Catégories tannakiennes

P. DELIGNE

à A. Grothendieck en témoignage d'admiration et de reconnaissance

1. Introduction
2. Rappels et compléments: catégories tensorielles
3. Rappels et compléments: groupoïdes
4. Comonades
5. Produit tensoriel de catégories abéliennes
6. Le théorème principal
7. Caractérisation interne des catégories tannakiennes (caractéristique 0)
8. Le groupe fondamental d'une catégorie tensorielle
9. Corps différentiels

Index terminologique
Index des notations
Bibliographie

1. Introduction

Dans [6], N. Saavedra décrit certaines catégories munies d'un produit tensoriel, les catégories tannakiennes (2.8), comme catégories de représentations de gerbes (cas particulier: représentations d'un schéma en groupes). Sa démonstration est incomplète (*cf.* [2] 3.15). Notre but premier est de la compléter. Je n'ai pas su rédiger un exposé court ne donnant que les arguments manquants: bien des idées de l'article sont dans [6], dues à Saavedra et, par son intermédiaire, à A. Grothendieck.

Les paragraphes 2 à 5 ne prétendent pas à l'originalité. Ils rassemblent des résultats qui, au paragraphe 6, nous permettrons de compléter la démonstration de Saavedra. Au paragraphe 7, nous montrons qu'en caractéristique 0, une catégorie tensorielle (1.2) dont tout objet a pour dimension (7.1) un entier ≥ 0 est tannakienne. Au paragraphe 8, nous appliquons les méthodes des paragraphes 6 et 7 aux catégories tensorielles non nécessairement tannakiennes. Comme application (8.19), nous décrivons les catégories tensorielles sur k, supposé parfait, munies d'un $\otimes$-foncteur exact à valeurs dans les super-espaces vectoriels sur k (1.4).

Le paragraphe 9 donne une application du formalisme des catégories tannakiennes à la théorie de Picard-Vessiot. Soit (K,∂) un corps différentiel de corps des constantes $K_0 := \{x \mid \partial x = 0\}$ algébriquement clos de caractéristique 0 et $y^{n/} + a_1 y^{n-1/} + \cdots + a_n = 0$ une équation différentielle linéaire du n$^{\text{ième}}$-ordre à coefficients dans K. Nous montrons l'existence d'une extension (E,∂) de (K,∂), de même corps des constantes, dans laquelle l'équation admet n solutions linéairement indépendantes sur les constantes. Cette application est le fruit de discussions avec D. Bertrand. Le résultat est un théorème de E.R. Kolchin ([**3 VI 6 prop. 13**]).

Dans la fin de cette introduction, après avoir indiqué quelques conventions terminologiques, nous décrivons le résultat principal 1.12 des paragraphes 2 à 6.

1.1 *Terminologie.*

Anneau (resp. *algèbre*) signifiera toujours anneau (resp. algèbre) à unité et les *morphismes* envoyent l'unité sur l'unité.

Dans tout l'article, k sera un anneau commutatif, le plus souvent supposé être un corps. Nous ne considérerons en principe que des schémas sur k. Souvent, nous dirons simplement *schéma* pour schéma sur k et *morphisme* de schémas pour morphisme de schémas sur k. On note $X \times Y$ le produit sur k $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y$ et $\mathrm{Hom}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de schémas sur k de X dans Y.

Nous noterons de même un foncteur représentable et un objet qui le représente.

1.2. Soit k un corps commutatif. Dans cet article, nous appelerons simplement *catégorie tensorielle* sur k ce qui dans N. Saavedra [**6**] (resp. Deligne–Milne [**2**]) serait appelé une $\otimes$-catégorie abélienne ACU k-linéaire rigide, avec $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$ (resp. une catégorie tensorielle abélienne, rigide, k-linéaire, avec $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$). Les axiomes sont rappelés en 2.1. Il s'agit d'une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{T}$ munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ et de contraintes d'associativité et de commutativité pour $\otimes$ (des isomorphismes fonctoriels $(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$ et $X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$), le tout vérifiant des axiomes convenables. Parmi les axiomes figure l'existence d'un objet unité 1.

1.3 *Exemple.* La catégorie $\mathrm{Vect}(k)$ des espaces vectoriels de dimension finie sur k, munie du produit tensoriel et de ses contraintes évidentes d'associativité et de commutativité.

1.4 *Exemple.* T est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie $\mathbf{Z}/(2)$-gradués sur k, $\otimes$ le produit tensoriel, la contrainte d'associativité est la contrainte évidente et celle de commutativité est donnée par la règle de Koszul: $a \otimes b \mapsto (-1)^{\deg a \deg b} b \otimes a$ pour a et b homogènes. C'est la catégorie tensorielle des ***super-espaces vectoriels*** de dimension finie sur k.

1.5 *Exemple.* Soit G un schéma en groupes affines sur k. On prend pour T la catégorie $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations linéaires de dimension finie de G sur k, pour $\otimes$ le produit tensoriel des représentations, et les contraintes évidentes.

Pour G trivial, on retrouve l'exemple 1.3.

1.6. Une généralisation de l'exemple 1.5 jouera pour nous un rôle essentiel. Avant de la donner, quelques préliminaires.

Soit S un schéma sur k. Rappelons (SGA 3 V1) qu'un *k-groupoïde* agissant sur S est un schéma G sur k munis de morphismes but et source: $b, s : G \to S$ et d'une loi de composition $\circ : G \underset{{}^sS^b}{\times} G \to G$ qui soit un morphismes de schémas sur $S \times S$ et telle que pour tout schéma T sur k,

$$S(T) := \mathrm{Hom}(T,S) \quad , \quad G(T) := \mathrm{Hom}(T,G) \quad , \quad s,b : G(T) \to S(T) \text{ et } \circ$$

définissent une catégorie (objets: $S(T)$; flèches: $G(T)$) où toute flèche soit inversible. Ceci peut aussi s'exprimer par des diagrammes: l'associativité s'exprime par l'égalité des flèches composées

$$G \underset{{}^sS^b}{\times} G \underset{{}^sS^b}{\times} G \underset{\mathrm{Id}\times\circ}{\overset{\circ\times\mathrm{Id}}{\rightrightarrows}} G \underset{{}^sS^b}{\times} G \xrightarrow{\circ} G,$$

les flèches identiques par un morphisme de $S \times S$ schémas $\epsilon : S \to G$ (S diagonal dans $S \times S$) tel que les flèches composées

$$G = G \underset{{}^sS}{\times} S = S \underset{S^b}{\times} G \underset{\mathrm{Id}\times\epsilon}{\overset{\epsilon\times\mathrm{Id}}{\rightrightarrows}} G \underset{{}^sS^b}{\times} G \xrightarrow{\circ} G$$

soient l'identité, les inverses par "-1" $: G \to G$ avec s"-1" $=$ "-1"b, b"-1" $=$ "-1"s, et les commutativités

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{“}-1\text{”}\times\mathrm{Id}} & G \underset{{}^sS^b}{\times} G \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ S & \xrightarrow{\epsilon} & G \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\text{“}-1\text{”}} & G \underset{{}^sS^b}{\times} G \\ \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ S & \xrightarrow{\epsilon} & G . \end{array}$$

La terminologie de SGA 3 V1 est que (S,G) est un (schémas sur k)-groupoïde.

Pour $u : T \to S$, l'image inverse de G par $u \times u : T \times T \to S \times S$ est un k-groupoïde agissant sur T: le groupoïde *induit* G_T.

Une *représentation* de G est un faisceau quasi-cohérent V sur S muni d'une *action* ρ de G, i.e. de la donnée pour tout k-schéma T et tout $g \in G(T)$ d'un morphisme $\rho(g) : V_{s(g)} \to V_{b(g)}$ entre les images réciproque de V par $s(g)$ et $b(g) : T \to S$. On exige que $\rho(g)$ soit de formation compatible aux changements de base $T' \to T$, que $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ (pour $s(g) = b(h)$) et que pour g l'automorphisme identique $\epsilon(s)$ de $s \in S(T)$, $\rho(g)$ soit l'automorphisme identique de V_s. Puisque G est un groupoïde, les $\rho(g)$ sont des isomorphismes. Une action ρ est déterminée par $\rho(g)$ dans le cas universel $T = G$, $g = \mathrm{Id}_G : G \to G$, i.e. par un morphisme $u : s^*V \to b^*V$ entre faisceaux quasi-cohérents sur G. Ce morphisme doit vérifier:
(a) Sur $G \underset{{}^sS^b}{\times} G$, l'image inverse de u par $\circ : G \underset{{}^sS^b}{\times} G \to G$ est le composé $\mathrm{pr}_1^*(u) \circ \mathrm{pr}_2^*(u)$; (b) $\epsilon^*(u)$ est l'identité.

On dit que le groupoïde G est *transitif* sur S (au sens *fpqc*) si le morphisme $(b,s) : G \to S \underset{k}{\times} S$ est couvrant au sens *fpqc*, i.e. s'il existe T fidèlement plat quasi-compact sur $S \times S$ avec $\mathrm{Hom}_{S\times S}(T,G) \neq \emptyset$. Si G est transitif, alors (a) G est plat, donc fidèlement plat, sur $S \times S$ (3.6); (b) si G agit sur V quasi-cohérent et qu'une fibre V_s est un espace vectoriel de rang fini n sur le corps résiduel $k(s)$, alors V est localement libre de rang de n (3.5).

1.7 *Exemple.* Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur un schéma non vide S sur k. On peut alors prendre pour $\mathcal{T}$ la catégorie des faisceaux localement libres de rang fini sur S munis d'une action de G et pour foncteur $\otimes$ le produit tensoriel, muni des contraintes évidentes.
Notation: $\mathrm{Rep}(S : G)$.

Pour S réduit à un point: $S = \mathrm{Spec}(k)$, on retrouve 1.5.

1.8 *Remarque.* Soient G un groupoïde agissant transitivement sur S, $u : T \to S$ et G_T le groupoïde induit (1.6). On vérifie (3.5) que si $T \neq \emptyset$, $u^* : \mathrm{Rep}(S : G) \to \mathrm{Rep}(T : G_T)$ est une équivalence de catégories. En particulier, si $S(k) \neq \emptyset$, que $x \in S(k)$ et que G_x est le groupe algébrique sur k qui fixe x (la fibre de G en (x,x)), on a $\mathrm{Rep}(S : G) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Rep}(G_x)$.

1.9. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k et S un k-schéma. Un *foncteur fibre* de $\mathcal{T}$ sur S est un foncteur exact k-linéaire ω de $\mathcal{T}$ dans la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur S, muni d'un isomorphisme fonctoriel $\omega(X) \otimes \omega(Y) \xrightarrow{\sim} \omega(X \otimes Y)$ *ACU*, i.e. compatible aux contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité (2.7). Les axiomes imposés à $\mathcal{T}$ impliquent que ω est à valeurs dans les faisceaux localement libres de rang fini (2.8). Pour $S = \mathrm{Spec}(B)$, ω s'identifie à un foncteur de $\mathcal{T}$ dans la catégorie des B-modules projectifs de type fini. On appelle encore ω un foncteur fibre sur B.

Soient ω_1 et ω_2 deux foncteurs fibres sur S. Un *$\otimes$-isomorphisme*, ou *isomorphisme de foncteurs fibres*, $u : \omega_1 \to \omega_2$ est un isomorphisme de foncteurs rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \omega_1(X) \otimes \omega_1(Y) & \longrightarrow & \omega_1(X \otimes Y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle u\otimes u} & & \big\downarrow{\scriptstyle u} \\ \omega_2(X) \otimes \omega_2(Y) & \longrightarrow & \omega_2(X \otimes Y) \end{array}$$

et tel que $u : \omega_1(1) \to \omega_2(1)$ soit l'automorphisme identique de $\mathcal{O}_S$.

1.10. Dans [6], Saavedra affirme avec une démonstration insuffisante (*cf.* [2] 3.15) que: (*) deux foncteurs fibres de $\mathcal{T}$ sur $\mathrm{Spec}(B)$ sont localement isomorphes pour la topologie $fpqc$, i.e. il existe B' sur B, fidèlement plat, tel que ω_1 et ω_2 deviennent isomorphe apès extension des scalaires de B à B'.

Notre but premier et de montrer que l'assertion (*) est vraie (avec l'hypothèse additionnelle, nécessaire, $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$ que Saavedra avait oubliée) et de justifier ainsi tous les résultats de [6].

1.11. Si ω_1 et ω_2 sont deux foncteurs fibres sur S, nous noterons $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ le foncteur qui à T sur $S : u : T \to S$ attache l'ensemble des isomorphismes de foncteurs fibres de $u^*\omega_1$ avec $u^*\omega_2$. Il est représentable par un schéma affine sur S. Si ω_i est un foncteur fibre sur S_i ($i = 1, 2$), on pose

$$\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_2, \omega_1) := \underline{\mathrm{Isom}}_{S_1 \times S_2}^{\otimes}(\mathrm{pr}_2^*\omega_2, \mathrm{pr}_1^*\omega_1).$$

Pour ω un foncteur fibre sur S, on pose $\underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega, \omega)$ et

$$\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega) := \underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega, \omega).$$

Selon la convention (1.1), nous noterons de même les schémas représentant ces foncteurs. Le schéma $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$ est un k-groupoïde agissant sur S. Le morphisme but b (resp. source s) est le composé de pr_1 (resp. pr_2) avec la projection sur $S \times S$. Nous prouverons en 1.13(b), 6.8, 6.14 et 6.15 le résultat suivant.

1.12 **Théorème.** *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k et ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur un k-schéma $S \neq \emptyset$.*
(i) *Le groupoïde* $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$ *est fidèlement plat sur* $S \times S$;
(ii) ω *induit une équivalence de* $\mathcal{T}$ *avec la catégorie* $\mathrm{Rep}(S : \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega))$ *de représentations du groupoïde* $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$.

Réciproquement, soient G un k-groupoïde agissant sur $S \neq \emptyset$ affine et fidèlement plat sur $S \times S$ et ω le foncteur fibre de $\mathrm{Rep}(S : G)$ *sur S "oubli de l'action de G." On a*

(iii) $$G \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega).$$

Le théorème fournit un dictionnaire entre catégories tensorielles sur k munies d'un foncteur fibre sur S et k-groupoïdes agissant transitivement sur S et affines sur $S \times S$.

1.13 *Remarques.* (a) Si ω_1 et ω_2 sont des foncteurs fibres sur S_1 et S_2, il existe sur la somme disjointe $T := S_1 \amalg S_2$ un foncteur fibre ω, unique à isomorphisme unique près, muni d'isomorphismes $\omega|S_j = \omega_j$ $(j = 1,2)$. Appliquons 1.12(i) à ω. L'image inverse sur $S_2 \times S_1$ du schéma $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$ sur $T \times T$ est $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$. D'après 1.12(i), $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ est donc fidèlement plat sur $S_2 \times S_1$.

Pour $S_1 = S_2 := S$, la restriction à la diagonale de $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ est $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$. Le S-schéma $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ est donc fidèlement plat sur S. Ceci justifie 1.10(*).

(b) Si 1.12 est vrai pour S affine, il l'est en général. Pour l'assertion (i), si S_i est un recouvrement ouvert affine de S, l'image inverse de $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$ sur $S_i \times S_j$ est $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega \,|\, S_i, \omega \,|\, S_j)$ et, appliquant 1.13(a), on conclut par 1.12(i) appliqué aux $S_i \amalg S_j$. Pour (ii), observer que pour U un ouvert affine non vide de S, on a par 1.8 $\mathrm{Rep}(S : \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Rep}(U : \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega(U)))$. Conclure par 1.12(ii) pour U. Pour (iii), si U_1 et U_2 sont des ouverts affine non vides de S_x et que G_U est le groupoïde induit sur $U = U_1 \amalg U_2$, on a $\mathrm{Rep}(S : G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(U : G_U)$ et par 1.12(iii) appliqué à U, le morphisme $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$ est un isomorphisme au-dessus de $U_1 \times U_2$.

1.14. Soit G un groupoïde agissant sur $S = \mathrm{Spec}(B)$. Supposons G affine sur $S \times S$, i.e. affine: $G = \mathrm{Spec}(L)$. Puisque (b, s) fait de G un schéma sur $S \times S := S \underset{\mathrm{Spec}(k)}{\times} S$ (1.1), L est un $B \underset{k}{\otimes} B$–module, i.e. un B, B–bimodule tel que les deux structures induites de k-module coïncident. Nous écrivons à gauche (resp. à droite) la structure de B-module définie par b (resp. s).

Le B, B-bimodule L est muni des structures suivantes:
(1) L est une $B \underset{k}{\otimes} B$-algèbre commutative, d'où un produit

$$p : L \underset{B \otimes B}{\otimes} L \longrightarrow L\,.$$

(2) La loi de composition $G \underset{{}^{s}S^{b}}{\times} G \to G$ correspond à

$$c : L \longrightarrow L \underset{B}{\otimes} L$$

et l'identité $\epsilon : S \to G$ à $e : L \to B$.

Soit M un B-module (= un faisceau quasi-cohérent sur S). Une action de G sur M est un morphisme de L-modules

$$L \underset{{}^{s}B}{\otimes} M \longrightarrow M \underset{B^{b}}{\otimes} L$$

ou, ce qui revient au même, un morphisme de B-modules

$$r : M \longrightarrow M \underset{B^{b}}{\otimes} L$$

(à droite, la structure de B-modules défine par la structure droite de L), avec une compatibilité à la composition et aux éléments neutres. Ces compatibilités se traduisent par
(1.14.1) l'égalité des flèches composées

$$M \xrightarrow{r} M \otimes L \underset{M \otimes c}{\overset{r \otimes L}{\rightrightarrows}} M \otimes L \otimes L\ , \text{ et}$$

(1.14.2) l'égalité à l'identité du composé $M \xrightarrow{r} M \otimes L \xrightarrow{M \otimes e} M$.

On voit que seule a servi la structure (2) sur L.

1.15. Inspirés par cette remarque, pour tout anneau non nécessairement commutatif B, nous appellerons *cogèbroïde* agissant sur B un bimodule L sur B muni d'un morphisme de bimodules $c : L \to L \underset{B}{\otimes} L$ coassociatif: c égalise la double flèche $(c \otimes 1, 1 \otimes c)$

$$L \xrightarrow{c} L \underset{B}{\otimes} L \underset{1 \otimes c}{\overset{c \otimes 1}{\rightrightarrows}} L \underset{B}{\otimes} L \underset{B}{\otimes} L\ ,$$

et qui admette une counité $e : L \to B$: un morphisme de bimodules tel que les composés

$$L \xrightarrow{c} L \otimes L \overset{e\otimes 1}{\underset{1\otimes e}{\rightrightarrows}} L$$

soient l'identité. Noter que si c admet une counité, celle-ci est unique. Nous n'aurons besoin que du cas où B est commutatif, mais ne pas le supposer aide à ne pas mélanger sa gauche et sa droite.

Si B est commutatif et que les deux structures de B-module sur L coïncident, on retrouve les cogèbres sur B, d'où la terminologie. Si k est un anneau commutatif et B une k-algèbre, on appellera k-cogèbroïde un cogèbroïde L tel que les deux structures de k-modules induites par les structures de B-modules coïncident.

Une *représentation* de L est un B-module à droite M muni d'une *coaction* de L, i.e. d'un morphisme de B-modules à droite $r : M \to M \underset{B}{\otimes} L$ vérifiant (1.14.1) (1.14.2). Si L est plat en tant que B-module à gauche, la catégorie des représentations de L est abélienne et le foncteur d'oubli de la coaction est exact.

1.16. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k, $S = \mathrm{Spec}(B)$ un schéma affine sur k et ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur S. A l'imitation de Saavedra, nous commencerons par oublier le produit tensoriel et construisons un k-cogèbroïde L agissant sur B tel que ω se factorise par une équivalence de catégories de $\mathcal{T}$ avec la catégorie des faisceaux localement libres de rang fini sur S munis d'une coaction de L. La preuve (6.1, 6.2) est une application du théorème de Barr-Beck (4.1). Elle est parallèle à celle du théorème de descente fidèlement plate SGA 1 VIII 1. La compatibilité de ω au produit tensoriel munit L d'un produit, et on vérifie que $G := \mathrm{Spec}(L)$ est le groupoïde $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$ agissant sur S (6.3 – 6.6).

Il reste à montrer que G est fidèlement plat sur $S \times S$. Nous construirons une catégorie tensorielle $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ avec des propriétés convenables – notamment qu'un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ sur S définisse un foncteur fibre $\omega \times \omega$ de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ sur $S \times S$. Le $B \otimes B$–module L sera fidèlement plat en tant qu'image par $\omega \times \omega$ d'un Ind-objet contenant 1 de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.

Nous donnerons deux preuves de l'existence de la catégorie tensorielle $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. La première utilise un théorème de passage au quotient générique (3.11) et l'hypothèse $\mathrm{End}(1) = k$ pour montrer que si $\mathcal{T}$ est de $\otimes$-génération finie il existe un foncteur fibre ω_1 sur un schéma S_1 spectre d'une extension finie de k avec $G_1 := \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega_1)$ fidèlement plat sur $S_1 \times S_1$. Du théorème de structure $\mathcal{T} \sim \mathrm{Rep}(S_1 : G_1)$ on déduit l'existence de la catégorie tensorielle

$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ requise (5.21). La seconde preuve repose sur une construction directe. Elle ne s'applique que si k est parfait.

2. Rappels et compléments: catégories tensorielles

Soit k un corps commutatif.

2.1. Les axiomes des catégories tensorielles sur k (en notre sens, voir 1.2) sont les suivants.

(2.1.1) La catégorie $\mathcal{T}$ est munie d'un foncteur produit tensoriel $\otimes$: $\mathcal{T}\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$, de contraintes d'associativité et de commutativité compatibles pour $\otimes$ ([4], [5] VII 7, où la terminologie est "symmetric monoidal category", [6] I §1.2 ou [2] §1 p.104) et il existe un objet unité 1 ([6] I 1.3.2; l'objet unité est unique à isomorphisme unique près; il est muni de contraintes d'unité $X\otimes 1 \xrightarrow{\sim} X$ et $1\otimes X \xrightarrow{\sim} X$).

Cet axiome permet de définir le produit $\otimes$ d'une famille finie $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{T}$.

(2.1.2) Pour tout X, il existe $X^\vee$ et des morphismes $\mathrm{ev} : X\otimes X^\vee \to 1$ et $\delta : 1\to X^\vee\otimes X$ tels que les composés

$$X \xrightarrow{X\otimes\delta} X\otimes X^\vee\otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes X} X$$
$$X^\vee \xrightarrow{\delta\otimes X^\vee} X^\vee\otimes X\otimes X^\vee \xrightarrow{X^\vee\otimes\mathrm{ev}} X^\vee$$

soient l'identité.

(2.1.3) La catégorie est abélienne.

(2.1.4) Un isomorphisme $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$ de k avec l'anneau des endomorphismes de 1 est donné.

2.2. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie monoïdale ([5] VII 1), i.e. munie de $\otimes : \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, d'une contrainte d'associativité ([6] I 1.1.1) et admettant un objet unité 1. Le foncteur de $\mathcal{M}$ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ des foncteurs de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$: $X\mapsto$ (le foncteur $s_X : Z\mapsto X\otimes Z$) est un foncteur fidèle. Il admet la rétraction $s\mapsto s(1)$. Il est muni d'isomorphismes fonctoriels $s_X\circ s_Y \xrightarrow{\sim} s_{X\otimes Y} : X\otimes(Y\otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X\otimes Y)\otimes Z$. Cet isomorphisme est AU: compatible à la contrainte d'associativité et admettant $s_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ compatible aux contraintes d'unité. Après application du foncteur $s, X, X^\vee, \mathrm{ev}$ et δ comme en (2.1.2) fournissent une adjonction entre foncteurs: s_X est adjoint à gauche de $s_{X^\vee}$. Soit de même d le foncteur

$$d : (\mathcal{M}, \text{opposé de } \otimes) \longrightarrow (\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M},\mathcal{M}),\circ) : X \longmapsto (Z\mapsto Z\otimes X).$$

Le foncteur $d_{X^\vee}$ est adjoint à gauche de d_X.

Soient dans $\mathcal{M}$ des objets $X^\vee, X$ et ev : $X \otimes X^\vee \to 1$. De l'énoncé analogue ([5] IV 1 Th 2 (iii)) pour l'adjonction entre foncteurs, on déduit que $\delta : 1 \to X \otimes X^\vee$ vérifiant (2.1.2), s'il existe, est uniquement déterminé par ev. De plus, $(X^\vee, \mathrm{ev})$ pour lequel existe δ est unique à isomorphisme unique près: étant donnés $(X^\vee(i), \mathrm{ev})$ $(i = 1, 2)$, les adjoint $s_{X^\vee(i)}$ de s_X sont canoniquement isomorphes. De plus, l'isomorphisme $s_{X^\vee(1)} \to s_{X^\vee(2)}$ est le composé $s_{X^\vee(1)} \to s_{X^\vee(2)} s_X s_{X^\vee(1)} \to s_{X^\vee(2)}$ et est donc induit par $X^\vee(1) \to X^\vee(2) \otimes X \otimes X^\vee(1) \to X^\vee(2)$. On appelle $X^\vee$ le *dual* de X. En cas d'ambiguité, on écrira ev_X et δ_X les morphismes ev et δ.

Si X et Y admettent des duaux $X^\vee$ et $Y^\vee$, $Y^\vee \otimes X^\vee$ est un dual de $X \otimes Y$, avec
$\mathrm{ev}_{X \otimes Y} = \mathrm{ev}_X \circ (X \otimes \mathrm{ev}_Y \otimes X^\vee)$ et $\delta_{X \otimes Y} = (X \otimes \delta_Y \otimes X^\vee) \circ \delta_X$. Ceci résulte de l'énoncé analogue pour l'adjoint d'un foncteur composé.

Un adjoint à droite s_X^* de s_X est ce qu'on appelle un Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}(X, \ )$. Si s_X^* existe, soit $X' := s_X^*(1)$. L'adjonction $s_X s_X^* \to \mathrm{Id}$, évaluée en 1, définit $e : X \otimes X' \to 1$. Tensorisant par Y, on obtient $e \otimes Y : X \otimes X' \otimes Y \to Y$. Par adjonction, $e \otimes Y$ définit

$$(2.2.1) \qquad X' \otimes Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) : s_{X'} \longrightarrow s_X^* .$$

Par définition, $X \otimes (2.2.1) : s_X s_{X'} \to s_X s_X^*$, composé avec $s_X s_X^* \to \mathrm{Id}$, redonne $e \otimes Y : s_X s_{X'} \to \mathrm{Id}$: le composé $s_X s_{X'} \to s_X s_X^* \to \mathrm{Id}$ est défini par $e : X \otimes X' \to 1$.

2.3 **Proposition**. *Pour que X admette un dual, il faut et il suffit que s_X admette un adjoint à droite $s_X^* = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \ )$ et que le morphisme (2.2.1): $\underline{\mathrm{Hom}}(X, 1) \otimes Y \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ soit un isomorphisme pour tout Y.*

Preuve. La nécessité est claire sur 2.2. Réciproquement, supposons que (2.2.1): $s_{X'} \to s_X^*$ est un isomorphisme. Si on identifie $s_{X'}$ à s_X^* par (2.2.1), on a vu que le morphisme d'adjonction ev : $s_X s_{X'} = s_X s_X^* \to \mathrm{Id}$ est défini par $e : X \otimes X' \to 1$. Le morphisme d'adjonction $\delta : \mathrm{Id} \to s_X^* s_X = s_{X'} s_X$ est déduit par adjonction de l'identité $s_X \to s_X$, donc caractérisé par la propriété:

$$(2.3.1) \qquad s_X \xrightarrow{s_X \delta} s_X s_{X'} s_X \xrightarrow[\mathrm{ev} s_X]{} s_X \quad \text{est l'identité}.$$

Evaluant δ en 1, on obtient $\delta(1) : 1 \to X' \otimes X$. Evaluant (2.3.1) en 1, on obtient que le composé $X \xrightarrow{X \otimes \delta(1)} X \otimes X' \otimes X \xrightarrow{e \otimes X} X$ est l'identité. Le morphisme $\mathrm{Id} \to s_{X'} s_X$ défini par $\delta(1)$ a donc la propriété caractéristique (2.3.1) et $\delta(1)$ définit δ: les morphismes d'adjonction pour $(s_X, s_{X'})$ sont définis par $e : X \otimes X' \to 1$ et $\delta(1) : 1 \to X' \otimes X$. Ceci prouve 2.3.

2.4. Si X et Y admettent un dual, on a par adjonction $\mathrm{Hom}(s_X, s_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(s_{Y^\vee}, s_{X^\vee})$. Cette bijection induit une bijection $\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y^\vee, X^\vee)$: à $f : X \to Y$ correspond son *transposé*, le composé

$$ {}^t f : Y^\vee \xrightarrow{1\otimes\delta} Y^\vee \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{1\otimes f\otimes 1} Y^\vee \otimes Y \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes 1} X^\vee . $$

La bijection inverse attache à $f : Y^\vee \to X^\vee$ le composé

$$ f^t : X \longrightarrow Y \otimes Y^\vee \otimes X \longrightarrow Y \otimes X^\vee \otimes X \longrightarrow Y . $$

Il suffit de s'assurer que les mêmes formules décrivent dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ les bijections $\mathrm{Hom}(s_X, s_Y) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(s_{Y^\vee}, s_{X^\vee})$.

Un *contragrédient* de f est un morphisme $f^\vee : X^\vee \to Y^\vee$ tel que $\mathrm{ev}_X \circ (f^\vee \otimes f) = \mathrm{ev}_Y$ et $(f \otimes f^\vee) \circ \delta_X = \delta_Y$. Le diagramme commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
X^\vee \arrow[r, "1\otimes\delta"] \arrow[d, "f^\vee"'] & X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \arrow[r, "ev\otimes 1"] \arrow[d, "f^\vee\otimes 1\otimes 1"] & X^\vee \\
Y^\vee \arrow[r, "1\otimes\delta"] & Y^\vee \otimes X \otimes X^\vee \arrow[r, "1\otimes f\otimes 1"] & Y^\vee \otimes Y \otimes X^\vee \arrow[u, "ev\otimes 1"']
\end{tikzcd}
$$

montre que si f a un contragrédient $f^\vee$, alors ${}^t f f^\vee = \mathrm{Id}$. Par passage à la catégorie duale munie du $\otimes$ symétrique (ceci échange ev et δ et respecte $f \mapsto {}^t f$), on obtient $f^\vee\, {}^t f = \mathrm{Id}$. Le transposé ${}^t f$ est donc inversible, d'inverse $f^\vee$; parce que $f \mapsto {}^t f$ est bijectif et est compatible à la composition, f est inversible aussi.

2.5. Si le produit tensoriel est commutatif – plus précisement si $\mathcal{M}$ vérifie (2.1.1), la relation entre X et $X^\vee$ est symétrique: X est un dual de $X^\vee$, et ${}^{tt} f = f$. L'axiome (2.1.2) implique alors les conditions qui pour Saavedra définissent les catégories *rigides*: l'existence de $\underline{\mathrm{Hom}}$ internes ($\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = X^\vee \otimes Y$), que

(2.5.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X',Y') \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(X \otimes Y, X' \otimes Y')$$

(car $X^\vee \otimes Y^\vee$ est un dual de $X \otimes Y$) et que $X \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee}$. La réciproque est vraie (2.3 et (2.5.1) pour $Y = X' = 1$).

Autre terminologie: une catégorie monoïdale vérifiant (2.1.2) est aussi appellée "compact closed monoïdal category". Cette terminologie est parfois réservée aussi catégories vérifiant (2.1.1) (2.1.2) (G. M. Kelly and M. L. Laplaza, *Coherence for compact closed categories*, J. Pure and Applied Alg. **19** (1980) p. 193–213) i.e. aux $\otimes$-catégories ACU rigides de Saavedra.

Si $\mathcal{M}$ vérifie (2.1.1) (2.1.2), le foncteur $Y \mapsto X \otimes Y$ a pour adjoint à gauche et à droite $Y \mapsto X^\vee \otimes Y$. Il commute donc aux limites inductives et projectives. En particulier, si (2.1.3) est vérifié, $\otimes$ est un bifoncteur exact en chaque variable.

Si $\mathcal{M}$ vérifie (2.1.1) à (2.1.3), l'isomorphisme $1 \otimes X \xrightarrow{\sim} X$ munit chaque X dans $\mathcal{M}$ d'une structure de End(1)-module, fonctorielle en X. L'anneau End(1) est commutatif ([6] I 3.3.1). Les structures de modules de X et Y fournissent la même structure de module sur $\mathrm{Hom}(X, Y)$, et la composition est bilinéaire: la catégorie $\mathcal{M}$ est End(1)-linéaire. Le foncteur $\otimes$ est End(1)-bilinéaire. L'axiome (2.1.4) équivaut à dire que la catégorie abélienne $\mathcal{M}$ est k-linéaire, que $\otimes$ est k-bilinéaire et que $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$.

2.6 **Proposition.** *Soit B un anneau commutatif. Dans la catégorie monoïdale des B - modules, si X admet un dual (2.2), X est un B-module projectif de type fini.*

Preuve. Soient $X^\vee, X, \mathrm{ev}$ et δ comme en (1.1.2). Par 2.2, $X^\vee \otimes Y \simeq \mathrm{Hom}_B(X, Y)$. Faisant $Y = B$, on voit que $X^\vee$ est le dual de X. Faisons $Y = X$. On obtient que $X^\vee \otimes X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(X, X)$. Si Id_X est l'image de $\sum \alpha_i \otimes x_i$, les α_i et les x_i définissent une factorisation de l'identité: $X \xrightarrow{\alpha} B^n \xrightarrow{x} X$: X est facteur direct d'un module libre de rang fini.

2.7. Soit $T : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ un foncteur entre catégories monoïdales muni d'un isomorphisme fonctoriel $T(X) \otimes T(Y) \xrightarrow{\sim} T(X \otimes Y)$. Il est dit A si cet isomorphisme est compatible aux contraintes d'associativité: commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
(T(X) \otimes T(Y)) \otimes T(Z) & \longrightarrow & T(X) \otimes (T(Y) \otimes T(Z)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
T((X \otimes Y) \otimes Z) & \longrightarrow & T(X \otimes (Y \otimes Z)) .
\end{array}$$

Il est dit U s'il existe un isomorphisme $T(1) \to 1$ compatible aux contraintes d'unité (2.1.1). Un tel isomorphisme, s'il existe, est unique. Si des contraintes de commutativité pour $\otimes$ sont données, il est dit C si compatible à ces contraintes.

Si le foncteur T est AU et que $X^\vee$ est un dual de X, $T(X^\vee)$ (muni de $T(\mathrm{ev}_X)$ et $T(\delta_X)$) est un dual de $T(X)$. Si X et Y admettent un dual, le transposé 2.4 de $f : X \to Y$ est défini en terme de ev et δ et $T({}^tf)$ est le transposé de $T(f)$.

D'après 2.6, un foncteur AU d'une catégorie monoïdale $\mathcal{M}$ vérifiant (2.1.2) dans la catégorie monoïdale des modules sur un anneau commutatif B est à valeurs dans les B-modules projectifs de type fini.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ vérifiant (2.1.1). Nous dirons simplement *$\otimes$-foncteur* $T : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ pour "foncteur muni d'un isomorphisme fonctoriel $T(X) \otimes T(Y) \to T(X \otimes Y)$ ACU". Un *morphisme de $\otimes$-foncteurs* est un morphisme de foncteurs $T_1 \to T_2$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} T_1(A) \otimes T_1(B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T_1(A \otimes B) \arrow[d] \\ T_2(A) \otimes T_2(B) \arrow[r, "\sim"] & T_2(A \otimes B) \end{tikzcd}$$

soient commutatifs et que $T_1(1) \to T_2(1)$ soit l'automorphisme identique de 1.

Si la catégorie source vérifie (2.1.2), tout morphisme u de $\otimes$-foncteurs est un isomorphisme: u_X et $u_{X^\vee}$ sont contragrédients et u_X est inversible par 2.4 ([6] I 5.2.3)

2.8. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k. Les *foncteurs fibres* de $\mathcal{T}$ sur un k-schéma S, définis en 1.9, sont les $\otimes$-foncteurs k-linéaires exacts de $\mathcal{T}$ dans les faisceaux quasi-cohérents sur S. D'après 2.7, un foncteur fibre est à valeurs dans les faisceaux localement libres de rang fini sur S, et commute au passage au dual. On dit que $\mathcal{T}$ est *tannakienne* si $\mathcal{T}$ admet un foncteur fibre ω sur un $S \neq \emptyset$. Pour tout schéma sur $S, u : T \to S$, l'image inverse $\omega_T : X \mapsto u^*\omega(X)$ de ω sur T est un foncteur fibre sur T. Prenant pour T un point de S, on voit qu'une catégorie tannakienne admet un foncteur fibre sur le spectre d'un corps.

2.9. Pour V un espace vectoriel de dimension finie sur k et X dans une catégorie additive k-linéaire A, on définit $V \otimes X$ par

$$\mathrm{Hom}(Y, V \otimes X) = V \otimes_k \mathrm{Hom}(Y, X).$$

Le choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$ de V identifie $V \otimes X$ à X^n.

La sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ des multiples 1^n de 1 est équivalente par $V \mapsto V \otimes 1$ à celle des k-espaces vectoriels de dimension finie. D'après [2] 1.17, elle est stable par sous-quotients.

2.10. *Corollaire. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie abélienne munie d'un produit tensoriel exact à droite et vérifiant (2.1.1). Soit ω un $\otimes$-foncteur exact à droite de $\mathcal{T}$, catégorie tensorielle sur k, dans $\mathcal{M}$.*

(i) *ω est exact.*

(ii) *Si $\mathcal{M}$ n'est pas réduite à zéro, ω est fidèle.*

2.10.1 *Exemple.* Prenons pour $\mathcal{M}$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur le k-schéma S. D'après (i), un $\otimes$-foncteur ω k-linéaire exact à droite de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{M}$ est un foncteur fibre. D'après (ii), un foncteur fibre sur S est fidèle si $S \neq \emptyset$. La restriction de ω à un ouvert de S est encore un foncteur fibre. Si $X \neq 0$, le faisceau localement libre (2.8) $\omega(X)$ est donc partout non nul.

Preuve. (i) Soit $0 \to X \to Y \to Z$ une suite exacte dans $\mathcal{T}$. Appliquant ω à la suite exacte transposé et utilisant que ω commute au passage au dual et au transposé (2.7), on trouve que la suite $0 \to \omega(X) \to \omega(Y) \to \omega(Z)$ a une suite transposée $\omega(Z)^\vee \to \omega(Y)^\vee \to \omega(X)^\vee \to 0$ exacte. Dans $\mathcal{M}$, si une suite $U \to V \to W \to 0$ est exacte et que les Hom internes $\underline{\mathrm{Hom}}(U,1)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(V,1)$ existent, $\underline{\mathrm{Hom}}(W,1)$ existe et la suite

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(W,1) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(V,1) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(U,1)$$

est exacte. Puisque $\omega(X)$ est dual de $\omega(X)^\vee, \omega(X)$ est $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X)^\vee,1)$; de même pour Y et Z, et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega(X) \longrightarrow \omega(Y) \longrightarrow \omega(Z)$$

donne (i).
(ii) (*cf.* [6] II 4.2.1). Si $X \neq 0$, ev : $X^\vee \otimes X \to 1$ est non nul, donc un épimorphisme (2.9 prouvé en [2] 1.17). Si $\mathcal{M}$ n'est pas réduite à zéro, $\omega(1) = 1$ est non nul et l'épimorphisme $\omega(\mathrm{ev}) : \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \to 1$ est non nul. On a donc $\omega(X) \neq 0$. Ceci prouve (ii).

2.11 *Remarque.* Pour un exemple de $\otimes$-foncteur k-linéaire ACU à valeurs dans les espaces vectoriels sur k, non exact, et qui n'est donc pas un foncteur fibre, voir [2] IV 2.5.

2.12. Pour $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire, nous aurons souvent à considérer la condition de finitude suivante:

(2.12.1) Tout objet de $\mathcal{A}$ est de longueur finie et quels que soient X et Y dans $\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est de dimension finie sur k.

2.13 **Proposition.** *Si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne, alors*
(i) *$\mathcal{T}$ vérifie* (2.12.1).
(ii) *Si ω est un foncteur fibre sur $S = \mathrm{Spec}(B)$, $\mathrm{Hom}(X,Y) \underset{k}{\otimes} B$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_B(\omega(X), \omega(Y))$.*

Preuve. Soit ω_0 un foncteur fibre sur un corps K. La finitude (2.12.1) résulte de ce que ω_0 est exact et fidèle et de (ii) pour ω_0.

Prouvons (ii). Si $H \subset \mathrm{Hom}(X,Y)$ est un sous-espace de dimension finie, il résulte de 2.9 que $H \otimes 1 \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$. Appliquant ω, on obtient

$$H \otimes B \hookrightarrow \omega\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_B(\omega(X), \omega(Y))$$

d'où résulte (ii).

Le résultat suivant m'a été signalé par O. Gabber.

2.14 **Proposition.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire vérifiant (2.12.1). Supposons qu'il existe dans $\mathcal{A}$ un objet X tel que tout objet de $\mathcal{A}$ soit sous-quotient d'un X^n. Alors, $\mathcal{A}$ admet un générateur projectif.*

Preuve. Rappelons qu'une *suite de composition* d'un objet Y de $\mathcal{A}$ est une filtration décroissante $G : G^0 = Y \supset G^1 \supset \cdots \supset G^\ell = 0$ de quotients successifs simples. Pour chaque objet simple S, soit $\mathrm{lg}_S(Y)$ le nombre de i tel que $Gr^i_G(Y)$ soit isomorphe à S. Dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{A}$, $[Y]$ est la somme étendue aux classes d'isomorphie d'objet simples des $\mathrm{lg}_S(Y).[S]$.

Rappelons qu'une *extension essentielle* d'un objet Y est un épimorphisme $\alpha : E \to Y$ tel que E n'ait pas de sous-objet $E' \subset E$, distinct de E, qui s'envoie sur Y. Si Y est simple, il revient au même de dire que tout $E' \subset E$ distinct de E est contenu dans $\ker(\alpha)$.

Si E est une extension essentielle d'une objet simple S, on a pour tout objet simple T

$$\mathrm{Hom}(S,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E,T) .$$

En effet, pour $f : E \to T$ non nul, $\ker(f) \subset \ker(\alpha)$ est de colongueur 1 dans E, $\ker(f) = \ker(\alpha)$ et f se factorise par α. En particulier, $\mathrm{Hom}(E,T) = 0$ pour T non isomorphe à S.

2.15 **Lemme.** *Soit E une extension essentielle d'un objet simple S. Pour tout Y, on a*

(2.15.1) $$\dim_k \mathrm{Hom}(E,Y) \leq \mathrm{lg}_S(Y). \dim_k \mathrm{End}(S) .$$

S'il y a égalité pour Y, il y a égalité pour Y^n et tous ses sous-quotients et le foncteur $Hom(E,\ )$ est exact sur la sous-catégorie $\langle Y\rangle$ de $\mathcal{A}$ des sous-quotients des Y^n.

Preuve. Pour toute suite exacte courte $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(E,Y') \to \mathrm{Hom}(E,Y) \to \mathrm{Hom}(E,Y'') \tag{2.15.2}$$

donne $\dim_k \mathrm{Hom}(E,Y) \leq \dim_k \mathrm{Hom}(E,Y') + \dim_k \mathrm{Hom}(E,Y'')$ avec égalité si et seulement si on peut mettre un zéro à droite de (2.15.2). Pour Y simple, (2.15.1) est vrai, avec égalité. L'inégalité (2.15.1) en résulte par récurrence sur $\lg(Y)$. S'il y a égalité pour Y, il y a égalité pour tout sous-objet, tout quotient, et 2.15 en résulte.

2.16 **Preuve de 2.14** (fin). Soit S un objet simple de $\mathcal{A}$. Soit F une suite de composition de X et construisons par récurrence sur i une extension essentielle P_i de S telle que

$$\dim_k \mathrm{Hom}(P_i, X/F^i) = \lg_S(X/F^i).\dim_k \mathrm{End}(S).$$

Pour $i = 0$ ou 1, on peut prendre $P_i = S$. Construisons P_{i+1}. Soit une famille finie de morphismes $f_\alpha : P_i \to X/F^i$ qui engendre $\mathrm{Hom}(P_i, X/F^i)$. Soit Q_α le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} Q_\alpha & \longrightarrow & X/F^{i+1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ P_i & \longrightarrow & X/F^i \end{array},$$

Q' le produit fibré sur P_i des Q_α et Q un sous-objet de Q' minimal parmi ceux s'envoyant sur P_i. Par construction, Q est une extension essentielle de P_i, donc de S. Par (2.15.1) appliqué à Q et à X/F^i, on a

$$\mathrm{Hom}(P_i, X/F^i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Q, X/F^i). \tag{2.16.1}$$

Par construction, tout morphisme de P_i dans X/F^i se relève en un morphisme de Q dans X/F^{i+1}. Par (2.16.1)

$$\mathrm{Hom}(Q, X/F^{i+1}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(Q, X/F^i)$$

et (2.15.1) est une égalité pour Q et X/F^{i+1}. On prend $P_{i+1} = Q$.

Au bout de la récurrence, on obtient une extension essentielle $P(S)$ de S telle que (2.15.1) est une égalité pour $P(S)$ et X. D'après 2.15, $P(S)$ est projectif. Tout objet simple de $\mathcal{A}$ figure dans les quotients successifs d'une suite de composition de X. Il n'y a donc qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'objet simples. La somme P des $P(S)$ — un par classe d'isomorphie d'objets simples — est un générateur projectif.

2.17 **Corollaire**. *Toute catégorie $\mathcal{A}$ comme en 2.14 est équivalente à la catégorie des modules à droite de type fini sur une k-algèbre de rang fini A*

Prendre $A = \mathrm{End}(P)$ et l'équivalence $X \mapsto \mathrm{Hom}(P, X)$.

2.18. Soient $\mathcal{A}$ comme en 2.14 et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine stable par sommes et sous-quotients. L'inclusion i de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ a des adjoints à gauche et à droite i^* et $i^!$: $i^*(X)$ est le plus grand quotient de X qui soit dans $\mathcal{B}$, $i^!(X)$ le plus grand sous-objet. Si P est un générateur projectif de $\mathcal{A}$, i^*P est un générateur projectif de $\mathcal{B}$. Soit $A = \mathrm{End}(P)$ et $\bar{A}$ son quotient $\mathrm{End}(i^*P)$.

La catégorie $\mathcal{A}$ s'identifie à celle des A-modules à droite par $X \mapsto \mathrm{Hom}(P, X)$. Dans ce modèle, P est A_d, i^*P est $\bar{A}_d$ et $\mathcal{B}$ s'identifie à la catégorie des A-modules à droite annulés par l'idéal bilatère a tel que $\bar{A} = A/a$.

2.19. Voici un exemple qui montre que si $\mathcal{T}$ n'est pas tannakienne, les conclusions (i) (ii) de 2.13 peuvent être en défaut. Supposons k de caractéristique 0 et contenant t transcendant sur $\mathbf{Q}$. On renvoie à [2] 1.27 pour la définition de la catégorie tensorielle (GL_t) sur k librement engendrée par un objet X_t de dimension t. On vérifie que si un objet X d'une catégorie tensorielle $\mathcal{T}$ sur k est de dimension t, il existe un $\otimes$-foncteur exact de (GL_t) dans $\mathcal{T}$ envoyant X_t sur X. Deux tels $\otimes$-foncteurs sont isomorphes, et les $\otimes$-automorphismes d'un tel $\otimes$-foncteurs sont ceux de X. En particulier, on dispose d'une $\otimes$-foncteur

$$(GL_t) \longrightarrow (GL_{t-1}) : X_t \longmapsto 1 \oplus X_{t-1}.$$

Itérons cette construction et soit $\mathcal{T}$ la limite inductive des catégories (GL_{t-n}) $(n \geq 0)$. On peut voir cette catégorie tensorielle sur k comme librement engendrée par un objet X_t de dimension t muni de décompositions $X_t = 1 \oplus X_{t-1}$, $X_{t-1} = 1 \oplus X_{t-2}, \cdots$. Dans (GL_{t-n}), $X_t = 1^n \oplus X_{t-n}$ a pour anneau d'endomorphismes $M_n(k) \times k$. Passant à la limite, on trouve que l'anneau des endomorphismes de X_t dans $\mathcal{T}$ est l'anneau des matrices infinies de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & \lambda . I \end{array}\right)$$

L'objet X_t de $\mathcal{T}$ n'est pas de longueur finie, et $\mathrm{Hom}(X_t, X_t)$ n'est pas de dimension finie sur k.

3. Rappels et compléments: groupoïdes

Dans [6], N. Saavedra cherche à écrire une catégories tannakienne comme catégorie des représentations d'une gerbe. Nous avons mis l'accent sur les représentations de groupoïdes transitifs. Comme nous allons l'expliquer, c'est un version moins intrinsèque de la même chose.

3.1. Soit k un corps commutatif. Comme en 1.6, dont nous suivons les notations, nous ne considérons que des schémas sur k.

Soit G un k-groupoïde agissant sur S. Pour tout k-schéma T, $(S(T), G(T), \circ)$ est une catégorie où toute flèche est inversible. Pour T variable ces catégories forment une catégorie fibrée $\mathcal{G}^0_{S:G}$, ou simplement $\mathcal{G}^0$, sur la catégorie (Sch/k) des schémas sur k: on dispose de foncteurs image inverse. L'image inverse par $u : T' \to T$ d'un objet a de $\mathcal{G}^0(T)$, i.e. de $a \in S(T) = \mathrm{Hom}_k(T, S)$ est le composé $a \circ u$. Celle d'un morphisme $f : f \in G(T)$ est $f \circ u$. Pour a, b deux objets de $\mathcal{G}^0(T)$, i.e. pour $a, b \in S(T)$, le foncteur qui à $u : T' \to T$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}^0(T')}(u^*a, u^*b)$ est représentable, représenté par l'image inverse de $G/S \times S$ par $(b, a) \circ u : T' \to S \times S$. En particulier, ce foncteur est un faisceaux pour la topologie *fpqc* (fidèlement plate quasi-compacte): $\mathcal{G}^0_{S:G}$ est un préchamp *fpqc* (i.e. les flèches se recollent).

Soit $\mathcal{G}_{S.G}$ ou simplement $\mathcal{G}$ le champ *fpqc* associé à $\mathcal{G}^0$. Ce champ contient $\mathcal{G}^0$ comme sous-catégorie pleine et il est caractérisé par la propriété que tout objet de $\mathcal{G}$ est localement dans $\mathcal{G}^0$. C'est un champ en groupoïdes. Pour tout champ $\mathcal{C}$ sur (Sch/k) le foncteur $\mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}$ induit une équivalence entre les catégories de foncteurs compatibles aux changements de base

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(\mathcal{G}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(\mathcal{G}^0, \mathcal{C}). \tag{3.1.1}$$

3.3. Pour $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée sur (Sch/k), appelons *représentation* de $\mathcal{F}$ un (Sch/k)-foncteur compatible aux changements de base de $\mathcal{F}$ dans le champ des faisceaux quasi-cohérents sur S variable. C'est la donnée, pour tout schéma T sur k, d'un foncteur R de $\mathcal{F}(T)$ dans les faisceaux quasi-cohérents sur T, de formation compatible aux changements de base. Notation: $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ est la catégorie des représentations de $\mathcal{F}$.

Soit G un groupoïde transitif agissant sur S. D'après 3.1, la restriction à $\mathcal{G}^0_{S\,G}$ est une équivalence de $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_{S:G})$ avec $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}^0_{S:G})$. Si R est une représentation de $\mathcal{G}^0_{S:G}$, on a pour tout T et tout $a : T \to S$ dans $\mathcal{G}^0_{S.G}(T)$ un isomorphisme $R(a) \xrightarrow{\sim} a^*R(\mathrm{Id}_S)$, et R est déterminé par le faisceau quasi-cohérent $R_0 := R(\mathrm{Id}_S)$ sur S et par les $R(g) := a^*R_0 \to b^*R_0$ pour $g : a \to b$ dans $\mathcal{G}^0_{S\,G}(T)$. Ces $R(g)$ sont une représentation de G (1.6), et $R \mapsto (R(\mathrm{Id}_S), \text{les } R(g))$ est une équivalence

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_{S\cdot G}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Rep}(S : G)\,. \tag{3.2.1}$$

Rappelons qu'une *gerbe* (*fpqc*) sur k est un champ *fpqc* en groupoïdes sur (Sch/k), non vide et tel que deux objets soient toujours localement isomorphes.

3.3 **Proposition.** *Avec les notations précédentes, pour que $\mathcal{G}_{S\,G}$ soit une gerbe, il faut et il suffit que $S \neq \emptyset$ et que G soit transitif (1.6).*

Preuve. Pour que deux objets soient toujours localement isomorphes, il faut et il suffit que tel soit le cas dans le cas universel des deux objets de $\mathcal{G}_0(S\times S)$ définis par les deux projections de $S\times S$ sur S. C'est la définition de "transitif".

3.4. Soient $\mathcal{G}$ une gerbe sur les schémas sur k et ω_0 un objet de $\mathcal{G}(S)$. Pour tout schéma sur $S \times S$: $(b,a) : T \to S \times S$, soit $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_0)(T)$ l'ensemble des isomorphismes $\alpha : a^*\omega_0 \to b^*\omega_0$. Si ce foncteur est représentable, il est représenté par un groupoïde G agissant transitivement sur S, qu'on appellera le groupoïde des k-automorphismes de ω_0.

Cette construction est inverse de celle de 3.1. Si le k-groupoïde G agit sur S, l'application identique de S est un objet de $\mathcal{G}_{S\,G}$ de groupoïde d'automorphismes G. Si $\mathcal{G}$ est une gerbe, que $S \neq \phi$, que ω_0 est un objet de $\mathcal{G}(S)$ et que le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_0)$ est représentable, représenté par le k-groupoïde transitif G agissant sur S, $\mathcal{G}^0_{S\,G}$ s'envoie dans $\mathcal{G}$ par un foncteur pleinement fidèle et le morphisme de gerbe induit de $\mathcal{G}_{S:G}$ dans $\mathcal{G}$ est une équivalence.

3.5. Soit $u : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un (Sch/k)-foncteur entre gerbes sur (Sch/k). Pour ω dans $\mathcal{G}_i(S)$, soit $\underline{\mathrm{Aut}}_S(\omega)$ le faisceau sur S qui à T sur $S : p : T \to S$

attache l'ensemble des automorphismes de $p^*\omega$ dans $\mathcal{G}_i(T)$. Si pour un $S \neq \emptyset$ et un ω dans $\mathcal{G}_1(S)$, $u : \underline{\mathrm{Aut}}_S(\omega) \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(u(\omega))$ est un isomorphisme, alors ω est une équivalence. Voici deux applications.

Soient G un k-groupoïde agissant transitivement sur S, $u : T \to S$ et G_T le groupoïde induit. On suppose que $T \neq \emptyset$. Le morphisme de préchamps $u : \mathcal{G}^0_{T:G_T} \to \mathcal{G}^0_{S:G}$ induit un isomorphisme du faisceau des automorphismes de Id_T dans $\mathcal{G}^0_{T:G_T}$ avec le faisceau des automorphismes de u dans $\mathcal{G}^0_{S:G}$. Le morphisme induit de gerbes $u : \mathcal{G}_{T:G_T} \to \mathcal{G}_{S:G}$ a la même propriété, donc est une équivalence. Appliquant (3.2.1), on obtient

$$\mathrm{Rep}(S : G) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Rep}(T : G_T)\,. \tag{3.5.1}$$

Soient G_1 et G_2 deux k-groupoïdes agissant transitivement sur $S = \phi$ et G_i^Δ le schéma en groupes sur S image inverse de G_i par l'application diagonale de S dans $S \times S$. Il représente le faisceau des automorphismes de Id_S dans $\mathcal{G}_{S:G_i}(S)$. Soit $u : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupoïdes. Si l'image inverse $u^\Delta : G_1^\Delta \to G_2^\Delta$ de u par l'application diagonale de S est un isomorphisme, le morphisme u induit donc une équivalence de gerbes de $\mathcal{G}_{S:G_1}$ avec $\mathcal{G}_{S:G_2}$. Appliquant 3.4 à ces gerbes et à l'objet sur S défini par l'application identique de S, on retrouve les G_i :

(3.5.2) si $u^\Delta : G_1^\Delta \to G_2^\Delta$ est un isomorphisme, alors u est un isomorphisme.

Si R est un représentation d'une gerbe $\mathcal{G}$, et qu'un $R(\omega)$ (ω dans $\mathcal{G}(T)$, $T \neq \emptyset$) a une propriété $\underline{\underline{P}}$ locale pour la topologie $fpqc$, tous les $R(\omega)$ ont cette propriété. Par exemple, il existe T avec $\mathcal{G}(T)$ non vide, et, remplaçant T par un de ses points, on peut supposer T spectre d'un corps; $R(\omega)$ est alors plat sur T. Pour $\underline{\underline{P}}$ "plat", on trouve que les $R(\omega)$ sont tous plats. De même, si un $R(\omega)$ est localement libre de rang n, ils le sont tous. Pour une représentation d'un groupoïde transitif $(\mathcal{M}, \rho)$, cela donne la platitude de $\mathcal{M}$ sur S et l'assertion (b) avant 1.7.

3.6. Soit $\mathcal{G}$ une gerbe ($fpqc$) sur (Sch/k). Pour ω_1 et ω_2 dans $\mathcal{G}(S)$, soit $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ le faisceau $fpqc$ sur S qui à $u : T \to S$ attache l'ensemble des isomorphismes $u^*\omega_1 \to u^*\omega_2$ dans $\mathcal{G}(T)$. Quel que soit $u : T \to S$, $\underline{\mathrm{Isom}}_T(u^*\omega_1, u^*\omega_2)$ est l'image inverse sur T de $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$. Si le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ est représentable, $\underline{\mathrm{Isom}}_T(\omega_1, \omega_2)$ l'est donc aussi. On pose $\underline{\mathrm{Aut}}_S(\omega) := \underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega, \omega)$. Si pour un $S \neq \emptyset$, le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ a une propriété $\underline{\underline{P}}$ locale $fpqc$, tout $\underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(\omega_1', \omega_2')$ vérifie encore $\underline{\underline{P}}$: deux objets de $\mathcal{G}$ étant localement isomorphe, il existe des $T_i \to S \times S'$ couvrant $S \times S'$, et donc couvrant S', tels que ω_1' et ω_1 (resp. ω_2' et ω_2) deviennent isomorphes sur les T_i. De même, si $\underline{\underline{P}}$ est une propriété locale *fpqc* de schémas sur S, et qu'un $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ est représentable par un schéma sur S vérifiant $\underline{\underline{P}}$, tout $\underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(\omega_1', \omega_2')$ qui est représentable est représenté par un schéma sur S' vérifiant $\underline{\underline{P}}$.

Pour $\underline{\underline{P}}$ "être plat sur S", on trouve comme en 3.5 qu'un groupoïde G transitif sur S est plat sur $S \times S$: on a $G = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\times S}(\mathrm{pr}_2^*\omega_0, \mathrm{pr}_1^*\omega_0)$. Pour $\underline{\underline{P}}$ la propriété d'un faisceau *fpqc* d'être représentable par un schéma affine sur la base S, on trouve que s'il existe $S \neq \emptyset$ et ω_1, ω_2 dans $\mathcal{G}(S)$ tels que $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ soit représentable par un schéma affine sur S, alors tout $\underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(\omega_1', \omega_2')$ est affine sur S'. On dit que $\mathcal{G}$ est une *gerbe à lien affine.*

Si $\mathcal{G}$ est une gerbe à lien affine sur (Sch/k) et que ω est dans $\mathcal{G}(S)$, $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega) := \underline{\mathrm{Isom}}_{S\times S}(\mathrm{pr}_2^*\omega, \mathrm{pr}_1^*\omega)$ est affine sur $S \times S$. Par 3.1, 3.4 les gerbes à lien affines correspondent aux groupoïdes agissant transitivement sur S et affines sur $S \times S$.

Soient $\mathcal{G}$ une gerbe à lien affine. Il existe S spectre d'un corps tel que $\mathcal{G}(S)$ soit non vide. Soient ω_0 dans $\mathcal{G}(S)$ et $G = \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$. La gerbe $\mathcal{G}$ est équivalente à $\mathcal{G}_{S:G}$ (3.4) et toute gerbe à lien affine est équivalente à une gerbe $\mathcal{G}_{S:G}$ avec S spectre d'un corps et G un k-groupoïde affine agissant transitivement sur S.

On a dans ce cadre les résultats suivants, qui se démontrent comme dans le cas particulier des représentations de groupes.

3.7 **Proposition**. *Soient K un corps non nécessairement commutatif et L un cogèbroïde agissant sur K. Toute représentation V de L est réunion filtrante de ses sous-représentations de dimension finie sur K.*

Preuve. Soit $\rho : V \to V \underset{K}{\otimes} L$ la coaction. Tout $a \in V \underset{K}{\otimes} L$ est contenu dans un sous-espace $V_1 \underset{K}{\otimes} L$, avec V_1 de dimension finie, et le plus petit V_1 possible est l'ensemble des $\lambda(a)$ pour $\lambda \in \mathrm{Hom}_{K-}(L, K)$ (morphismes de K-espaces vectoriels à gauche). Pour $a = \rho(v)$, ce V_1 contient v (prendre λ = counité) et est stable: si $\rho(v) = \sum v_i \otimes \ell_i$ avec des ℓ_i linéairement indépendents, V_1 est engendré par les v_i. L'axiome des coactions donne

$$\sum \rho(v_i) \otimes \ell_i = \sum v_i \otimes c(\ell_i) \in V_1 \otimes L \otimes L$$

d'où $\rho(v_i) \in V_1 \otimes L$ pour chaque i.

3.8 **Corollaire**. *Sous les hypothèses de 3.7, L est réunion filtrante de sous-cogèbroïdes de type fini en tant que $K \otimes K$-modules.*

La preuve sera donnée en 4.9.

3.9 **Corollaire**. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, transitif et affine sur $S \times S$. Tout module quasi-cohérent sur S muni d'une action de G est réunion filtrante de ses sous-modules à coaction localement libres de rang fini.*

Preuve. Par 3.5, on se ramère au cas 3.7 où S est spectre d'un corps.

3.10. Dans SGA 3 V, les actions de groupoïdes ont été introduites pour démontrer des existences de quotient pour des actions de groupe. Dans cette direction, le résultat suivant est un corollaire de M. Artin [**1**].

3.11 **Proposition**. *Soit X un schéma plat de type fini sur S noethérien et G un S-groupoïde agissant sur X, de type fini sur $X \underset{S}{\times} X$. On suppose que*

(a) L'image inverse G^Δ de G sur la diagonale de $X \underset{S}{\times} X$ est plate sur X.

(b) Les projections $b, s : G \rightrightarrows X$ sont plates.
Alors, il existe une espace algébrique T quotient de X par G avec X fidèlement plat sur T et G fidèlement plat $X \underset{T}{\times} X$.

Preuve. On commence par se ramener au cas où S est de type fini sur $\mathbf{Z}$, pour pouvoir appliquer [**1**]. La composition fait de G^Δ un schéma en groupes plat de présentation finie sur X. Il agit par composition à gauche sur G vu comme schéma sur X par s. Par [**1**] 6.3, $R := G^\Delta \backslash G$ existe: le faisceau $fppf$ quotient est représentable par un espace algébrique. Puisque $G \to R$ est couvrant $fppf$ et que $G \underset{R}{\times} G = G^\Delta \underset{X}{\times} G$, $G \to R$ est fidèlement plat. On en déduit que R est plat sur X. Le quotient R s'envoie dans $X \underset{X}{\times} X$ par un monomorphisme. On en déduit que R est un schéma. On peut alors à nouveau appliquer [**1**] 6.3 à R agissant sur X pour obtenir T. A nouveau, T représente le faisceau $fppf$ quotient de X par R, et de ce que X couvre T avec $R = X \underset{T}{\times} X$ on déduit que X est fidèlement plat sur T; G est fidèlement plat sur $R = X \underset{T}{\times} X$.

4. Comonades

4.1 *Rappels*. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la composition des foncteurs fait de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale (2.2, [5] VII 1): la composition des foncteurs est associative et admet le foncteur identique pour unité. Une *comonade* ([5] VI 1), on dit aussi cotriple, est un monoïde dans la catégorie duale, i.e. un foncteur F muni de $c : F \to F \circ F$ coassociatif et admettant une counité $\epsilon : F \to \mathrm{Id}$: les flèches composées

$$F \xrightarrow{c} F \circ F \overset{c \circ 1}{\underset{1 \circ c}{\rightrightarrows}} F \circ F \circ F$$

sont égales et les flèches composées

$$F \xrightarrow{c} F \circ F \overset{\epsilon \circ 1}{\underset{1 \circ \epsilon}{\rightrightarrows}} F$$

sont l'identité. Noter que la counité, si elle existe, est unique. Une *coaction* de la comonade F sur un objet X de $\mathcal{C}$ est un morphisme

$$\rho : X \longrightarrow F(X)$$

tel que les flèches composées

$$X \xrightarrow{\rho} F(X) \overset{c}{\underset{F(\rho)}{\rightrightarrows}} FF(X)$$

soient égales et que les flèches composées

$$X \xrightarrow{\rho} F(X) \xrightarrow{\epsilon} X$$

soit l'identité.

Soit (T, U) une paire de foncteurs adjoints $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $U : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Soient $\epsilon : TU \to \mathrm{Id}$ et $\eta : \mathrm{Id} \to UT$ les flèches d'adjonction, $F := TU$ et $c := T\eta U : F \to F \circ F$. On sait que F, muni de c est une comonade de counité ϵ et que $T\eta : T \to TUT = FT$ définit fonctoriellement sur chaque TE (E dans $\mathcal{A}$) une coaction de F.

Le théorème de Barr-Beck ([5] VI 7) affirme ceci. Supposons que T a les propriété suivantes:

(a) une double flèche $E \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F$ a un noyau si son image par T en a un;(b) si $u : K \to E$ égalise f, g, alors K est un noyau de (f, g) dès que TK est un noyau de (Tf, Tg). Alors, le foncteur

$$T : \mathcal{A} \to \text{objets de } \mathcal{B} \text{ munis d'une coaction de } F = TU$$

est une équivalence.

Noter que les hypothèses (a) (b) sont vérifiées si les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont abéliennes et que T est exact et fidèle.

4.2. Un prédécesseur du théorème de Barr-Beck est le théorème de descente fidèlement plate pour les modules (SGA1 VIII 1). Pour le bénéfice des géomètres algébristes, expliquons la relation entre les deux.

On prend pour $\mathcal{A}$ la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, pour $\mathcal{B}$ celle des modules sur B commutatif fidèlement plat sur A, pour T l'extension des scalaires de A à B et pour U la restriction de scalaires. Le foncteur $F = TU$ est $M \mapsto B \underset{A}{\otimes} M$, et on identifie $B \underset{A}{\otimes} M$ à $(B \underset{A}{\otimes} B) \overset{2}{\underset{B}{\otimes}} M$ par $b \otimes m \mapsto b \otimes 1 \otimes m$. Le "2" sur $\otimes$ indique l'usage de la seconde structure de B-module sur $B \otimes B$. La première structure est celle qui définit la structure de B-module de $FM = (B \underset{A}{\otimes} B) \overset{2}{\underset{B}{\otimes}} M$. Un morphisme $u : M \to FM = (B \underset{A}{\otimes} B) \overset{2}{\underset{B}{\otimes}} M$ s'identifie à un morphisme de $B \underset{A}{\otimes} B$-modules

$$u' : (B \underset{A}{\otimes} B) \overset{1}{\underset{B}{\otimes}} M \longrightarrow (B \underset{A}{\otimes} B) \overset{2}{\underset{B}{\otimes}} M$$

(avec $u' : (1 \otimes m) = u(m)$). Passons au language géométrique: $S := \mathrm{Spec}(A)$, $X := \mathrm{Spec}(B)$, $\mathcal{M} :=$ faisceau quasi-cohérent sur X défini par M. A u' correspond sur $X \underset{S}{\times} X = \mathrm{Spec}(B \underset{A}{\otimes} B)$ un morphisme

$$u'' : \mathrm{pr}_1^* \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{pr}_2^* \mathcal{M} .$$

Que u soit une coaction de F se traduit: sur $X \underset{S}{\times} X \underset{S}{\times} X$, le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pr}_1^*\mathcal{M} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_{13}^*(u'')"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{12}^*(u'')"'] & & \mathrm{pr}_3^*\mathcal{M} \\ & \mathrm{pr}_2^*\mathcal{M} \arrow[ur, "\mathrm{pr}_{23}^*(u'')"'] & \end{tikzcd}$$

commute, et l'image inverse de u'' par l'application diagonale $\Delta : X \to X \underset{S}{\times} X$ est l'identité. Quel que soit le S-schéma Y et $f, g : Y \to X$, $(f,g)^* u''$ est un morphisme $c_{g,f} : f^*\mathcal{M} \to g^*\mathcal{M}$; les conditions ci-dessus signifient que pour tout Y on a $c_{ff} = \mathrm{Id}$ et $c_{h,f} = c_{hg} c_{gf}$. Elles impliquent que les c_{gf} sont des isomorphismes, et en particulier (pour $Y = X \underset{S}{\times} X$) que u''

est un isomorphisme. Les coactions de F s'identifient donc aux données de descente sur $\mathcal{M}$ et le théorème de Barr-Beck redonne, avec en fait la démonstration habituelle, que les A-modules s'identifient aux B-modules munis d'une donnée de descente.

4.3. Nous aurons besoin d'un cas particulier de 4.1 plus général que 4.2. Soient A et B deux anneaux (à unités) non nécessairement commutatifs, $\mathcal{A}$ la catégorie des A-modules à droite et $\mathcal{B}$ celle des B-modules à droite. Chaque A,B-bimodule ${}_AM_B$ définit un foncteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$: $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$. Cette construction est un foncteur pleinement fidèle:

$$(A, B - \text{bimodules}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

admettant la rétraction $F \mapsto F(A)$. Nous appliquerons 4.1 à des foncteurs de ce type $\otimes M$ de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. La composition, pour les foncteurs, correspond au produit tensoriel pour les bimodules et les morphismes de foncteurs 4.1 donneront lieu à des morphismes de bimodules. Par exemple: si L est un B,B-bimodule, définissant le foncteur $F : N \mapsto N \underset{B}{\otimes} L$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, le foncteur $F \circ F$ est défini par $L \underset{B}{\otimes} L$ et une structure de comonade $c : F \to F \circ F$ sur F équivaut sur L à une structure de cogèbroïde agissant sur $B : L \to L \underset{B}{\otimes} L$. Une coaction $N \to F(N)$ de F sur N s'identifie à une coaction $N \to N \underset{B}{\otimes} L$ de L sur N.

Pour tout B-module à droite projectif de type fini M, de dual $M^\vee$, et tout B-module X, le morphisme

$$X \underset{B}{\otimes} M^\vee \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M, X) : x \otimes \alpha \longmapsto x.\alpha(m) \tag{4.3.1}$$

est un isomorphisme. Si ${}_AM_B$ est un A,B-bimodule projectif de type fini en tant que B-module, de B-dual ${}_BM_A^\vee$, le foncteur

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{B} : E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$$

a donc pour adjoint à droite U le foncteur $N \mapsto N \underset{B}{\otimes} {}_BM_A^\vee$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_B(E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B, N) &= \mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_B({}_AM_B, N)) \\ &\underset{4.3.1}{=} \mathrm{Hom}_A(E, N \otimes {}_BM_A^\vee).\end{aligned}$$

Les foncteurs composés TU et UT sont les foncteurs

$$N \mapsto N \underset{B}{\otimes} ({}_BM^\vee_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)$$

et $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} ({}_AM_B \underset{B}{\otimes} {}_BM^\vee_A)$. Les flèches d'adjonction $TU \to \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \to UT$ sont définies par des morphismes de bimodules $\mathrm{ev} : {}_BM^\vee_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \to B$ et $\Delta : A \to {}_AM_B \underset{B}{\otimes} {}_BM^\vee_A$. Le morphisme ev (resp. Δ): $TUB \to B$ (resp. $A \to UTA$) correspond par adjonction à l'identité de UB (resp. TA). Pour ev, on obtient le morphisme

$$\mathrm{ev} : {}_BM^\vee_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \longrightarrow B : \alpha \otimes m \longmapsto \alpha(m)\,.$$

Pour M un B-module à droite projectif de type fini M, de dual $M^\vee$, soit $\delta(M)$ ou simplement δ l'élément de $M \underset{B}{\otimes} M^\vee$ d'image l'identité de M par l'isomorphisme (4.3.1) pour $X = M$:

$$M \underset{B}{\otimes} M^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_B(M)\,. \tag{4.3.2}$$

Pour $M = {}_AM_B$, (4.3.2) est un isomorphismes de A,A-bimodules et Δ est le morphisme

$$\Delta : A \longrightarrow {}_AM_B \underset{B}{\otimes} {}_BM^\vee_A : a \longmapsto a\delta = \delta a\,.$$

Si on écrit un B-module à droite projectif de type fini M comme facteur direct d'un module libre B^n : $B^n \underset{e}{\overset{e^\cdot}{\rightleftarrows}} M$ avec e (resp. e) de coordonnées $e^i \in M$ (resp. $e_i \in M^\vee$), on a

$$\delta(M) = \sum e^i e_i = \sum \delta^i_j e^j e_i\,. \tag{4.3.3}$$

Traduisons 4.1. On trouve sur $L := {}_BM^\vee_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ une structure de cogèbroïde $c : L \to L \underset{B}{\otimes} L$ agissant sur B, définie par Δ et de counité ev, et, pour tout A-module à droite E, une coaction $E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \to E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \underset{B}{\otimes} L$ de L sur $E \otimes {}_AM_B$. Cette coaction est définie par Δ: c'est

$$E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \longrightarrow E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \underset{B}{\otimes} {}_BM^\vee_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B : e \otimes m \longmapsto e \otimes \delta \otimes m\,.$$

Le théorème de Barr-Beck (4.1) donne:

4.4 **Proposition.** *Si le A, B-bimodule ${}_AM_B$ est projectif de type fini sur B et fidèlement plat sur A, le foncteur $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ est une équivalence de la catégorie des A-modules avec celle des B-modules munis d'une coaction du cogèbroïde $L := {}_BM_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$.*

4.5 **Proposition.** *Sous les hypothèses de 4.4, pour que E soit un A-module de type fini (resp. de présentation finie), il faut et il suffit que $E \otimes {}_AM_B$ soit un B-module de type fini (resp. de présentation finie).*

Preuve (*cf* SGA 1 VIII 3.4). Puisque ${}_AM_B$ est de type fini sur B, $E \otimes {}_AM_B$ est de type fini si E l'est. Récriproquement, si $E \otimes {}_AM_B$ est de type fini, il existe un sous-module de type fini F de E tel que $F \otimes {}_AM_B \hookrightarrow E \otimes {}_AM_B$ contienne tous les éléments d'un système générateur fini de $E \otimes {}_AM_B$. On a alors $F \otimes {}_AM_B \xrightarrow{\sim} E \otimes {}_AM_B$, donc $F = E$ et E est de type fini.

Si E est de type fini: $E = A^n/R$, E est de présentation finie si et seulement si R est de type fini, et $\omega(E) = {}_AM_B^n/\omega(R)$ est de présentation finie si et seulement si $\omega(R)$ est de type fini. L'assertion respée en résulte.

4.6 *Remarque.* (i) Si k est un anneau commutatif, que A et B sont des k-algèbres et que les deux structures de k-module de ${}_AM_B$ coïncident, le cogèbroïde $L := {}_BM_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ est un k-cogèbroïde.

(ii) Pour $A = k$, et M un B-module projectif de type fini, on obtient ainsi sur $M^\vee \underset{k}{\otimes} M$ une structure de k-cogèbroïde agissant sur B, de counité ev. Ce cogèbroïde agit sur M (l'image par $\underset{k}{\otimes} M$ de k) par $\rho_0 : M \to M \underset{B}{\otimes} L$: $m \mapsto \delta \otimes m \in M \underset{B}{\otimes} M^\vee \underset{k}{\otimes} M = M \underset{B}{\otimes} L$.

4.7. Soient k un anneau commutatif, B_1 et B_2 deux k-algèbres, $\mathcal{C}$ une petite catégorie et ω_j $(j = 1, 2)$ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des B_j-modules à droite projectifs de type fini. On se propose de définir un B_1, B_2-bimodule $L_k(\omega_1, \omega_2)$, dont coïncident les structures induites de k-modules, muni pour tout X dans $\mathcal{C}$ d'un morphisme de bimodules

$$\omega_1(X)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega_2(X) \longrightarrow L_k(\omega_1, \omega_2) \tag{4.7.1}$$

tel que pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ le diagramme

$$(4.7.2)\qquad \begin{tikzcd} \omega_1(Y)^\vee \otimes \omega_2(X) \arrow[r, "\omega_1(f)^t\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\omega_2(f)"] & \omega_1(X)^\vee \otimes \omega_2(X) \arrow[d] \\ \omega_1(Y)^\vee \otimes \omega_2(Y) \arrow[r] & L(\omega_1,\omega_2) \end{tikzcd}$$

soit commutatif, et universel pour ces propriété. Dans la terminologie de [**5**] IX 6, $L(\omega_1,\omega_2)$ est le "coend" de $\omega_1(Y)^\vee \otimes \omega_2(X)$. Définition: $L_k(\omega_1,\omega_2)$ est le quotient de la somme L_0 des $\omega_1(X)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega_2(X)$ (X dans $\mathcal{C}$) qui égalise les doubles flèches

$$(\omega_1(f)^t \otimes 1, 1 \otimes \omega_2(f)) : \omega_1(Y)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega_2(X) \rightrightarrows L_0\,.$$

Si cela ne prête pas à confusion on écrira simplement $L(\omega_1,\omega_2)$ pour $L_k(\omega_1,\omega_2)$.

La donnée de morphismes (4.7.1) équivaut à celle de morphismes de B_2-modules

$$(4.7.3)\qquad \lambda(X) : \omega_2(X) \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L(\omega_1,\omega_2)$$

et (4.7.2) signifie que $\lambda(X)$ est fonctoriel en X. La propriété universelle de $L(\omega_1,\omega_2)$ est que pour tout B_1, B_2-bimodule U, si les deux structures de k-module de U coïncident, l'application $f \mapsto (f \circ \lambda(X))$ de $\mathrm{Hom}_{B_1,B_2}(L(\omega_1,\omega_2),U)$ dans les systèmes de morphismes

$$u(X) : \omega_2(X) \to \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} U,$$

fonctoriels en X, est une bijection.

Pour trois foncteurs $\omega_1,\omega_2,\omega_3$, itérant (4.7.3), on obtient

$$\omega_3(X) \longrightarrow \omega_2(X) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_3) \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L(\omega_1,\omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_3)$$

fonctoriel en X, d'où

$$(4.7.4)\qquad L(\omega_1,\omega_3) \longrightarrow L(\omega_1,\omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_3)\,.$$

Le coproduit (4.7.4) est coassociatif: pour quatre foncteurs $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} L(\omega_1,\omega_4) \arrow[r] \arrow[d] & L(\omega_1,\omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_4) \arrow[d] \\ L(\omega_1,\omega_3) \underset{B_3}{\otimes} L(\omega_3,\omega_4) \arrow[r] & L(\omega_1,\omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_3) \underset{B_3}{\otimes} L(\omega_3,\omega_4) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Les morphismes d'évaluations $\omega_j(X)^\vee \otimes \omega_j(X) \to B_i$ définissent une counité $c : L(\omega_j, \omega_j) \to B_j$: les flèches composées

$$L(\omega_1,\omega_2) \longrightarrow L(\omega_1,\omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L(\omega_2,\omega_2) \xrightarrow{1\otimes c} L(\omega_1,\omega_2)$$

$$L(\omega_1,\omega_2) \longrightarrow L(\omega_1,\omega_1) \underset{B_1}{\otimes} L(\omega_1,\omega_2) \xrightarrow{c\otimes 1} L(\omega_1,\omega_2)$$

sont l'identité.

Le cas qui nous importe le plus est celui où $B_1 = B_2$ et où $\omega_1 = \omega_2$. Soit $B := B_1 = B_2$. L'application (4.7.4) pour $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ fait de $L_k(\omega) := L_k(\omega, \omega)$ un k-cogèbroïde agissant sur B. Si cela ne prête pas à confusion, on le notera simplement $L(\omega)$. Les $\lambda(X)$ sont une coaction de $L(\omega)$ sur les $\omega(X)$, fonctorielle en X. La propriété universelle de $L(\omega)$ assure que, pour tout k-cogèbroïde ψ agissant sur B, il revient au même de se donner une coaction fonctorielle de ψ sur les $\omega(X)$ ou un morphisme de cogèbroïdes $L(\omega) \to \psi$.

On appellera $L(\omega)$ le *cogèbroïde des k-endomorphismes de ω*.

4.8 *Exemple.* (i) Pour $\mathcal{C}$ réduite à un objet et à sa flèche identique, la donnée de ω est celle d'un B-module à droite projectif de type fini M. Le cogèbroïde $L(\omega)$ est $M^\vee \underset{k}{\otimes} M$ et sa coaction sur M celle de 4.6. La propriété universelle de $L(\omega)$ dit que, pour tout k-cogèbroïde ψ agissant sur B, l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(M, M \otimes \psi) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{B,B}(M^\vee \otimes M, \psi)$$

fait se correspondre les coactions de ψ sur M et les morphismes de cogèbroïde de $M^\vee \underset{k}{\otimes} M$ dans ψ.

(ii) Soient comme en 4.3 ${}_AM_B$ un A,B-bimodule projectif de type fini en tant que B-module à droite, ${}_BM_A^\vee$ son B-dual et $L := {}_BM_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$.

On suppose que A et B sont des k-algèbres et que les deux structures de k-module de ${}_AM_B$ coïncident. Pour $k = \mathbf{Z}$, ces hypothèses sont automatiques. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules à droite, contenant le A-module A, et telle que les $E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ soient projectifs de type fini sur B. Soit ω le foncteur $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$. Par 4.3, L coagit sur les $\omega(E)$ (E dans $\mathcal{C}$), d'où un morphisme

$$L(\omega) \longrightarrow L\,. \tag{4.8.1}$$

Ce morphisme est un isomorphisme. Pour $\mathcal{C}$ réduite au A-module A, c'est la définition du produit tensoriel sur A. Dans le cas général, la vérification sera donnée en 4.11.

4.9 **Preuve** de 3.8. La comultiplication $c : L \to L \underset{K}{\otimes} L$ est une coaction de L sur L (représentation régulière). D'après 3.7, L est réunion filtrante de sous-représentations V_i de dimension finie sur K. La coaction de L sur V_i correspond par 4.8(i) à un morphisme de cogèbroïdes $f_i : V_i^\vee \otimes V_i \to L$. La counité e de L induit une forme linéaire sur V_i et $f_i(e \,|\, V_i \otimes x) = x$. L'image de f_i contient donc V_i. Parce que K est un corps, l'image de f_i est un sous-cogèbroïde de L. Le cogèbroïde L est réunion filtrante des images des f_i et ceci prouve 3.8.

4.10 *Fonctorialités.*

(i) Soit $f : B_j \to B'_j$ et $\otimes_{B_j} B'_j$ le foncteur d'extension des scalaires. On a

$$L(\omega_1, \omega_2) \underset{B_1 \underset{k}{\otimes} B_2}{\otimes} (B'_1 \underset{k}{\otimes} B'_2) \xrightarrow{\sim} L((\otimes_{B_1} B'_1) \circ \omega_1, (\otimes_{B_2} B'_2) \circ \omega_2)\,. \tag{4.10.1}$$

(ii) Soit $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Les morphismes $\omega_2 TD \to \omega_1 TD \otimes L(\omega_1, \omega_2)$ définissent

$$L(\omega_1 \circ T, \omega_2 \circ T) \longrightarrow L(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{4.10.2}$$

(iii) Si $\mathcal{C}$ est limite inductive filtrante de catégories $\mathcal{C}_i$ et que T_i est le foncteur naturel $\mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$, les morphismes 4.10.2 induisent un isomorphisme

$$\varinjlim L(\omega_1 \circ T_i, \omega_2 \circ T_i) \xrightarrow{\sim} L(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{4.10.3}$$

(iv) Supposons B_j commutatif. Soient $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégories, ω_j^i de source $\mathcal{C}_i$ $(i \in I\,,\ j = 1,2)$ et $\otimes\omega_j^i$ le foncteur de source le produit $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_i$ produit tensoriel sur B_j des ω_j^i : $(\otimes\omega_j^i)((C_j)) := \underset{B_j}{\otimes}\, \omega_j^i(C_i)$. On a

$$L(\otimes\omega_1^i, \otimes\omega_2^i) \xrightarrow{\sim} \underset{B_1 \underset{k}{\otimes} B_2}{\otimes} L(\omega_1^i, \omega_2^i)\,.$$

4.11 *Vérification de 4.8(ii).* Soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ réduite à A. La fonctorialité 4.10(ii) fournit $L(\omega|\mathcal{D}) \to L(\omega)$. On a (*cf* 4.8(ii)) $L(\omega|\mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} L$ et le triangle

$$\begin{tikzcd} L(\omega|\mathcal{D}) \arrow[rr, "4\,10(ii)"] \arrow[dr, "(4\,8\,1)"'] & & L(\omega) \arrow[dl, "(4.8\,1)"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le morphisme 4.10(ii) admet donc une rétraction et il suffit de vérifier que $L(\omega|\mathcal{D})$ s'envoie sur $L(\omega)$, i.e. que pour tout C dans $\mathcal{C}$, l'image dans $L(\omega)$ de $\omega(C)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(C)$ est contenue dans celle de $\omega(A)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(A)$. Tout élément de $\omega(C)^\vee \otimes \omega(C)$ est une somme finie $\sum \alpha_i \otimes x_i$ et chaque $x_i \in C \underset{A}{\otimes}\, {}_A M_B$ est une somme finie $\sum \alpha_{ij} \otimes m_j$, donc une somme d'éléments de la forme $f(y)$ avec $f : A \to C$ et $y \in \omega(A)$. Il suffit dès lors de vérifier qu'un élément de $\omega(C)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(C)$ de la forme $\alpha \otimes f(y)$, $f : A \to C$, $y \in \omega(A)$, a une image dans $L(\omega)$ contenu dans celle de $\omega(A)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(A)$. Par définition de $L(\omega)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \omega(C)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(A) \arrow[r, "{}^t f \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes f"] & \omega(A)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(A) \arrow[d] \\ \omega(C)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(C) \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

est commutatif. Appliquant ceci à $\alpha \otimes y \in \omega(C)^\vee \otimes \omega(A)$, on trouve que l'image de $\alpha \otimes f(y)$ est aussi celle de ${}^t f(\alpha) \otimes y \in \omega(A)^\vee \underset{k}{\otimes} \omega(A)$.

4.12. On suppose que B est un corps. Soient L un k-cogèbroïde agissant sur B, C la catégorie des B-espaces vectoriels de rang fini munis d'une coaction de L et ω le foncteur d'oubli. Puisque L coagit sur chaque $\omega(X)$, la propriété universelle de $L(\omega)$ fournit un morphisme u de $L(\omega)$ dans L.

4.13 **Proposition.** *Avec les hypothèses et notation de 4.12, le morphisme $u : L(\omega) \to L$ est un isomorphisme.*

Preuve. Par construction, une coaction de L sur V de rang fini est naturellement relevée à $L(\omega)$. Appliquant 3.7 et passant à la limite inductive, on trouve que la restriction "de rang fini" est inutile. Prenant $V = L$, et la coaction $c : L \to L \underset{B}{\otimes} L$, on obtient $c_1 : L \to L \underset{B}{\otimes} L(\omega)$. Soit $a = (\text{counité} \otimes 1) \circ c_1 : L \to L(\omega)$. Puisque $(1 \otimes u) \circ c_1 = c$, on a $ua = \mathrm{Id}$.

Soit V muni d'une coaction ρ, relevée en une coaction $\tilde{\rho}$ de $L(\omega)$. Puisque $\rho : V \to V \otimes L$ est un morphisme de vectoriels à coaction, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\tilde{\rho}"] & V \otimes L \arrow[d, "1\otimes c_1"] & \\
V \otimes L\omega \arrow[r, "\rho\otimes 1"] & V \otimes L \otimes L\omega \arrow[r, "1\otimes \text{counité} \otimes 1"] & V \otimes L\omega
\end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où $\tilde{\rho} = (1 \otimes a)\rho$. Le morphisme déduit de $\rho : V^\vee \otimes V \to L\omega$ admet donc la factorisation $V^\vee \otimes V \to L \xrightarrow{a} L\omega$. La définition de $L\omega$ montre alors que a est surjectif, donc que u est isomorphisme.

5. Produit tensoriel de catégories abéliennes

5.1. Soient k un anneau commutatif et $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille finie de catégories abéliennes k-linéaires. Nous appellerons une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{A}$, munie d'un foncteur k-multilinéaire exact à droite en chaque variable

$$\otimes : \Pi \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A} \tag{5.1.1}$$

un *produit tensoriel sur k* des catégories $\mathcal{A}_i$ si la condition suivante est vérifiée. Pour $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne k-linéaire, soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\text{à}\,d}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs exacts à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$. Soit

$\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}((\mathcal{A}_i)_{i\in I};\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs multilinéaires exacts à droite en chaque variable du produit des $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{C}$. On exige que pour tout $\mathcal{C}$ le foncteur de composition avec (5.1.1)

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}((\mathcal{A}_i)_{i\in I},\mathcal{C})$$

soit une équivalence de catégories. Un tel produit tensoriel, s'il existe, est unique (à équivalence unique à isomorphisme unique près). Si les $\mathcal{A}_i$ et les $\mathcal{A}'_i$ admettent un produit tensoriel sur k, des foncteurs exacts à droite $T_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}'_i$ induisent un foncteur exact à droite $\otimes T_i : \otimes\mathcal{A}_i \to \otimes\mathcal{A}'_i$. Si les $\mathcal{A}_i$ sont limites inductives filtrantes de catégories $\mathcal{A}_i^\alpha$ et que pour chaque α le produit tensoriel des $\mathcal{A}_i^\alpha$ existe, la limite inductive des $\bigotimes_i \mathcal{A}_i^\alpha$ est un produit tensoriel des $\mathcal{A}_i$.

Variante. La définition 5.1 est adaptée à nos besoins. Il serait parfois plus naturel de la modifier en remplaçant $\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}$ par la catégorie des foncteurs qui commutent à toutes les limites inductives (non supposées filtrantes) qui existent à la source.

5.2. Pour A une k-algèbre cohérente (à droite), nous noterons $(A)_{\mathrm{coh}}$ la catégorie abélienne des A-modules à droite de présentation finie. On note A^{opp} la k-algèbre apposée. Si A est cohérente à gauche, $(A^{\mathrm{opp}})_{\mathrm{coh}}$ est donc la catégorie des A-modules à gauche de présentation finie.

Soit A une k-algèbre cohérente (à droite) et $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne k-linéaire. Soit A_d l'algèbre A, vue comme A-module à droite. On a $\mathrm{End}(A_d) = A$ et le foncteur $T \mapsto T(A_d)$ est une équivalence de $\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}((A)_{\mathrm{coh}},\mathcal{C})$ avec la catégorie des objets X de $\mathcal{C}$ munis d'une structure de A-module à gauche $A \to \mathrm{End}(X)$ k-linéaire. Le foncteur inverse attache à M le foncteur $N \mapsto N \underset{A}{\otimes} M$. Si $N = \mathrm{coker}(d : A_s^m \to A_s^n)$,

$$N \underset{A}{\otimes} M := \mathrm{coker}(d : M^m \to M^n)\,.$$

De même, si (A_i) $(i \in I)$ est une famille finie de k-algèbres cohérentes, le foncteur $T \mapsto T((A_{id}))$ est une équivalence de $\underline{\mathrm{Hom}}_{k,e\,\grave{a}\,d}((A_i)_{\mathrm{coh},i\in I},\mathcal{C})$ avec la catégorie des objets X de $\mathcal{C}$ munis de structures de A_i-module commutant deux à deux et k-linéaires, i.e. d'une structure k-linéaire de $\otimes A_i$-module. Appliquant la définition 5.1, on trouve:

5.3 **Proposition.** *Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de k-algèbres cohérentes dont le produit tensoriel sur k est encore cohérent. Le produit tensoriel sur k :*

$$\otimes : \Pi(A_i)_{\mathrm{coh}} \longrightarrow (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}$$

fait de $(\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}$ *le produit tensoriel sur* k *des* $(A_i)_{\mathrm{coh}}$.

5.4 **Corollaire**. *Sous les hypothèses de 5.3, si* k *est un corps, le produit tensoriel:* $\otimes : \Pi(A_i)_{\mathrm{coh}} \to \otimes(A_i)_{\mathrm{coh}} = (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}$ *est exact en chaque variable et on a*

$$\bigotimes_k \mathrm{Hom}(M_i, N_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\otimes M_i, \otimes N_i)\,. \tag{5.4.1}$$

Preuve. Le produit tensoriel est exact car 5.3 l'interprète comme un produit tensoriel sur k . Les foncteurs aux deux membres de (5.4.1) sont multilinéaires et exacts à gauche en les M_i . Résolvant les M_i :

$$A_i^{m_i} \to A_i^{n_i} \to M_i \to 0,$$

on se ramène à supposer que $M_i = A_i$. Les deux membres s'identifient alors au produit tensoriel sur k des N_i .

5.5 **Proposition**. *Si* k *est un corps et que les* A_i *sont de dimension finie sur* k *, le produit tensoriel*

$$\otimes : \Pi(A_i)_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \otimes(A_i)_{\mathrm{coh}} = (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}\,,$$

exact en chaque variable d'après 5.4, fait de la catégorie duale de $(\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}$ *le produit tensoriel des duales des catégories* $(A_i)_{\mathrm{coh}}$.

Preuve. Le foncteur "k-dual" D est une antiéquivalence de $(A_i^{\mathrm{opp}})_{\mathrm{coh}}$ avec $(A_i)_{\mathrm{coh}}$. Il est compatible au produit tensoriel sur k : commutativité à isomorphisme canonique près de

$$\begin{array}{ccc}
\Pi(A_i^{\mathrm{opp}})_{\mathrm{coh}} & \xrightarrow{\otimes} & (\otimes A_i^{\mathrm{opp}})_{\mathrm{coh}} \\
\downarrow D & & \downarrow D \\
\Pi(A_i)_{\mathrm{coh}}^{\mathrm{opp}} & \xrightarrow{\otimes} & (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}^{\mathrm{opp}}
\end{array}$$

et 5.5 résulte de 5.3.

5.6 *Mise en garde*. Sous les hypothèses de 5.5, si $T : \Pi(A_i) \to \mathcal{C}$ est un foncteur k-multilinéaire exact en chaque variable, T se factorise de façon unique par un foncteur exact à droite $T_d : (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{C}$ (5.3). Par 5.5, il admet aussi une factorisation unique par $T_s : (\otimes A_i)_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{C}$ exact à gauche. L'exemple suivant montre que ces prolongement peuvent différer, i.e. que T_d peut ne pas être exact.

Soient k' une extension finie inséparable de k, $I = \{1,2\}$, $A_i = k'$, et $(A_1)_{\mathrm{coh}} = (A_2)_{\mathrm{coh}} = \mathcal{C} = \mathrm{Vect}(k')$. Soit T le foncteur produit tensoriel sur k'. Le foncteur T_d des $k' \underset{k}{\otimes} k'$-modules de type fini dans $\mathrm{Vect}(k')$ est $X \mapsto X \underset{k'\otimes k'}{\otimes} k'$. