Conditions de stabilité sur les catégories K3

I | Rappel sur les définitions

Déf • $\mathcal{D}$ catégorie triangulée

$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ sous-catégorie pleine

$\mathcal{A}$ est le coeur d'une t-structure bornée

si • $\forall E, F \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}(E, F[n]) = 0$ pour $n < 0$

• $\forall E \in \mathcal{D}$, il existe une "filtration"

$$\begin{tikzcd} 0 = E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & E_n = E \arrow[dl] \\ & A_1 \arrow[ul, dashed] & \cdots & A_n \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

tq. $A_i \in \mathcal{A}[k_i]$ avec k_i décroissants

($\mathcal{A}$ est nécessairement abélienne)

• $\mathcal{A}$ catégorie abélienne

Fixons $K_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{v} \Lambda$ où Λ est un réseau (p.ex. $K_{num}(\mathcal{A})$)

Une fonction de stabilité faible est un morphisme de groupes $Z : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ tq. $\forall A \in \mathcal{A}$, $Z(v(A)) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{\leq 0}$

(on note aussi $Z(A)$ au lieu de $Z(v(A))$)

Elle est une fonction de stabilité si de plus,

$Z(A) = 0 \iff A = 0$

• Etant donné Z, pour $\forall\, 0 \neq A \in \mathcal{A}$, on définit la pente de A :

$$\mu_Z(A) := \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{Re} Z}{\operatorname{Im} Z} & \operatorname{Im} Z > 0 \\ +\infty & \operatorname{Im} Z = 0 \end{cases}$$

et ainsi, la notion de semi-stabilité :

A est semi-stable si $\forall\, 0 \neq B \subset A$ $\mu_Z(B) \leq \mu_Z(A)$.

• (propriété de Harder–Narasimhan)

On dit que Z a la <u>propriété de HN</u>.

si $\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists$ une HN filtration

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

avec A_i/A_{i-1} semi-stable de pente décroissante.

<u>Déf</u> Une <u>condition de stabilité faible</u> sur $\mathcal{D}$ (catégorie triangulée) est une paire $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$, où $\mathcal{A}$ est le coeur d'une t-structure bornée, et Z une fonction de stabilité faible sur $\mathcal{A}$. tq.

- Z a la propriété de HN.
- (condition de support)
  $\exists$ Q forme quadratique sur $\Lambda_{\mathbb{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ t.q.
  $Q|_{\ker(Z_{\mathbb{R}})} < 0$ et $Q(A) \geq 0$ pour tout A semistable
- $\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A} \mid Z(A) = 0\}$ est noethérienne.

C'est une <u>condition de stabilité</u>, si Z est une fonction de stabilité (dans ce cas $\mathcal{A}_0 = 0$, la 3^e condition devient vide)

<u>Ex</u> • C une courbe lisse.

$\mathcal{D} = D^b(\mathrm{Coh}\, C)$

$\mathcal{A} = \mathrm{Coh}\, C$, $\quad Z : E \mapsto i \cdot \mathrm{rg}\, E - \deg E$, $\mu_Z = \dfrac{\deg}{\mathrm{rg}}$

$\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ est une condition de stabilité

• Plus généralement, pour (X, H) variété projective lisse $/\mathbb{C}$

H une classe ample. $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}\, X$, $\quad Z_H : E \mapsto i \cdot H^n \cdot ch_0 E - H^{n-1} \cdot ch_1 E$

$\sigma = (\mathcal{A}, Z_H)$ est une condition de stabilité faible (stabilité de pente)

