1}((m_1-1)H_1)\rangle$$

partie intéressante

partie qui vient des d.s.o. de X_1 et X_2

déf | Une variété $\mathcal{J}(X_1,X_2) \longrightarrow \mathbb{P}(V_1\oplus V_2)$ est le <u>Joint catégorique</u> de X_1, X_2

si $A_{X_1,X_2} \simeq D^b(\mathcal{J}(X_1,X_2))$

Thm | 1) $D^b(\mathcal{J}(X_1,X_2)) = \langle A_0, \dots, A_{m-1}((m-1)H)\rangle$ où $m = m_1+m_2$, $A_0 = A_{1,0}\boxtimes A_{2,0}, \dots$

2) $$\begin{tikzcd} \mathcal{J}(X_1,X_2)^\vee \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dr] & \mathcal{J}(X_1^\vee, X_2^\vee) \arrow[d] \\ & \mathbb{P}(V_1^\vee\oplus V_2^\vee) \end{tikzcd}$$

HPD HPD HPD

i.e. <u>HPD</u> et <u>Joint</u> commutent

Thm
HPD NON-LINÉAIRE | On suppose que $V_1 = V_2 = V$

1) $D^b(\mathcal{J}(X_1,X_2)\times_{\mathbb{P}(V\oplus V)}\mathbb{P}(V)) \simeq D^b(X_1\times_{\mathbb{P}(V)} X_2)$

$\Downarrow$

2) $X_1^\vee$ HPD de X_1 et $X_2^\vee$ HPD de X_2, alors

$$D^b(X_1\times_{\mathbb{P}(V)} X_2) = \langle \mathcal{C}_V, \text{d.s.o.}\rangle$$

$$D^b(X_1^\vee\times_{\mathbb{P}(V^\vee)} X_2^\vee) = \langle \text{d.s.o.}, \mathcal{C}_V\rangle$$

Rq comparer 2) avec la remarque ii) après le Thm sur le HPD linéaire

Rq (1) vient du fait que $\tilde{J}(X_1,X_2)\times_{\mathbb{P}(V\oplus V)}\mathbb{P}(V) \simeq X_1\times_{\mathbb{P}(V)} X_2$, et avec le fait que HPD et Joints commutent, il implique (2)

HPD pour les quadriques

NOTATION $X^\vee$ HPD de X $\qquad X^*$ dual projectif classique de X

ATTENTION : Dans [Kuznetsov, Perry] les notations sont différentes !!!

On a vu que, si $Q \subseteq \mathbb{P}(V)$ lisse, alors $Q^\vee = Q^*$ (Q est une quadrique)

On va étudier deux cas:

1) $Q \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ quadrique singulière

$Q \hookrightarrow \mathbb{P}(\langle Q \rangle) \subseteq \mathbb{P}(V)$, et $\quad \mathrm{Ker}(Q) \subseteq \langle Q \rangle \subseteq \mathbb{P}(V)$

$\uparrow$ système lin. de Q

D'abord, on construit Q^* :

Q induit $\overline{Q} \subseteq \mathbb{P}(\langle Q \rangle / \mathrm{Ker}(Q))$ lisse $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \overline{Q}^\vee = \overline{Q}^* \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(Q)^\perp / \langle Q \rangle^\perp)$, où $\langle Q \rangle^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(Q)^\perp \subseteq \mathbb{P}(V)$

$\rightsquigarrow Q^*$ est la quadrique t.q. $\begin{cases} \langle Q^* \rangle = \mathrm{Ker}(Q)^\perp, \ \mathrm{Ker}(Q^*) = \langle Q \rangle^\perp, \text{ et} \\ Q^*|_{\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(Q)^\perp / \langle Q \rangle^\perp)} = \overline{Q}^* \end{cases}$

Or, si $Q \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, on a deux situations :

$\mathrm{rang}(Q) \equiv 0 \pmod 2 \implies Q^\vee = Q^*$

$\mathrm{rang}(Q) \equiv 1 \pmod 2 \implies Q^\vee$ est le recouvrement 2:1 de $\langle Q^* \rangle$ ramifié le long de Q^*

2) Q est un recouvrement 2:1 de $\langle Q \rangle \subseteq \mathbb{P}(V)$ ramifié le long d'une quadrique qu'on dénote Q_{branch}

$\uparrow$ espace projectif

Dans ce cas, on a deux situations :

$\mathrm{rang}(Q) \equiv 0 \bmod (2) \implies Q^\vee = (Q_{branch})^*$

$\mathrm{rang}(Q) \equiv 1 \bmod (2) \implies Q^\vee$ est le recouv. 2:1 de $\langle (Q_{branch})^* \rangle$ ramifié le long de $(Q_{branch})^*$

Retournons aux Gushel-Mukai

$Q \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V_5)$ sera dorénavant soit une quadrique plongée (possiblement singulière) soit un recouvrement 2:1 d'un sous-espace projectif ramifié le long d'une autre quadrique.

