Applications de la théorie de Bridgeland sur les surfaces K3 : Brill-Noether (d'après Bayer) et programme de Mukai (d'après Feyzbakhsh).

(E. Arbarello)

X une surface K3, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot[H]$,

$C \in |H|$, $g(C) = g$.

$\beta \in \mathbb{R}$, $F \in \mathrm{Coh}(X)$

$$\mu_\beta(F) = \begin{cases} \dfrac{\deg F}{r(F)} - \beta, & r(F) \neq 0 \\ +\infty, & r(F) = 0 \end{cases}$$

$r(F) = ch_0(F)$

$$\mathrm{Coh}(X) \supset \begin{cases} \mathcal{T}^\beta = \{A \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\beta^-(A) > 0\} \\ \mathcal{F}^\beta = \{A \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\beta^+(A) \leq 0\} \end{cases}$$

$\mathrm{Coh}^\beta(X) = \langle \mathcal{F}^\beta[1], \mathcal{T}^\beta \rangle$ obtenue par basculement.

$E \in \mathrm{Coh}^\beta(X)$, $E : E^{-1} \longrightarrow E^0$

Si $E \in Coh^\beta(X)$ on a une suite exacte dans $Coh^\beta(X)$:

$$\underset{\mathcal{F}^\beta[1]}{\overset{\cap}{H^{-1}(E)[1]}} \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \underset{\mathcal{T}^\beta}{\overset{\cap}{H^0(E)}} \qquad (*)$$

<u>Lemme de base</u> : $E \in \mathcal{T}^\beta \subset Coh^\beta(X)$

un sous-objet $B \hookrightarrow E$ dans $Coh^\beta(X)$ consiste des données suivantes

1) $B \in \mathcal{T}^\beta$
2) un morphisme $f : B \to E$ tel que $\ker f \in \mathcal{F}^\beta$.

<u>Dém</u>. Soit $B \overset{f}{\hookrightarrow} E$ un sous-object. On considère un triangle $B \xrightarrow{f} E \to C$.

On a : $H^{-1}(E) = 0 \Rightarrow H^{-1}(B) = 0$ et on a

$$0 \to \underset{\mathcal{F}^\beta}{\overset{\cap}{H^{-1}(C)}} \longrightarrow \underset{B}{\overset{\shortparallel}{H^0(B)}} \xrightarrow{f} \underset{E}{\overset{\shortparallel}{H^0(E)}} \quad \Rightarrow \quad 1) \text{ et } 2)$$

L'implication inverse est aussi facile.

C.Q.F.D.

On denote par $\Lambda(X)$ le réseau de Mukai

$$\Lambda(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus NS(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

Si $E \in \mathcal{D}(X)$ le vecteur de Mukai est:

$v(E) = (r, CH, s) \equiv (r, C, S) \in \mathbb{R}^3$

$r = r(E)$, $CH = c_1(E)$, $s = \chi(E) - r = ch_2(E) + r$

On définit:

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "Z_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "v"'] & \mathbb{C} \\
& \Lambda_{\mathbb{R}}(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

[$Z_{\alpha\beta}$ factorize à travers v, et, par abus de language, on écrit $Z_{\alpha\beta}(E) = Z_{\alpha\beta}(v(E))$]

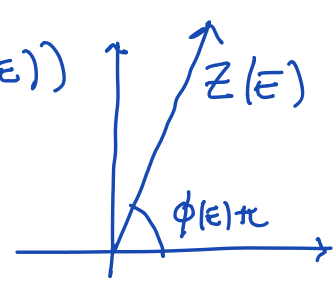
$$Z_{\alpha\beta}(E) = Z_{\alpha\beta}(v(E)) =$$

$$= -s + \beta CH^2 - \frac{r}{2}(\beta^2 - \alpha^2)H^2 + i(C - \beta r)\alpha H^2$$

<u>Remarque</u>: $\mu_\beta(E) = \dfrac{\Im Z_{\alpha\beta}(E)}{r\alpha H^2}$, $r \neq 0$.

<u>Pente</u>: $\nu_{\alpha\beta}(E) = \dfrac{-\Re Z_{\alpha\beta}(E)}{\Im Z_{\alpha\beta}(E)}$,

<u>Phase</u>: $\phi_{\alpha\beta}(E) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arcot}(-\nu_{\alpha\beta}(E))$



<u>Théorème</u> $\sigma_{\alpha\beta} := (\mathrm{Coh}^{\beta}(X), Z_{\alpha\beta})$ est une condition de stabilité si la condition suivante est satisfaite :

$$(0) \begin{cases} \forall\, \delta \in \Lambda(X), \text{ avec } \delta^2 = -2,\ \mu_\beta(\delta) = 0,\ r(\delta) > 0 \\ \text{on a : } \operatorname{Re} Z_{\alpha\beta}(\delta) > 0. \end{cases}$$