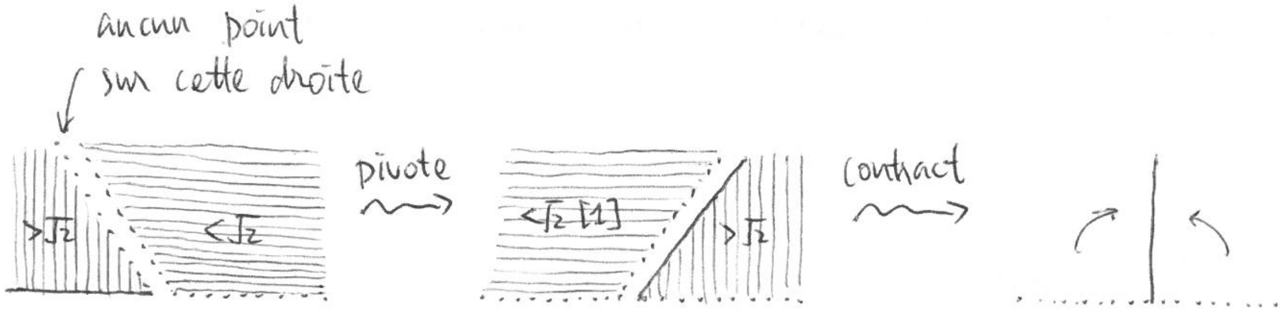
(Il est clair que les faisceaux supportés en codim ≥ 2 sont dans le noyau de Z)

Rmq. La condition de support est pour but d'éliminer les exemples pathologiques : en voici un.

$\mathcal{D} = D^b(\mathrm{Coh}\, C)$, $\sigma = (\mathrm{Coh}\, C, Z)$ la stabilité de pente

- $\mathrm{Coh}^{\#\sqrt{2}} C = \langle \mathrm{Coh}^{>\sqrt{2}} C, \mathrm{Coh}^{<\sqrt{2}} C[1] \rangle$
  est le coeur obtenu en pivotant $\mathrm{Coh}\, C$ en pente $\sqrt{2}$
  (Notons qu'aucun objet dans $\mathrm{Coh}\, C$ n'est de pente $\sqrt{2}$)

- $Z' : E \longmapsto i \cdot (\deg E - \sqrt{2} \cdot \mathrm{rg}\, E)$
  est une fonction de stabilité sur $\mathrm{Coh}^{\#\sqrt{2}} C$



$\sigma' = (\mathrm{Coh}^{\#\sqrt{2}} C, Z')$ ne satisfait pas la condition de support.

- $\mathrm{Ker}(Z'_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \cdot (1, \sqrt{2}) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}$
- mais $\forall\, 0 \neq E \in \mathrm{Coh}^{\#\sqrt{2}} C$ est semistable de pente 0

Rappelons que dans le théorème de déformation :
$\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ satisfait la condition de support ssi
$pr_2 : \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C})$ est un homéomorphisme local en $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$, ie. on peut déformer Z.
Ici il existe des E avec $Z'(E)$ arbitrairement proche de 0, on ne peut donc pas déformer Z'.

Pour des variétés de dimension plus grande, la construction des conditions de stabilité est plus difficile. ④

<u>Prop</u> X projective, lisse $/\mathbb{C}$, $\dim X \geq 2$.

Alors il n'existe pas de fonction de stabilité sur $\mathrm{Coh}\, X$.

<u>Dém</u> Supposons $\dim X = 2$

Prenons $p \in C \subset X$, un point et une courbe.

- $\cdots \subset \mathcal{O}_X(-2C) \subset \mathcal{O}_X(-C) \subset \mathcal{O}_X$ forme une chaîne infinie

  $\Rightarrow \mathrm{Im}\, Z(\mathcal{O}_C) = 0$

- De même, $\cdots \subset \mathcal{O}_C(-2p) \subset \mathcal{O}_C(-p) \subset \mathcal{O}_C$

  $\Rightarrow \mathrm{Im}\, Z(\mathcal{O}_p) = \mathrm{Re}\, Z(\mathcal{O}_p) = 0$, $\mathcal{O}_p$ est dans le noyau de Z. □

Donc, il faut d'abord construire des nouveaux coeurs.

II | <u>Pivotement</u>

<u>Déf</u> • $\mathcal{A}$ catégorie abélienne

Une <u>paire de torsion</u> est une paire de sous-catégories pleines $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ tq.
- $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$, $\forall T \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists\ 0 \to T \to A \to F \to 0$.