On peut vérifier que une Gushel-Mukai peut toujours être définie comme

$$\underset{GM}{X} = Gr(2, V_5) \times_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V_5)} Q$$

Rq X ordinaire $\Longleftrightarrow$ Q quadrique plongée
X spéciale $\Longleftrightarrow$ Q recouvrement

Rappel (exposé de Céline) | $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X$, d.s.o. en obj. exc $\rangle$
$\mathcal{A}_X$ cat. GM de X
et si $\dim X = n$ est paire, alors $\mathcal{A}_X$ est de type K3

Rq X ordinaire t.q. $n=2$ est une surface K3

FAIT : $Gr(2, V_5)^\vee = Gr(2, V_5^*) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 V_5^*)$

déf | X_1 GM est la duale généralisée de X_2^{GM} si les quadriques correspondantes sont HPD.
X_1 GM partner généralisé de X_2 GM si elles sont duales gén. à la même GM

Thm | X_1 et X_2 duales (ou partners) généralisées $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \mathcal{A}_{X_1} \cong \mathcal{A}_{X_2}$

Preuve Appliquer HPD NON linéaire et identifier les d.s.o. !

Et pour les K3 ?

prop Supposons X GM ordinaire de dim 4 t.q. Q a $rg = 6$
$\Rightarrow$ la duale gén. de X est une GM générale de dim 2, i.e. une surface K3 S

Preuve : écrire explicitement la dim. de $Q^\vee = Q^\#$ ∎

Rq $\left\{ \begin{array}{l} X \text{, GM ordinaire dim 4} \\ \text{t.q. } Q \ rg=6 \end{array} \right\}$ est une hypersurface dans l'espace de modules des GM ordinaires de dim 4 (génériquement, Q a rg 8).

Dans ce cas:

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{A}_X \cong D^b(S)}$$

Rq On peut aussi démontrer que si X est une GM ordinaire de dim 4 qui contient un $\mathbb{P}^2$, alors $\exists$ cubique $C \subseteq \mathbb{P}^5$ t.q.

$$\mathcal{A}_X \cong \mathcal{A}_C$$

Les NOTES qui suivent doivent être pensées comme des appendices, où l'on étudie les GM sans utiliser les Joints ni le HPD NON-linéaire

La dernière appendice concerne l'anneau de Hochschild et l'anneau Jacobien.

[redacted]

$X \subseteq \widetilde{Gr}(2,5)$ Gushel-Mukai	PLUS EN DÉTAIL	ET SANS JOINTS

$V_5 \cong \mathbb{C}^5$

APPENDIX

$$\mathrm{Cone}(Gr(2,V_5)) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \Lambda^2 V_5)$$

$$W_{n+5} \subseteq \mathbb{C} \oplus \Lambda^2 V_5 \qquad 2 \leq n \leq 6$$

$$Q \subseteq \mathbb{P}(W_{n+5}) \text{ quadrique}$$

déf | Si $X_n = \mathrm{Cone}(Gr(2,V_5)) \cap Q$ lisse, alors X est une Gushel-Mukai de dim n

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{10}}(1)\Big|_{X_n} = H \qquad H^n = 10 \text{ et } K_{X_n} = (2-n)H \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_2 \to \text{surface K3 générique} \\ X_n,\ n \geq 3 \to \mathrm{Pic}(X_n) = \mathbb{Z}H \end{array}\right\} (**)$$

prop | $(*)\ (**) \iff X_n$ GM

$$f : X_n \longrightarrow Gr(2,V_5) \qquad \text{Gushel map}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \oplus \Lambda^2 V_5 & \longrightarrow & \Lambda^2 V_5 \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ W_{n+5} & \xrightarrow{\pi} & W' \end{array}$$

GM ordinaire $\iff \pi$ inj. $\iff X_n \cong Gr(2,V_5) \cap \mathbb{P}(W') \cap Q$

lieu de zéros dans une Gras.