<u>Dém.</u> Il faut dém. que $\operatorname{Im} Z_{\alpha\beta} \geq 0$ et que $\operatorname{Im} Z_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} Z_{\alpha\beta} < 0$. La suite $(*)$ de p. 2 donne $\operatorname{Im} Z_{\alpha\beta} \geq 0$ (pour la Remarque).
Si $\operatorname{Im} Z_{\alpha\beta}(E) = 0$, alors $\operatorname{Im} Z_{\alpha\beta} H^0(E) = \operatorname{Im} H^{-1}(E) = 0$. Si non nul, $H^0(E)$ est de torsion (0-dim) et $\operatorname{Re} Z_{\alpha\beta}(H^0(E)) = -ch_2(E) < 0$. Si $H^{-1}(E) \neq 0$ $\mu_\beta(H^{-1}(E)) = 0$
$\Rightarrow H^{-1}(E)$ μ_β-semist. On peut le supposer stable et donc $v(H^{-1}(E))^2 \geq -2$. Si on a $v^2 \geq 0$ $\underbrace{\text{un calcul direct donne } \operatorname{Re} Z_{\alpha\beta}(H^{-1}(E)) > 0}_{\text{i.e. } \operatorname{Re} H^{-1}(Z_{\alpha\beta}(H^{-1}(E)[1])) < 0}$. Si on a $v^2 = -2$ alors $\mu_\beta(H^{-1}(E)) = 0$, $r(H^{-1}(E)) > 0$ et on est protégé par la condition (0) C.Q.F.D.

On définit :

$$\mho(X) = \{ (\beta,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \mid Z_{\alpha\beta} \text{ satisfait } (0) \}$$

<u>Bridgeland</u> : La topologie de $\mho(X)$ induite par $U(X) \subset \mathrm{Stab}(X)$ est la topologie induite par $U(X) \subset \mathbb{R}^2$.

<u>Murs et chambres</u> On fixe $v \in \Lambda(X)$

$$U(X) \supset \mathcal{W}(v) = \bigcup_{\gamma} W_\gamma(v)$$

les murs

union localement finie de sous-variétés de codimension$_{\mathbb{R}}$ $= 1$

$$U(X) \setminus \mathcal{W}(v) = \bigcup_{i\in I} C_i(v)$$

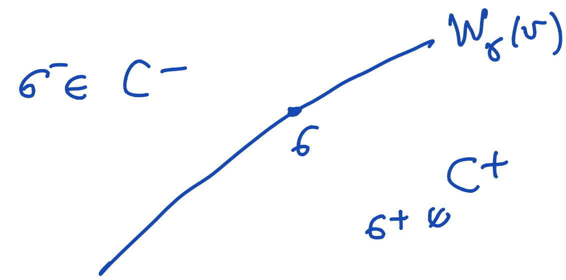
les chambres

décomp. en composantes connexes

Propriétés :

1) Si $E \in \mathcal{D}(X)$ $v(E) = v$, la σ-stabilité (semist.) de E est indépendante de $\sigma \in C_i(v)$

2) Pour σ général dans $W_\gamma(v)$, il existe E, avec $v(E)=v$, qui est strictement semistable; et qui est instable pour les cond. de stabilité dans une des chambres adjacentes à $W_\gamma(v)$, et stable pour toutes les cond. dans l'autre chambre :



$\exists\, E \in \mathcal{D}(X)$

avec $v(E)=v$

E strict σ-semist.

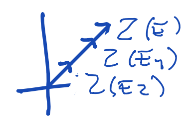
E σ^- inst et σ^+ stable

<u>Typiquement</u> :

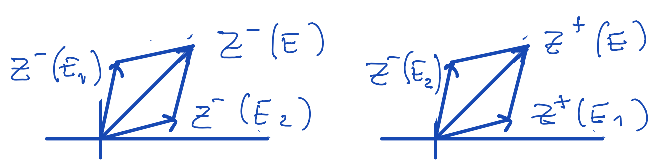
σ-Jordan-Hölder

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

$\sigma^+, \sigma^-, \sigma$-stables



σ^--Harder-Narasimhan



On note que, à une constante mult. près, $Z_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^3 \cong \Lambda_{\mathbb{R}}(X) \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

est déterminée par son noyau :

$$\operatorname{Ker} Z_{\alpha\beta} \equiv \left(r, \beta r H, \frac{r}{2}(\alpha^2+\beta^2) H^2\right) \cdot \mathbb{R}$$

On considère :

coord (r, c, s)

$$z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\beta, \alpha) \longmapsto \left(r, \beta r H, \frac{r}{2}(\alpha^2+\beta^2) H^2\right)$$

et

coord (x, y)

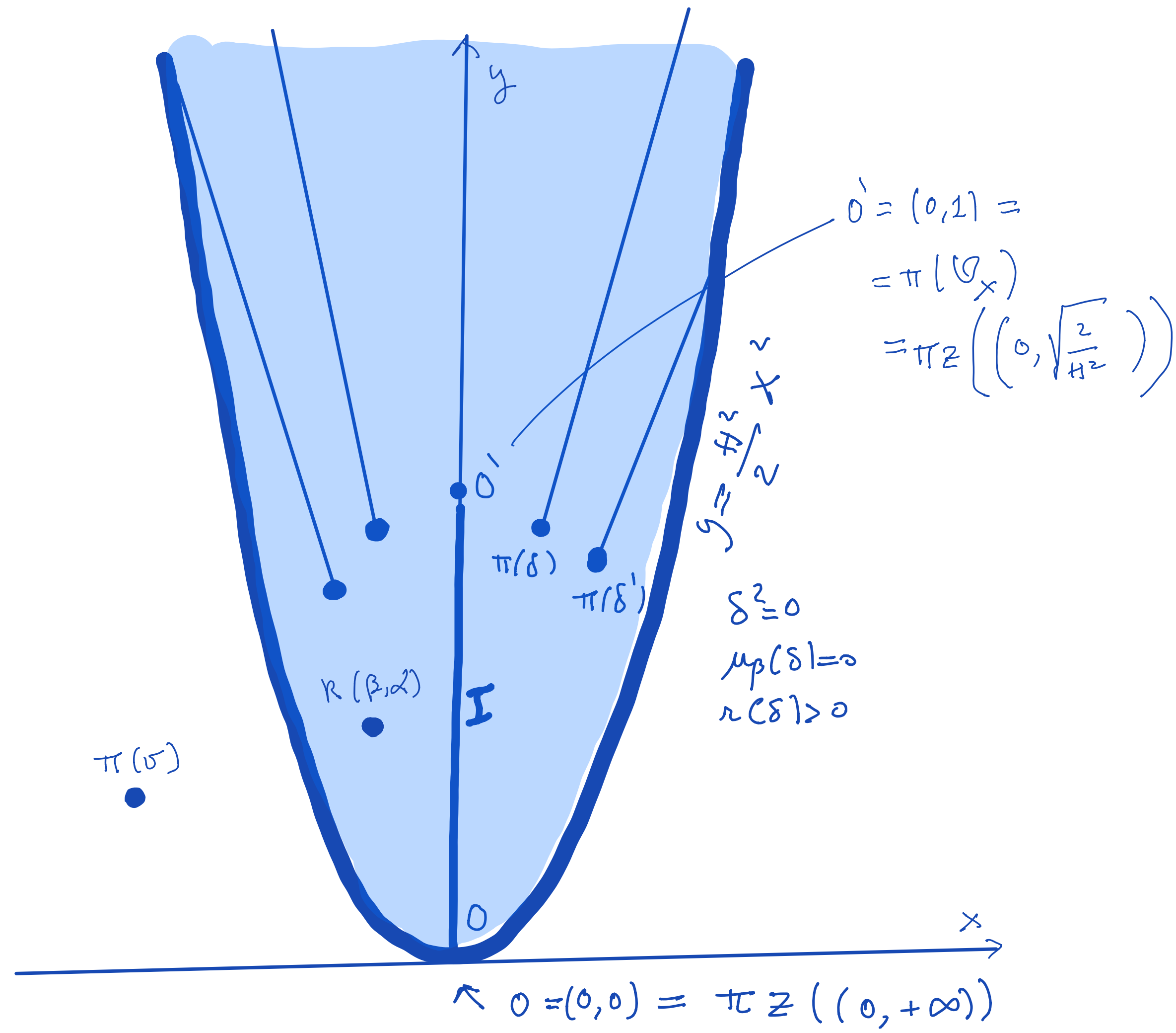
$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{s=0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^3$$

$$v = (r, c, s) \longmapsto \left(\frac{c}{s}, \frac{r}{s}\right) = \pi(v)$$

<u>Def</u> • $K(\beta, \alpha) = \pi z(\beta, \alpha)$

$$= \left(\frac{2\beta}{H^2(\alpha^2+\beta^2)}, \frac{2}{H^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)$$

• Si $v(E) = v$ on écrit aussi : $\pi(E)$ au lieu de $\pi(v(E))$



$$I = \pi Z\left[\left(0,\sqrt{\tfrac{2}{H^2}}\right), (0,+\infty)\right]$$

La zone ombragée est l'image par π de $U(X)$, la courbe $y = \frac{H^2}{2}x^2$ est l'image de l'axe $\alpha = 0$. Les points de $\mathbb{R}^3$, ou de $\mathbb{PR}^3$, représentent des vecteurs de Mukai, mais ils peuvent aussi représenter des conditions de stabilité $R(\beta,\alpha)$.

<u>Murs</u>: v fixé, $\sigma_{\alpha\beta} \in U(X)$ est sur un mur si $\exists$ E $\sigma_{\alpha\beta}$-semistable avec $v(E) = v$, et $F \subset E$ t.q. $\phi_{\alpha\beta}(F) = \phi_{\alpha\beta}(E)$. Si

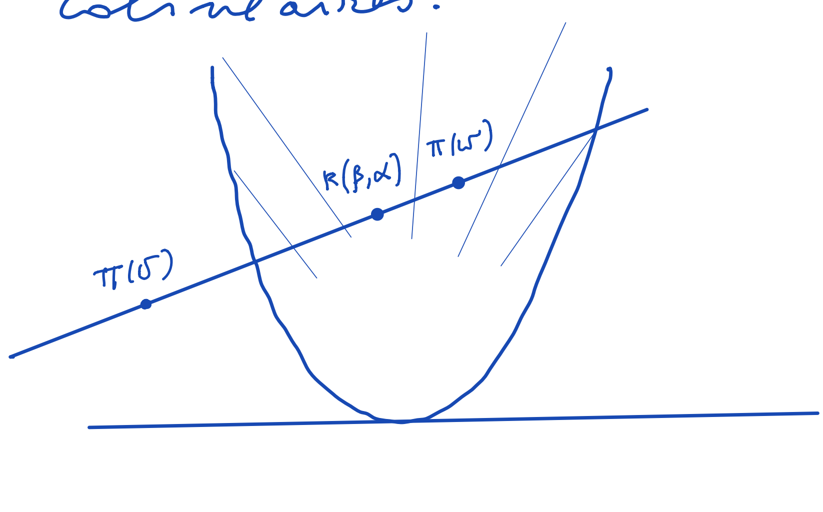
$v = v(E) = (r, c, s)$, $w = v(F) = (r', c', s')$

un simple calcul montre que:

$$\phi_{\alpha\beta}(E) = \phi_{\alpha\beta}(F) \iff \begin{vmatrix} 2 & 2\beta & H^2(\beta^2+\alpha^2) \\ r & c & s \\ r' & c' & s' \end{vmatrix} = 0$$

i.e.

$\iff$ $\pi(v(E))$, $\pi(v(F))$, $K(\beta, \alpha)$ colinéaires.



__Théorème__ (Chambre de Gieseker) On fixe $v \in \Lambda(X)$. Supposons $r>0$, $c>0$, $c-r\beta>0$ ou bien $r=0$, $c>0$. Alors $\exists\ \alpha_0$ t.q. E (avec $v(E)=v$) est $\sigma_{\alpha\beta}$-semist. $\forall \alpha > \alpha_0$

$\iff$ E est un faisceau β-Gieseker semistable.

__Esquisse de la dém de $\Rightarrow$)__ Relation entre Z et le polynome d'Hilbert :

$$\frac{Z_{\alpha\beta}(E)}{r} = i\, \frac{c-\beta r}{r}\, \alpha H^2 - \frac{(s-\beta c)H^2}{r} - \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

1er coeff. du poly d'Hilb

2ème coeff. du poly d'Hilb

$$=: i\, \alpha H^2 \mu_{\beta,H}(E) - \nu_{\beta,H}(E) - \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

On va démontrer que E est un faisceau.

Un calcul donne

$$(1) \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \phi_{\alpha\beta}(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{supp}(F) = X \\ \frac{1}{2} & \text{si } \dim \operatorname{Supp}(F) = 1 \\ 1 & \text{si } \dim \operatorname{supp}(F) = 0 \end{cases}$$

On considère la suite $(*)$ de p. 2,

où l'on suppose $r(E)>0$ et $\mu_{\beta,H}(E)>0$.

Supposons $H^{-1}(E)\neq 0$. Puisque $H^{-1}(E)$ n'a pas de torsion, la formule (1) donne $\lim_{\alpha\to+\infty}\phi_{\alpha\beta}(H^{-1}(E))=0$ et donc $\lim_{\alpha\to+\infty}\phi_{\alpha\beta}(H^{-1}(E)[1])=1$.

D'autre part $r(E)>0 \Rightarrow \lim_{\alpha\to+\infty}\phi_{\alpha\beta}(E)=0$, ce qui est absurd.

Donc $H^{-1}(E)=0$ et E est un faisceau.

Si E n'est pas β-Gieseker stable on a $A\subset E$ dans $Coh(X)$, avec

$\mu_{\beta,H}(A)>\mu_{\beta,H}(E)$, ou bien $\mu_{\beta,H}(A)=\mu_{\beta,H}(E)$

et $\nu_{\beta,H}(A)>\nu_{\beta,H}(E)$. Supposons

$$\mu_{\beta,H}(A)=\rho\,\mu_{\beta,H}(E),\quad \text{avec } \rho>1.$$

$$\frac{Z(A)}{r(A)}=x_A+\alpha^2R+i\,\alpha\rho S \qquad R,S\in\mathbb{R}$$

$$\frac{Z(E)}{r(E)}=x_E+\alpha^2R+i\,\alpha S$$

$$\phi(A)<\phi(E)\Rightarrow \frac{x_A+\alpha^2R}{\alpha\rho S}>\frac{x_E+\alpha^2R}{\alpha S}$$

pour $\alpha\to+\infty \Rightarrow \frac{\alpha R}{\rho S}>\frac{\alpha R}{S}\Rightarrow \rho<1$

ce qui est absurd. Le cas $\mu_{\beta,H}(A)=\mu_{\beta,H}(E)$

est plus simple. C.Q.F.D.

Espaces de modules

Théorème (Mukai, O'Grady, Huybrechts, Toda, Lieblich, Alper–Halpern-Leistner–Heinloth)

Soit $v \in \Lambda(X)$ primitif, et σ une condition de stabilité. Alors

$$M_{v,\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \text{classes de S-equiv. de } E \in \mathcal{D}(X) \\ \text{semistables} \end{array} \right\}$$

est une variété projective, symplectique, possiblement singulière, de dimension égale à v^2+2.

Brill-Noether

(pour les fibrés linéaires sur une courbe, d'après Bayer)

X K3 $\quad \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot[H]. \quad C \in |H|$

$$V_d^r(C) = \{ L \in \mathrm{Pic}^d(C) \mid \deg L = d,\ h^0(L) = r+1 \}$$

$$\rho = \rho(g,d,r) = g - (r+1)(g-d+r) = g - h^0(L)\, h^1(L)$$

On suppose que $d \leq g$ et que L n'a pas de points base.

Théorème 1. $\rho < 0 \iff V_d^r(C) = \emptyset$

2. $\rho \geqq 0 \Rightarrow \dim V_d^r(C) = \rho$.

Considérons la courbe universelle $\begin{array}{c}\mathcal{C}\\ \downarrow \\ |H|\end{array}$ et la variété de Brill Noether universelle $\begin{array}{c}\mathcal{V}_d^r\\ \downarrow \pi \\ |H|\end{array}$

où $\pi^{-1}(C) = V^r_d(C)$.