• (lemme) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ un coeur, $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ une paire de torsion pour $\mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}^{\#} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{F}[1] \rangle$ est aussi un coeur

On dit qu'il est le <u>basculement / pivotement</u> de $\mathcal{A}$ en $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$.

Ex. Etant donné une condition faible $(\mathcal{A}, Z)$.

pour $\forall \mu \in \mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{\leq \mu} := \langle A \text{ semistable} \mid \mu_Z(A) \leq \mu \rangle$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{A}^{> \mu} := \langle A \text{ semistable} \mid \mu_Z(A) > \mu \rangle$$

$(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ est une paire de torsion pour $\mathcal{A}$.

on obtient le coeur pivoté en μ : $\mathcal{A}^{\#\mu} = \langle \mathcal{A}^{>\mu}, \mathcal{A}^{\leq\mu}[1] \rangle$

- Si $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ est une condition de stabilité, on peut aussi faire pivoter Z : $Z^{\#\mu} := \frac{1}{i - \mu} \cdot Z$

  On obtient $\sigma^{\#\mu} = (\mathcal{A}^{\#\mu}, Z^{\#\mu})$ qui est de nouveau une condition.

  (c'est l'action du groupe $\widetilde{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$)

- Mais si σ est une condition faible, il faut faire plus attention !

Déf Une condition faible σ est dite d'avoir la <u>propriété de pivotement</u> si $\forall A \in \mathcal{A}$ avec $\mu^+(A) < +\infty$

(ici μ^+ est la pente la plus grande dans la filtration de HN de A)

il existe $0 \to A \to \widetilde{A} \to A_0 \to 0$.

avec
- $A_0 \in \mathcal{A}_0$
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}_0, \widetilde{A}[1]) = 0$.

Prop Si σ est une condition faible satisfaisant la propriété de pivotement, alors $\sigma^{\#\mu} = (\mathcal{A}^{\#\mu}, Z^{\#\mu})$ est aussi une condition de stabilité faible.

Ex X variété projective

la stabilité de pente $\sigma = (\mathrm{Coh}\, X, Z_H)$ satisfait la propriété de pivotement :

- $\mu^+(E) < +\infty \iff E$ sans torsion.
- $0 \to E \to E^{\vee\vee} \to E^{\vee\vee}/E \to 0$

  le saturé de E.

Construisons maintenant des conditions de stabilité sur des surfaces à partir des coeurs pivotés, en faisant apparaître ch_2.

Notations Pour $\beta \in \mathbb{R}$ on note

$$ch^\beta(E) = e^{-\beta H} . ch(E)$$
$$= (ch_0^\beta(E), ch_1^\beta(E), \dots ch_n^\beta(E)) \in H^*(X, \mathbb{R})$$

Notamment $ch_0^\beta E = ch_0 E$ ($= \mathrm{rg}\, E$)

$$ch_1^\beta E = ch_1 E - \beta H \cdot ch_0 E$$

$$ch_2^\beta E = ch_2 E - \beta H \cdot ch_1 E + \tfrac{1}{2}\beta^2 H^2 . ch_0 E$$

Thm Soit (X, H) une variété projective, lisse $/\mathbb{C}$.

Pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, la paire $\sigma_{\alpha,\beta} = (\mathrm{Coh}^{\#\beta} X, Z_{\alpha,\beta})$ est une condition de stabilité faible pour $D^b(X)$

(et pour le réseau $K_0(X) \longrightarrow \Lambda \simeq \mathbb{Z}^3$
$E \longmapsto (H^n . ch_0 E, H^{n-1} . ch_1 E, H^{n-2} ch_2 E)$)

où $Z_{\alpha,\beta} := i \cdot (H^{n-1} . ch_1^\beta E) + \frac{1}{2}\alpha . H^n . ch_0^\beta E - H^{n-2} . ch_2^\beta E$

De plus, si $\dim X = 2$, $\sigma_{\alpha,\beta}$ est une condition de stabilité.

Ex. Soit (S, H) une surface K3 polarisée de $\rho(S)=1$

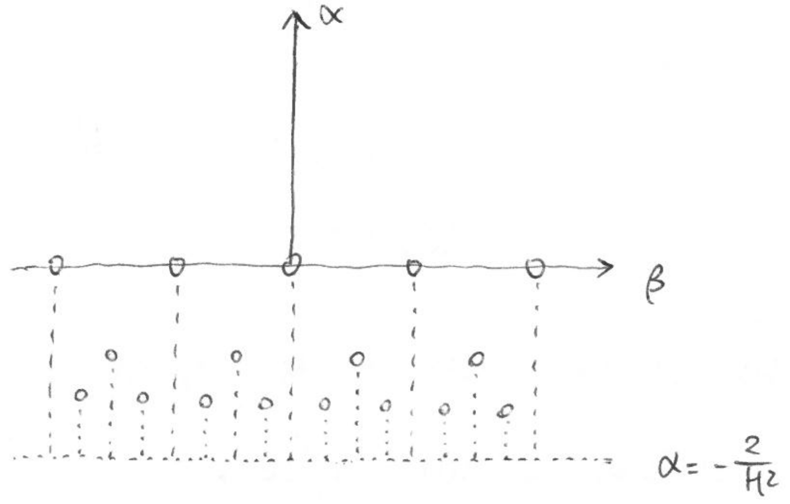
i.e. $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}\cdot H$.

Alors $\Lambda = H^0(S) \oplus NS(S) \oplus H^4(S) \simeq \mathbb{Z}^3$

On regarde $\mathrm{Stab}^+(S)$, la composante connexe de $\mathrm{Stab}(S)$ qui contient les $\sigma_{\alpha,\beta}$. $\mathrm{Stab}^+(S)$ est une variété complexe de dimension 3, avec une action du groupe $\widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})}$.

On a l'image suivante

$$\mathrm{Stab}^+(S) / \widetilde{GL_2^+(\mathbb{R})}$$
$$\downarrow$$
$$\{(\alpha,\beta) \mid \alpha > -\tfrac{2}{H^2}\} - \text{un sous-ensemble discret}$$



- c'est un revêtement galoisien.
- Les points enlevés correspondent aux faisceaux sphériques sur S.
- $\mathrm{Aut}_0(D^b(S))$: le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D^b(S))$ qui agit trivialement sur la cohomologie

$$\mathrm{Aut}_0(D^b(S)) \simeq \pi_1\left(\{\alpha > -\tfrac{2}{H^2}\} - \{pts\}\right) = \langle T_E^2 \mid E \text{ sphérique} \rangle$$

- Après un changement de variable $(\alpha \mapsto \sqrt{\alpha + \frac{2}{H^2}})$ on retrouve le demi-plan de Poincaré (~~enlevé~~ avec un sous-ensemble discret enlevé)

Les murs (l'endroit où il y a des objets strictement semistables) correspondent aux demi-cercles (droites dans le disque de Poincaré)

Démonstration du théorème

Point clé : vérifier que $Z_{\alpha,\beta}$ est une fonction de stabilité (faible).

- $E \in Coh^{>\beta}(X)$ ou $E \in Coh^{<\beta}(X)[1]$: calcul direct ; $Z_{\alpha,\beta}(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{\leq 0}$
- E semistable de pente β : $E[1] \in Coh^{\#\beta}(X)$.

$$H^{n-1}\cdot ch_1 E = \beta \cdot H^n \cdot ch_0 E.$$

$$Im(Z_{\alpha\beta}(E[1])) = - Im(Z_{\alpha,\beta}(E)) = 0.$$

$$Re(Z_{\alpha\beta}(E[1])) = - Re(Z_{\alpha,\beta}(E))$$

$$= H^{n-2}\cdot ch_2 E - \frac{1}{2}(\alpha+\beta^2)\cdot H^n \cdot ch_0 E$$

l'inégalité de Bogomolov - Gieseker

Pour E pente semistable, sans torsion

$$\Delta_H(E) = (H^{n-1}\cdot ch_1 E)^2 - 2H^n \cdot ch_0 E \cdot H^{n-2}\cdot ch_2 E \geq 0.$$

On a donc $Re(Z_{\alpha,\beta}(E[1])) \leq -\frac{1}{2}\alpha \cdot H^n \cdot ch_0 E \leq 0$.

ie. $Z_{\alpha,\beta}(E[1]) \in \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Propriété de HN et la condition de support

Idée ① Traitons d'abord le cas $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

- $\alpha,\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ les images $\{Re Z\}$, $\{Im Z\}$ sont discrètes. dans ce cas la propriété de HN est automatique grâce à un lemme de Bridgeland.
- (condition de support) on prend $Q = \Delta_H$.

  Il faut vérifier que $\Delta_H(E) \geq 0$ pour E $\sigma_{\alpha,\beta}$-semistable
  - si E $\sigma_{\alpha,\beta}$-semistable pour $\alpha \gg 0$ alors E est Gieseker semistable $\Rightarrow E$ pente semistable $\Delta_H(E) \geq 0$ par l'inégalité de BG.
  - sinon, on étudie le comportement de "wall-crossing" quand $\alpha \longrightarrow +\infty$

② Ayant traité les cas $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, la condition de support nous permet de déformer $\sigma_{\alpha,\beta}$, il suffit de montrer que l'on obtient bien les $\sigma_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\square$

Rmq Pour les variétés de dimension supérieure (i.e. ≥ 3), le manque d'analogue pour l'inégalité de BG est la difficulté principale.

Prop La condition faible $\sigma_{\alpha,\beta} = (\mathrm{Coh}^{\#\beta}(X), Z_{\alpha,\beta})$ satisfait la propriété de pivotement.

On a donc des conditions faibles $\sigma^{\#\mu}_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha > 0$, $\beta, \mu \in \mathbb{R}$.

Dém L'idée est de trouver l'analogue pour le dual double.

Soit $E \in \mathrm{Coh}^{\#\beta}(X)$ avec $\mu^+(E) < +\infty$.

$\exists\ 0 \to F[1] \to E \to T \to 0$ avec $T \in \mathrm{Coh}^{>\beta}$, $F \in \mathrm{Coh}^{<\beta}$ (strict puisque $\mu^+(E) < +\infty$)

Notons $\mathbb{D}(E) = \mathbb{R}\mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X)[1]$.

En dualisant la suite exacte on obtient

$$0 \to \underbrace{\mathcal{H}om(T, \mathcal{O}_X)}_{\in \mathrm{Coh}^{<-\beta}} \to H^{-1}(\mathbb{D}(E)) \to \underbrace{\mathcal{H}om(F[1], \mathcal{O}_X)}_{=0} \to$$
$$\to \underbrace{\mathcal{E}xt^1(T, \mathcal{O}_X)}_{\text{torsion}} \to H^0(\mathbb{D}(E)) \to \underbrace{\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)}_{\in \mathrm{Coh}^{>-\beta}} \to$$
$$\to \underbrace{\mathcal{E}xt^2(T, \mathcal{O}_X)}_{\text{torsion}} \to$$

$H^{-1}(\mathbb{D}(E)) \in \mathrm{Coh}^{<-\beta}$, $H^0(\mathbb{D}(E)) \in \mathrm{Coh}^{>-\beta}$

Considérons le cœur $\mathrm{Coh}^{\#(-\beta)}(X)$

- $H^j_{\mathrm{Coh}^{\#(-\beta)}}(\mathbb{D}(E)) = 0$ pour $j < 0$.
- $H^0_{\mathrm{Coh}^{\#(-\beta)}}(\mathbb{D}(E))$ est une extension de $H^{-1}(\mathbb{D}(E))$ et $H^0(\mathbb{D}(E))$
- $H^j_{\mathrm{Coh}^{\#(-\beta)}}(\mathbb{D}(E)) = H^j(\mathbb{D}(E))$ pour $j \geq 1$.

Notons $E^{\#} := H^{0}_{\mathrm{Coh}^{\#}(\beta)}(\mathbb{D}(E))$

et $E^{\#} \to \mathbb{D}(E) \to Q \to \quad \rightsquigarrow H^j(Q) = H^j(\mathbb{D}(E)) \quad j \geq 1$.

Q est supporté en codim ≥ 3.

On regarde le "dual double" :

$$\begin{tikzcd} & & E^{\#\#} \arrow[d] & \\ \mathbb{D}(Q) \arrow[r] & \mathbb{D}(\mathbb{D}(E)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathbb{D}(E^{\#}) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ & E & Q' \arrow[d] & \\ & & {} & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{Hom}(E, Q') = 0$, on a un morphisme induit

$$E \to E^{\#\#} \to E_0 \to$$

et un triangle $\mathbb{D}(Q) \to Q'[-1] \to E_0 \to$

Comme $H^j(Q) = H^j(Q') = 0$ pour $j \leq 0 \Rightarrow H^j(E_0) = 0$ pour $j < 0$

$0 \to E \to E^{\#\#} \to E_0 \to 0$ est donc une suite exacte courte. $\square$

III| Induction des stabilités

<u>But</u> On a des sous-catégories admissibles de type

$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, E_1, \dots E_m \rangle$ où E_i sont exceptionnels.

On veut induire des conditions de stabilité sur $\mathcal{D}_1$ en partant d'une condition faible sur $\mathcal{D}$.

<u>Ex</u>.
- variétés de Fano de dim. 3.
- cubique de dim. 4.
- Gushel-Mukai de dim. 4.

Thm Soit $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ une condition de stabilité faible sur $\mathcal{D}$. tq.
- $E_i \in \mathcal{A}$.
- $S(E_i) \in \mathcal{A}[1]$.
- $Z(E_i) \neq 0$
- $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \cap \mathcal{D}_1$, $\forall\, 0 \neq E \in \mathcal{A}_1$, $Z(E) \neq 0$.

Alors $\sigma_1 = (\mathcal{A}_1, Z_1 := Z|_{K_0(\mathcal{A}_1)})$ est une condition de stabilité sur $\mathcal{D}_1$.

Rmq • Pour variétés de Fano de dim 3.

$$S_X = \cdot \otimes \omega_X[3].$$

la condition "$S(E_i) \in \mathcal{A}[1]$" $\Leftrightarrow$ "$E_i \otimes \omega_X[2] \in \mathcal{A}$"

Donc pour les doubles pivotements $\sigma^{\#/\mu}_{\alpha,\beta}$, en bien choisissant les pentes on peut faire apparaître des "[2]".

• Mais cette méthode ne marche pas pour des variétés de dim 4 !

L'idée est de plonger la catégorie dans la catégorie dérivée d'une variété de dim 3 "non-commutative".

On note dans la suite $X \subset \mathbb{P}^5$ une hypersurface cubique lisse de dim 4.

Prop $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle$, $\mathcal{A}_X$ est une catégorie K3.

Prop Soit ℓ une droite dans X, non-contenue dans aucun plan

Considérons $\sigma : \tilde{X} = Bl_\ell X \longrightarrow X$

La projection $\pi : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^3$ est une fibration conique, qui définit une algèbre de Clifford $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{P}^3$

- Notons le diviseur exceptionnel D

  et $H = \sigma^* \mathcal{O}_X(1)$, $h = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$.

  On a $D = H - h$, $K_{\tilde{X}} = -H - 2h = 2D - 3H$.

- $D^b(\tilde{X}) = \langle D^b(X), D^b(\mathbb{P}^1)_0, D^b(\mathbb{P}^1)_1 \rangle$ ①

  $= \langle D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0), D^b(\mathbb{P}^3) \rangle$ ②

  Il existe un plongement de $\mathcal{A}_X$ dans $D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0)$.

  Plus précisément, $D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \rangle$

Rmq
- le foncteur de Serre sur $D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0)$ est donné par

  $S = \cdot \otimes_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_{-3}[3]$

- $\mathcal{B}_i \otimes_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_j = \mathcal{B}_{i+j}$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Dém Essentiellement on applique des mutations sur des décompositions ① et ② pour faire apparaître les mêmes objets exceptionnels.

①: $D^b(\tilde{X}) = \langle D^b(X), \underbrace{i_*\mathcal{O}_D, i_*\mathcal{O}_D(H)}_{D^b(\mathbb{P}^1)_0}, \underbrace{i_*\mathcal{O}_D(H-D), i_*\mathcal{O}_D(2H-D)}_{D^b(\mathbb{P}^1)_1} \rangle$

$= \langle D^b(X), i_*\mathcal{O}_D, i_*\mathcal{O}_D(H), i_*\mathcal{O}_D(h), i_*\mathcal{O}_D(H+h) \rangle$

$= \langle \underbrace{\mathcal{O}(-H), \mathcal{A}_X, \mathcal{O}, \mathcal{O}(H)}_{D^b(X)}, i_*\mathcal{O}_D, i_*\mathcal{O}_D(H), i_*\mathcal{O}_D(h), i_*\mathcal{O}_D(H+h) \rangle$

Serre

totalement orthogonaux

$= \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}, i_*\mathcal{O}_D, \mathcal{O}(H), i_*\mathcal{O}_D(H), i_*\mathcal{O}_D(h), i_*\mathcal{O}_D(H+h), \mathcal{O}(2h) \rangle$

$\mathbb{L}_{\mathcal{O}}$ $\mathbb{L}_{\mathcal{O}(H)}$ $\mathbb{R}_{\mathcal{O}(2h)}$

$= \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}(h-H), \underbrace{\mathcal{O}, \mathcal{O}(h)}, \underbrace{\mathcal{O}(H), i_*\mathcal{O}_D(h)}, \cancel{i_*\mathcal{O}_D(H+h)}, \mathcal{O}(2h), \mathcal{O}(H+h) \rangle$

$\mathbb{L}_{\mathcal{O}} \circ \mathbb{L}_{\mathcal{O}(h)}$

$= \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}(h-H), \underbrace{\mathcal{O}(H), \mathcal{O}(2h-H)}, \underbrace{\mathcal{O}, \mathcal{O}(h)}, \mathcal{O}(2h), \mathcal{O}(H+h) \rangle$

② : $$D^b(\tilde{X}) = \langle D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0), \underbrace{\mathcal{O}(-h), \mathcal{O}, \mathcal{O}(h), \mathcal{O}(2h)}_{D^b(\mathbb{P}^3)} \rangle$$

$$\overset{R_{\mathcal{O}(-h)}}{=} \langle \mathcal{O}(-h), \phi(D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0)), \mathcal{O}, \mathcal{O}(h), \mathcal{O}(2h) \rangle$$

$$\overset{\text{Serre}}{=} \langle \phi(D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0)), \mathcal{O}, \mathcal{O}(h), \mathcal{O}(2h), \mathcal{O}(H+h) \rangle$$

$\phi^* : D^b(\tilde{X}) \longrightarrow D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0)$ l'adjoint à gauche de ϕ.

$$\phi^*(\mathcal{O}(h-H)) = \mathcal{B}_1, \quad \phi^*(\mathcal{O}(H)) = \mathcal{B}_2[1], \quad \phi^*(\mathcal{O}(2h-H)) = \mathcal{B}_3.$$

En comparant les deux décompositions, on a

$$D^b(\mathbb{P}^3, \mathcal{B}_0) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \rangle \qquad \square$$

La construction de la condition de stabilité faible

Déf $E \in D^b(\mathbb{P}^n, \mathcal{B}_0)$

on prend $X \subset \mathbb{P}^{n+2}$ une cubique lisse et on regarde la projection $Bl_\ell X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ qui est une fibration conique et définit $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{P}^n$

on note $ch_{\mathcal{B}_0}(E) = ch(\mathrm{Forg}\, E)\left(1 - \frac{11}{32} H^2\right)$.

notamment
$$ch_{\mathcal{B}_0,0} = ch_0$$
$$ch_{\mathcal{B}_0,1} = ch_1$$
$$ch_{\mathcal{B}_0,2} = ch_2 - \frac{11}{32} \cdot H^2 \cdot ch_0$$

$\Rightarrow$ en particulier la stabilité de pente est la même.

thm (Bogomolov-Gieseker) E pente semistable

alors $\Delta_{\mathcal{B}_0}(E) = (H^{n-1} \cdot ch_{\mathcal{B}_0,1}(E))^2 - 2 \cdot H^n \cdot ch_{\mathcal{B}_0,0}(E) \cdot H^{n-2} ch_{\mathcal{B}_0,2}(E) \geq 0$

Maintenant on peut appliquer le même argument qu'avant :

notons $ch^{\beta}_{B_0} = e^{-\beta H} \cdot ch_{B_0}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

<u>Thm</u> Pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

$\sigma_{\alpha,\beta} = (Coh^{\#\beta}(\mathbb{P}^n, B_0), Z_{\alpha,\beta})$ est une condition faible.

$$\left(\text{pour} \quad \begin{array}{ccc} K_0(\mathbb{P}^n, B_0) & \longrightarrow & \Lambda \simeq \mathbb{Z}^3 \\ E & \longmapsto & (H^n ch_{B_0,0} E,\ H^{n-1} \cdot ch_{B_0,1} E,\ H^{n-2} ch_{B_0,2} E) \end{array} \right)$$

ici $Z_{\alpha,\beta} = i \cdot H^{n-1} \cdot ch^{\beta}_{B_0,1}(E) + \frac{1}{2}\alpha \cdot H^n \cdot ch^{\beta}_{B_0,0}(E) - H^{n-2} \cdot ch^{\beta}_{B_0,2}(E)$

Elle satisfait la propriété de pivotement

et on a des conditions faibles de type $\sigma^{\#\mu}_{\alpha,\beta}$.

<u>Thm</u> Il existe des conditions de stabilité sur $\mathcal{A}_X$.

<u>Dém</u> Par le théorème principal sur l'induction des stabilités,

on cherche une condition de stabilité faible de type $\sigma^{\#\mu}_{\alpha,\beta}$

tq. ① $\forall i \in \{1,2,3\}$ B_i, $S(B_i)[-1] = B_{i-3}[2]$ sont tous dans $Coh^{\#\mu}_{\alpha,\beta}(\mathbb{P}^3, B_0)$.

② $\forall\, 0 \neq E \in \mathcal{A}_X \cap Coh^{\#\mu}_{\alpha,\beta}(\mathbb{P}^3, B_0)$ $\quad Z(E) \neq 0$.

② est facile : si $Z(E) = 0$, Z est supporté en codim. ≥ 3.

on a $\mathrm{Hom}_{B_0}(B_0, E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathrm{Forg}(E)) \neq 0$.

donc $E \notin \mathcal{A}_X$.

Pour ①, remarquons que B_i est pente semistable de pente $\frac{i}{2} - \frac{5}{4}$.

avec $\Delta_{B_0}(B_i) = 0$. De plus, B_i est $\sigma_{\alpha,\beta}$-semistable pour tout $\alpha > 0$.

On prend $\beta = -1$: $\mu(B_{-2}) < \mu(B_{-1}) < \mu(B_0) < -1 < \mu(B_1) < \mu(B_2) < \mu(B_3)$

Donc $B_1, B_2, B_3 \in Coh^{\#(-1)}$, $B_{-2}[1], B_{-1}[1], B_0[1] \in Coh^{\#(-1)}$

Pour $\alpha \ll 1$ $\quad \mu_{\alpha,-1}(B_{-2}[1]) < \mu_{\alpha,-1}(B_{-1}[1]) < \mu_{\alpha,-1}(B_0[1]) < 0$

$$< \mu_{\alpha,-1}(B_1) < \mu_{\alpha,-1}(B_2) < \mu_{\alpha,-1}(B_3).$$

donc en prenant $\mu = 0$.

$$B_1, B_2, B_3, B_{-2}[2], B_{-1}[2], B_0[2] \in \mathrm{Coh}^{\#0}_{\alpha,-1}(\mathbb{P}^3, B_0). \quad \square$$