GM spéciale $\iff \ker \pi$ dim 1 $\iff$

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{2:1} & Gr(2,V_5) \cap \mathbb{P}(W') \\ \uparrow & & \cup\!\mid \\ X_{n-1} & \xrightarrow{\cong} & X_{n-1} \end{array}$$

prop | X_n GM, $n \geq 3$.

$$D^b(X_n) = \langle \mathcal{A}_{X_n}, \mathcal{B}_{X_n}, \mathcal{B}_{X_n}(1), \ldots, \mathcal{B}_{X_n}(n-3) \rangle \qquad \mathcal{B}_{X_n} = (\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{U}_{X_n}^{\vee})$$

$\mathcal{A}_{X_n}$: catégorie GM de X_n

foncteur de Serre $\begin{cases} [2] & \text{si } n \text{ pair} \\ \sigma[2] & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

σ : invol

K3 nc

Enriques nc "$= K3/\widetilde{\sigma}$"

cohom de Hochschild $\to HH^*(X_n) = \begin{cases} \mathbb{C}[-2] \oplus \mathbb{C}^{22} \oplus \mathbb{C}[2] & n \text{ pair} \\ \mathbb{C}[-1] \oplus \mathbb{C}^{20} \oplus \mathbb{C}[1] & n \text{ impair} \end{cases}$

K3 surf

Enriques
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 10 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

cas qui nous intéresse

$\Rightarrow$ $\boxed{n \text{ pair}}$, $\mathcal{A}_{X_n}$ est une cat. type K3

* X_n générique $\Rightarrow$ $\nexists S$ t.q. $\mathcal{A}_{X_n} \cong D^b(S)$
* $M(X_n)$ a dim :

n	2	3	4	5	6
$\dim M(X_n)$	19	22	24	25	25

espace de modules

déf $V_6(X_n) = \{$ quadriques Q dans $\mathbb{P}(W_{n+5})$ t.q. $Q \supseteq X_n \}$

dat forme sympl. sur $\Lambda^3 V_6$, A isotrope (i.e. $A \wedge A = 0$)$\}$

$Y_A^k = \{ x \in \mathbb{P}(V_6) \mid \dim(A \cap (x \wedge \Lambda^2 V_6)) \geq k \} \subset \mathbb{P}(V_6)$

Rq $\exists$ $A(X_n)$ lagrangien pour chaque X_n

Je pars de $X_n \rightsquigarrow V_6(X_n), A(X_n)$ sans vecteurs décomposables

déf dual généralisé

$\forall q \in \mathbb{P}(V_6(X)) \rightsquigarrow X_q^\vee$ t.q. • $X_q^\vee$ GM

• q quadrique qui définit $X_q^\vee$

• $\dim X_n \equiv \dim X_q^\vee \pmod 2$

• $V_6(X_n) \cong V_6(X_q^\vee)^\vee$

$A(X_1) \longleftrightarrow A(X_2)^\perp$

Lemma $n = 4$, $q \in Y^3_{A(X_n)} \Rightarrow X_q^\vee$ surface ordinaire

$Y^3_{A(X_n)} \neq \emptyset$ est une condition divisorielle dans $M(X_n)$

Thm 1 $q \notin \mathbb{P}(V_5(X_4))$ ordinaire comme dans le lemme. Alors

[quadriques de Plücker de la grassmannienne]

$\mathcal{A}_{X_4} \simeq D^b(X_q^\vee)$

Thm 2 (SANS PREUVE) X_4 ordinaire $\supseteq f_1(2,3)$. Alors $\exists$ cubique $X' \subseteq \mathbb{P}^5$ (explicite)

t.q. $\mathcal{A}_{X_4} \cong \mathcal{A}_{X'}$

Idée preuve Thm 1 $\qquad X_4 = X \qquad\qquad Y = X_9^\vee$ $\qquad$ (B) APPENDIX

$\uparrow$ ordinaire $\qquad\qquad \uparrow$ GM surface ordinaire

1) $q \rightsquigarrow$ quadrique Q de rg 6 $\subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2(V_5(X)))$

$V_5(X) \subseteq V_6(X) \rightsquigarrow p \in \mathbb{P}(V_6(X)^\vee) = \mathbb{P}(V_6(Y))$

$\rightsquigarrow$ quadrique $Q^\vee \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 V_5(Y))$

De plus, on peut montrer que $V_5(X) \cong V_5(Y)^\vee$ et $Q^\vee$ proj. duale de Q.

$V_5 = V_5(X)$.

$\Longrightarrow$ $\exists\ W_9 \subseteq \Lambda^2 V_5$ et $Q \subseteq \mathbb{P}(W_9)$ de rg 6 t.q.

GM dans un diviseur

$X_4 = \mathrm{Gr}(2, V_5) \cap Q$, $\qquad Y = \mathrm{Gr}(2, V_5^\vee) \cap Q^\vee$ $\quad$ GM surface

où $Q^\vee$ quadrique proj. duale de Q

codim 4 $\qquad\qquad \uparrow$ codim 2 dans $\mathbb{P}^9$

(Q n'est pas générique!)

on peut partir d'ici si on veut oublier toutes les déf. associées à $X_9^\vee$

$K_3 = \operatorname{Ker} Q \qquad \dim K_3 = 3 \qquad K_3 \subseteq W_9 \subseteq \Lambda^2 V_5$

$W_9^\perp \subseteq K_3^\perp \subseteq \Lambda^2 V_5^\vee$

$\uparrow$ dim 7

$K_3^\perp / W_9^\perp \cong (W_9/K_3)^\vee$

$Q \rightsquigarrow \bar{Q}$ lisse $\subseteq \mathbb{P}(W_9/K_3)$ (dim 4) $\Rightarrow \bar{Q}^\vee = \mathrm{Gr}(2, S^\vee) \subseteq \mathbb{P}(K_3^\perp / W_9^\perp)$

$\mathrm{Gr}(2,S) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 S)$

$\Rightarrow Q^\vee$ est la quadrique t.q. $\operatorname{Ker} Q^\vee = W_9^\perp$ et $\overline{Q^\vee} = \bar{Q}^\vee$ de dim 6

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Fl}(1,2,S) \arrow[dl, "\mathbb{P}^1"'] \arrow[dr] & & \mathrm{Fl}(2,3,S^\vee) \arrow[dl] \arrow[dr, "\mathbb{P}^1"] & \\ \bar{Q} & & \mathbb{P}(S) & & \bar{Q}^\vee \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{P}(E_6) \arrow[dl, "\mathbb{P}^1"'] \arrow[dr, "\mathbb{P}^5"] & & \mathbb{P}(E_4) \arrow[dl, "\mathbb{P}^3"'] \arrow[dr, "\mathbb{P}^1"] & \\ Q & & \mathbb{P}(S) & & Q^\vee \end{tikzcd}$$

L isotrope wrt $\bar{Q} \rightsquigarrow L + K_3$ isotrope wrt $Q \rightsquigarrow E_6 \to S$

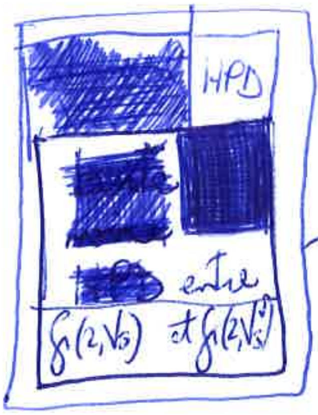
L " " $\bar{Q}^\vee \rightsquigarrow L + W_9^\perp$ " " $Q^\vee \rightsquigarrow E_4 \to S$

$\hat{X} = \mathcal{G}(2,V_5) \times_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V_5)} \mathbb{P}(E_6)$ $\qquad$ $\hat{Y} = \mathcal{G}(2,V_5^\vee) \times_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V_5^\vee)} \mathbb{P}(E_4)$

$\underset{\text{rg } 2}{\hat{X} = \mathbb{P}(\mathcal{S}_X)}$ $\qquad$ $\underset{\text{rg } 2}{\hat{Y} = \mathbb{P}(\mathcal{S}_Y)}$

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr] & & \hat{Y} \arrow[dl] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & \mathbb{P}(S) & & Y \end{tikzcd}$$

plate, fibre gén. surface del Pezzo quintique $\qquad$ fibre gén. finie de degré 5



$\exists\, \hat{\Phi} : D^b(\hat{Y}) \longrightarrow D^b(\hat{X})$ foncteur de Fourier-Mukai
plein. fidèle avec

$$D^b(\hat{X}) = \langle \hat{\Phi} D^b(\hat{Y}),\ \mathcal{B}_X(H) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(S)) \rangle$$

$$\mathcal{B}_X(H) = \langle \mathcal{O}_X(1), \mathcal{U}_X^\vee(1) \rangle$$

Mais $D^b(\hat{X}) \underset{\text{fibré en } \mathbb{P}^1 \text{ sur } X}{\cong} \langle p^* D^b(X), p^* D^b(X) \otimes \mathcal{O}_{rel}(1) \rangle$

$$D^b(\hat{Y}) = \langle q^* D^b(Y), q^* D^b(Y) \otimes \mathcal{O}_{rel}(1) \rangle$$

<u>compte naïf</u> $\quad D^b(\hat{X})$ contient 2 copies de $\mathcal{A}_X$ et 8 obj. exc., mais aussi
2 copies de $D^b(Y)$ et 8 obj. exc.

mutations . . .

$$D^b(\hat{Y}) = \langle q^* D^b(Y), q^* D^b(Y) \mathcal{O}_{rel}(1) \rangle \xleftarrow[\hat{F}]{\cong} \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{O}_{rel}(1) \rangle$$

via un foncteur

$q_* \circ \hat{F}$ s'annule sur $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{O}_{rel}(1)$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{D^b(Y) \cong \mathcal{A}_X}$

Hochschild (cohomologie de)

<u>Cas</u> : hypersurface $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ degré d

$\mathcal{A}_X \subseteq D^b(X)$ comp. de Kuz.

<u>Rappel</u> $J(X) := k[x_0, \dots, x_{n+1}] / (\partial_i f)$

où $\{f = 0\} = X$ ← degré max. $(n+2)(d-2) =: \sigma$

<u>Thm (Kuz)</u> | $d \mid (n+2) \Rightarrow \mathcal{A}_X$ CY de dim. $(n+2)(d-2)/d$

$$J^* : D^b(X \times X) \longrightarrow \mathcal{A}_X(-(n+1-d)) \boxtimes \mathcal{A}_X$$

↑ adj. à gauche de l'inclusion naturelle (i.e. la projection)

$P \in D^b(X \times X) \rightsquigarrow J^* P \in \mathcal{A}_X(-(n+1-d)) \boxtimes \mathcal{A}_X$

$\rightsquigarrow$ induit un foncteur (de Fourier-Mukai)

$$\begin{tikzcd} \Phi_{J^*P} : & \mathcal{A}_X \arrow[r, "\Phi_{J^*P}"] & \mathcal{A}_X \arrow[d, "i_*"] \\ & D^b(X) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, "\Phi_P"] & D^b(X) \end{tikzcd}$$

foncteur de Mukai

<u>déf</u> | $P_0 = J^* \mathcal{O}_\Delta$, Δ diagonale

$P_1 = J^* \mathcal{O}_\Delta(1)$

$(1) := \Phi_{P_1}$ "foncteur de shift de degré", $E \mapsto i^*(E \otimes \mathcal{O}_X(1))$

$P_\ell := (P_1)^{\circ \ell}$ ← ℓ-convolution $\Rightarrow (\ell) := \Phi_{P_\ell} = (1)^\ell$

convolution : $P \circ Q = p_{13*}(p_{12}^* P \otimes p_{23}^* Q)$, où $\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[d, "p_{ij}"] \\ X \times X \end{tikzcd}$

<u>déf</u> | $L(X) := \bigoplus_{\ell=0}^{\sigma} L_\ell(X) = \bigoplus_{\ell=0}^{\sigma} \mathrm{Hom}(P_0, P_\ell)$

↑ Hom dans $\mathcal{A}_X$

prop

- $L(X)$ est un anneau de Gorenstein de dim. finie et degré σ

De plus :

- $L_0(X) \simeq HH^0(\mathcal{A}_X)$
- $L_{d\ell}(X) \simeq HH^{2\ell}(\mathcal{A}_X)$
- La application naturelle $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta(1)) \to$

$\longrightarrow \mathrm{Hom}(J^*\mathcal{O}_\Delta, J^*\mathcal{O}_\Delta(1)) = L_1(X)$ induit une application $J(X) \longrightarrow L(X)$

déf

$HH^\bullet(\mathcal{A}_X, (1)) \subset L(X)$ (~~cohom~~ cohom. de Hochschild de la paire $(\mathcal{A}_X, (1))$) est la sous-alg. graduée engendrée par L_1

Thm

$\exists$ surj : $J(X) \twoheadrightarrow HH^\bullet(\mathcal{A}_X, (1))$

C'est un isom. si $n+2$ est divisible par d, i.e. quand $\mathcal{A}_X$ est de type CY (voir thm de Kuznetsov)