Le théorème 1 est une conséquence du

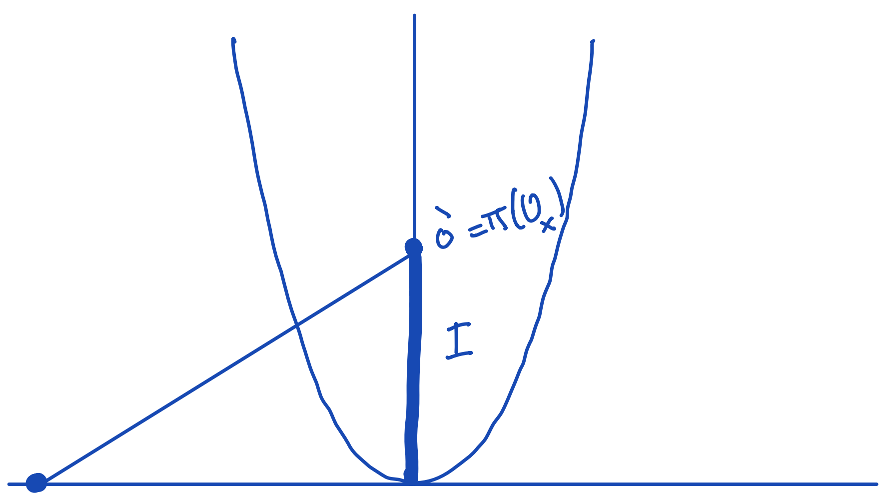
<u>Théorème 2</u>. 1) $\rho < 0 \iff U^r_d = \emptyset$

2) $\rho \geqq 0 \implies \dim U^r_d = \rho + g$

<u>Dém</u> (Th. 2.) $C \in H$, $C \xhookrightarrow{\iota} X$

$L \in V^2_d(C)$ s.p.b.

$v = v(L_* L) = (0, 1, d-g+1)$



$v = \left(0, \dfrac{1}{d-g+1}\right) = v(L_* L)$

A) Pas de murs pour v qui découpent I

Dém. $v(\iota_* L)$ primitif $\Rightarrow$ $\iota_* L$ Gieseker stable $\Rightarrow$ $\sigma_{\alpha,0}$-stab pour $\alpha \gg 0$. Si $\iota_* L$ strict. semist. pour $\beta = 0$, A_i facteurs de J-H de $\iota_* L$ (pour $\sigma_{\alpha,0}$), $i = 1, \dots, n$. Supposons $n > 1$

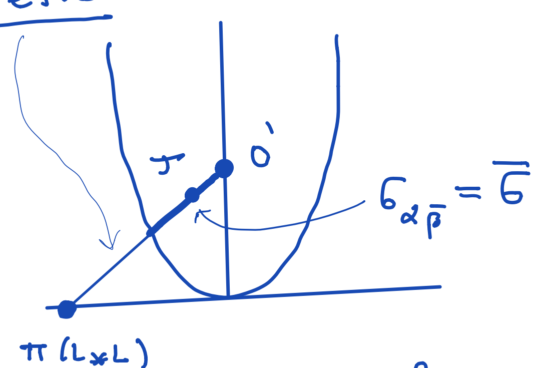
$$\operatorname{Im} Z_{\alpha 0}(A_i) = c_i \alpha H^2 \qquad i = 1, \dots, n$$

$\nu_{\alpha,0}(A_i) = \nu_{\alpha,0}(E) \Rightarrow c_i > 0$.

$\operatorname{Im} Z_{\alpha,0}(\iota_* L) = \alpha H^2 = \sum c_i \alpha H^2 \Rightarrow n = 1$.

Ce qui est absurd.

B) Mur de Brill-Noether



On prends $-1 < < \bar\beta < 0$

$K(\bar\beta, \alpha) \in J$

$J \subset \left\{ \begin{matrix} \text{Mur de} \\ \text{Gieseker} \end{matrix} \right\}$

- $\mathcal{O}_x \in \operatorname{Coh}^{\bar\beta}(X)$ est $\bar\sigma$-stable :

Dém. $\mu_{\bar\beta}(\mathcal{O}_x) = -\bar\beta > 0 \Rightarrow \mathcal{O}_x \in \mathcal{T}^{\bar\beta} \subset \operatorname{Coh}^{\bar\beta}(X)$

Lemme de base $\Rightarrow$ $B \hookrightarrow \mathcal{O}_x$

Sous-objects dans $\mathrm{Coh}^{\bar\beta}(X)$ est donné par

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \\ \mathcal{J}^{\bar\beta} \arrow[u, phantom, "\ni"] & \mathcal{T}^{\bar\beta} \arrow[u, phantom, "\ni"] & I \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\, Z_{\alpha\bar\beta}\, F \le 0$, $\mathrm{Im}\, Z_{\alpha\bar\beta}\,(B) > 0 \Rightarrow$

$\mathrm{Im}\, Z_{\alpha\bar\beta}\,(I) > 0$.

$c_1(I) - \bar\beta > 0 \Rightarrow \quad I = I_Z \quad \dim Z = 0$

Si $F \neq 0$ on a $0 \to \underset{r}{F} \to \underset{r+1}{B} \to I \to 0$

$c = c_1(F) = c_1(B)$ et $\frac{c}{r} \le \bar\beta$, $\frac{c}{r+1} > \bar\beta$

absurd.

Donc $F = 0$ et $B = I_Z$, mais

$\bar\nu(I_Z) < \nu(\mathcal{O}_X)$ C.Q.F.D.

– $\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{ev} L \ast L$ injective dans $\mathrm{Coh}^{\bar\beta}(X)$

<u>Dém</u>. Si $K = \mathrm{Ker}\, ev$ e $\bar\nu = \nu_{\alpha\bar\beta}$,

la semist. de $\mathcal{O}_X^{r+1} \Rightarrow \bar\nu(K) \le \bar\nu(\mathcal{O}_X)$.

Mais on doit avoir "=", autrement

$\mathcal{O}_X^{r+1}/K$ déstabilize $L \ast L$.

K est semistable sur J autrement $\mathcal{O}_X^{r+1}$ ne le serait pas. Si $K \not\equiv 0$ on choisi un quotient $\mathcal{O}_X^{r+1} \to \mathcal{O}_X$ t.q. $K \to \mathcal{O}_X$ est non-trivial ce qui est absurde puisque $\mathcal{O}_X$ est stable. C.Q.F.D.

<u>Donc</u>: on a $\mathcal{O}_X^{r+1} \hookrightarrow \iota_* L \twoheadrightarrow W$ (**)

dans $\mathrm{Coh}^{\bar\beta}$; tous de même pente

e $\sigma(W) = (-(r+1), H, d-g+r)$.

$[W = E_L[1]$, E_L le fibré de Lazarsfeld-Mukai de $L]$.

Soit $\sigma_{\alpha\beta} = \bar\sigma$. Alors W est $\bar\sigma$-stable.

<u>Lemme</u>. $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{O}_X) \overset{①}{=} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, W) \overset{②}{=} 0$

<u>Dém</u> On obtient ② appliquant $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, -)$ à (**). Si $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{O}_X) \neq 0$, alors il existe un morphisme non nul $\iota_* L \to \mathcal{O}_X$, mais si $\sigma_{\alpha\beta}$ est une condition de stabilité avec $k(\alpha,\beta)$ juste au

dessous de $R(\alpha, \bar{\beta})$, on a L_*L et $\mathcal{O}_X$ $\sigma_{\alpha\beta}$-stable et $\nu_{\alpha\beta}(L_*L) > \nu_{\alpha\beta}(\mathcal{O}_X)$ ce qui est absurde. C.Q.F.D.

<u>Dém</u> (de la stabilité de W). W est $\bar{\sigma}$-semistable. Soient $A_1, \dots A_n$ les facteurs de J-H de W pour $\bar{\sigma}$.

On a $\sum_{i=1}^{n} c(A_i) = c(W) = 1$. Suppos. $n > 1$.

Soit $A = A_i$, pour un i. $\pi(v(A))$ $\pi(v)$ et $\pi v(\mathcal{O}_X)$ sont colinéaires.

Donc $v(A) = x v + y\, v(\mathcal{O}_X)$

$$\equiv (y, x, kx + y)$$
$$= (r(A), c(A), k\, c(A) + r(A)).$$

où $k = d - g + 1$

Si $A \neq \mathcal{O}_X$, on a $-\chi(A, \mathcal{O}_X) \geqslant 0$

et aussi $c(A) - \bar{\beta}\, r(A) \geqslant 0$,

et donc $c(A) > 0$; i.e. $c(A) = 1$

Donc si $n > 1$, on contredit le lemme. C.Q.F.D.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{O}_X^{r+1} \hookrightarrow L * L \longrightarrow W = E_L[1]$

est la suite de JH pour $L*L$ dans $\mathrm{Coh}^{\beta}(X)$, et on a un morphisme

$$\varphi : U_d^r \longrightarrow M_{\bar{\sigma},w}(X)$$
$$L \longmapsto E_L[1] = W \qquad v(W) = w.$$

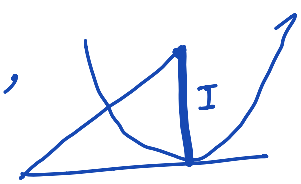
Observons que, si $[W] \in M_{\bar{\sigma},w}(X)$,

$$\dim \mathrm{Ext}^1(W, \mathcal{O}_X) = -\langle v(W), v(\mathcal{O}_X)\rangle > r+1.$$

On peut donc considérer

$$[0 \to \mathcal{O}_X^{r+1} \to F \to W \to 0] \in \mathrm{Gr}(r+1, \mathrm{Ext}^1(W, \mathcal{O}_X))$$

Puisque il n'y a pas de murs pour $v(F) = v(L*L)$ découpant I,



$v(F)$

F est $\sigma_{\alpha,0}$ stable pour $\alpha \gg 0$ et donc Gieseker stable et donc pur, ce qui entraîne $F = L*L$, pour quelque $L \in U_d^r$, i.e.

$$\varphi^{-1}(W) \cong \mathrm{Gr}(r+1, \mathrm{Ext}^1(W, \mathcal{O}_X)).$$

le théorème est démontré en observant que, pour le Lemme,

$$\dim \mathrm{Ext}^1(W, \mathcal{O}_X) = -\langle v(W), v(\mathcal{O}_X)\rangle$$
$$= g - d + 2r + 1$$

$$\dim \mathrm{Gr}(r+1, \mathrm{Ext}^1(W, \mathcal{O}_X)) = (r+1)(g-d+r)$$
$$= g - s$$

$$\dim M_{\bar{6}, w}(X) = w^2 + 2 = 2s$$

C.Q.F.D

Programme de Mukai

(d'après Fayzbakhsh)

X K3, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot [H]$

$C \in |H|$ lisse, $C \hookrightarrow X$. On

Considère de cas pour $g = g(C)$

1) $g(C) = rs + 1$ $r \geq 2$, $s \geq 5$

$$v = (r, H, s) \equiv (r, 1, s)$$

2) $g(C) = p+1$, $p \geq 13$, p prime.

$$v = (4, 2, p)$$

Dans les deux cas v est primitif et $v^2 = 0$. On considère

1) $$\begin{aligned} M_{v,H}(X) &\xrightarrow{\varphi} M_C(r, 2rs, r+s) \\ E &\longmapsto E|_C \end{aligned}$$

$$M_C(r, 2rs, r+s) = \left\{ F \text{ f.s. sur } C \;\middle|\; \begin{array}{l} r(F) = r \\ \deg F = 2rs \\ h^0(F) = r+s \end{array} \right\}$$

2) $$\begin{aligned} M_{v,H}(X) &\xrightarrow{\varphi} M_C^{st}(4, 4p, p+4) \\ E &\longmapsto E|_C \end{aligned}$$

<u>Théorème</u> (Feyzbakhsh) φ est un isomorphisme.

<u>Remarques</u>

1) Dans les deux cas $M_{v,H}(X)$ est une surface K3, et le théorème montre que C détermine la surface X dont elle est section

hyperplane. En effet, il faudrait vérifier, comme dans le cas $r=2$, que les lieux de Brill-Noether $M_C(r, 2rs, 2+s)$ et $M_C(4, 4p, p+4)$ sont des partenaires de Mukai de X.

2) Même l'injectivité de φ est surprenante, puisque, pour une courbe générale, les deux lieux de Brill-Noether sont vides. Le théorème montre qu'une courbe section hyperplane d'une K3 peut se characteriser pour avoir des fibrés vectoriels, de rang ≥ 2, qui sont exceptionnels du point de vue de Brill-Noether, ce qui n'est pas possible si on se limite au cas de rang $=1$.

<u>Idée de la dém. de l'injectivité de φ dans le cas 1).</u>

Deux triangles dans $\mathcal{D}(X)$

(A) $\quad E \to L_X(E|_C) \to E(-H)[1]$

(B) $\quad \mathcal{O}_X^{h^0(E)} \xrightarrow{ev} E \longrightarrow K_E = C(ev)$

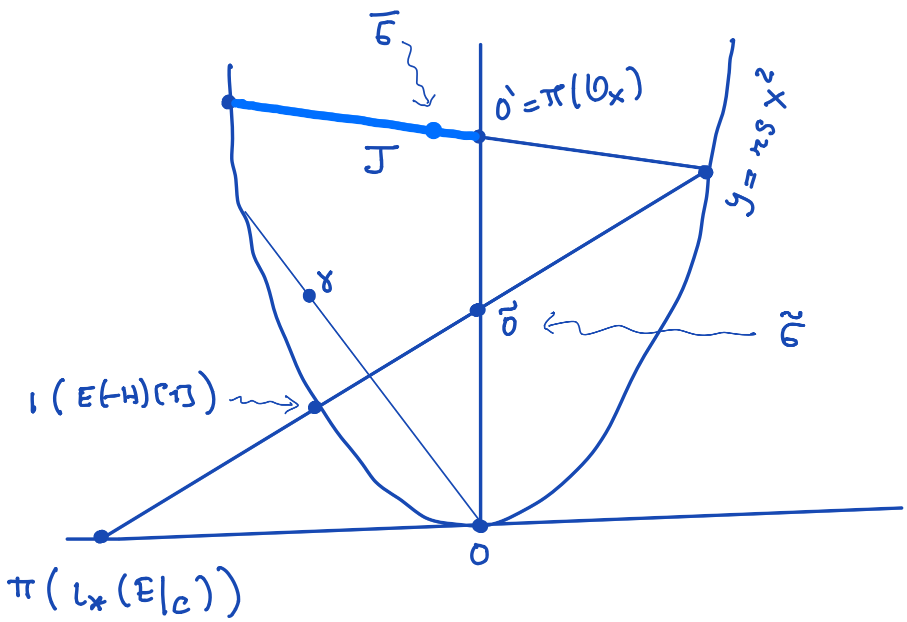
$v(E) \equiv (r, 1, s) \qquad H^2 = 2rs$

$v(L_*(E|_C)) \equiv (0, r, -r(r-2)s)$

$v(E(-H)[1]) \equiv (-r, r-1, -(r-1)^2 s)$

$v(K_E) = (r-h, 1, s-h) \qquad h = h^0(E)$

On considère la figure suivante :



Ici : $\overline{\sigma} = \sigma_{\alpha\overline{\beta}}$ avec, $-1 \ll \overline{\beta} < 0$.

$\tilde{\sigma} = \sigma_{\tilde{\alpha},0}$

les pas de la dém. de l'inj. de φ sont :

1) E, $E(-H)[1]$ sont $\tilde{\sigma}$-stable :

ingrédients :

a) E, $E(-H)$ sont Gieseker stables

b) pas de murs pour E
qui découpent $(0,\sigma) = I$

c) pas de murs pour $E(-H)[1]$
qui découpent $(0,\gamma)$.
(la détermination de γ
n'est pas triviale)

Donc la suite (A) est exacte
dans $\mathrm{Coh}^0(X)$ et donne la
filtration de JH de $\iota_*(E|_C)$
rél. à $\tilde{\sigma}$. En effet c'est facile
de montrer que (A) est JH
de $\iota_*(E|_C)$ pour les $\sigma \in I$ au
dessous de $\tilde{\sigma}$, tandis qu'elle
est la filtration de H-N pour
les $\sigma \in I$ au dessus de $\tilde{\sigma}$. Pour
cette dernière raison, si φ est
bien définie, elle est aussi
injective (unicité de H-N)

Il faut donc montrer que

$$E|_C \in M_C(r, 2rs, r+s)$$

1) stabilité de $E|_C$: un calcul montre que pour $\alpha > \tilde{\alpha}$

$\phi_{(0,\alpha)}(E) < \phi_{(0,\alpha)}(\iota_*(E|_C))$. Donc,

$\iota_*(E|_C)$ est $\sigma_{\alpha,0}$-stable pour $\alpha > \tilde{\alpha}$. Il est donc un faisceau stable dans le sens de Gieseker, ce qui implique la stabilité de $E|_C$.

2) $h^0(E|_C) = r+s$.

Içi il y-a une idée qui est aussi une idée clé pour la surjectivité de φ. On considère le triangle (B) et une condition de stabilité $\bar{\sigma} = \sigma(\alpha, \bar{\beta})$ comme dans la figure précédente. On a la proposition suivante.

<u>Proposition</u>. Si E est $\bar{\sigma}$-semistable avec même pente que $\mathcal{O}_X$, alors

$$h^0(X,E) \leq \frac{\chi}{2} + \frac{\sqrt{(r-s)^2+4c^2(rs+1)}}{2}$$

où $v(E) = (r, c, s)$, $H^2 = 2rs$

$\chi = \chi(E) = r+s = -v(E)^2$.

<u>Dém</u>. Comme auparavant on montre que (B) est exacte dans $\mathrm{Coh}^{\beta}(X)$ [ev est injective]

et que le trois objects en question sont tous $\bar{\sigma}$-semistable.

On a $c(E) = c(K_E)$. On considère les facteurs de J-H de K_E q'on denote par $A_1, \dots, A_n$. On va démontrer que, à un rearrangement près, on a :

$$(3)\quad \begin{array}{ll} A_i \cong \mathcal{O}_X & 1 \leq i \leq i_0 \\ c(A_i) > 0, & i > i_0 \end{array}$$

Supposons d'avoir (3). Puisque

$\sum_{i=1}^{n} c(A_i) = c(K_E) = c(E)$ on a

$c(E) \geqslant n - i_0$. On a aussi

$v(K_E) = v(E) + h^0(E)\, v(\mathcal{O}_X)$ et

donc

$$\left[\sum_{i=i_0+1}^{n} v(A_i)\right]^2 = \left[\begin{array}{l} v(E) + h^0(E)\, v(\mathcal{O}_X) \\ \quad - i_0\, v(\mathcal{O}_X) \end{array}\right]^2$$

$$\begin{array}{l} \| \\ \sum_{i,j=i_0+1}^{n} \langle v(A_i), v(A_j) \rangle \\ \quad \geqslant \\ -2(n-i_0)^2 \\ \quad \geqslant \\ -2\,c(E)^2, \end{array}$$

La thèse découle d'un calcul.

Il faut donc démontrer (3).

On a $v(A_i) = m_i\, v(\mathcal{O}_X) + t_i\, v(E)$

$m_i, t_i \in \mathbb{Q}$ D'autre part

$0 \leqq \operatorname{Im} Z_{\alpha\bar{\beta}}(A_i) = -\bar{\beta}\, m_i + t_i\,(c - r\bar{\beta})$

(et les A_i son stables sur J). En faisant tendre $\bar{\beta}$ à $(0)^-$ on voit

que $t_i \geqq 0$. Si $t_i = 0$ il faut

avoir $m_i = 1$ et $A = \mathcal{O}_X$ (facile).

C.Q.F.D.

On peut maintenant démontrer que $h^0(E|_C) = r+s$. On considère la condition de stab. $\bar{\sigma}$. Les hypothèses de la Prop étant satisfaites pour $[E] \in M_{v,H}(X)$, du fait que E est Gieseker-stable. et qu'il n'y a pas de murs pour E découpant $(0,\delta)$, on peut en déduire que $(C=1)$ $h^0(E) \leq r+S$.

Le faisceau E est cohérent et de pente positive, donc $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X) = 0$, ce qui donne $h^0(E) = r+s$.

Puisque il n'y a pas de murs pour $E(-H)[1]$ qui découpent $(0,\gamma)$, $E(-H)[1]$ est stable sur (γ, δ) où $\mathcal{O}_X$ est stable à son tour. On a donc :

$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, E(-H)[1]) = 0$, ce qui donne $h^0(l_* E|_C) = r+s$

C.Q.F.D.

Dans tous les raisonnements j'ai caché le problème de la position des vecteurs de Mukai des object sphériques vis à vis des murs qui nous intéressent. Un problème que Feyzbakhsh adresse avec des calculs subtils.

Bibliographie

- Arcara D., Bertram A. : Bridgeland stable moduli for K-trivial surfaces. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1-38 (2013) Appendix by M. Lieblich.
- Bridgeland T. : stability conditions on K3 surfaces. Duke Math. J. 141 (2) 241-291, 2008.
- Charles F. : Conditions de stabilité et géométrie birationelle. Sém Bourbaki 70e année, 2017-2018, n° 1147.

- Macrì E., Schmidt B.: Lectures on Bridgeland stability. In "Moduli of Curves" vol. 21 of Lect. Notes Unione Mat. Ital. 139–211 Springer, Cham, 2017

- Bayer A.: Wall crossing implies Brill-Noether applications of stability conditions on surfaces, in "Algebraic Geometry" Salt Lake City, 2015, AMS, Providence RI, 2018 Proc. Symp. Pure Math 97 3–27

- Macrì E, Schmidt B.: Stability and applications (to appear)

- Feyzbakhsh S.: Mukai's program (reconstructing a K3 surface from a curve) via wall crossing arXiv: 1710.06692, (2017).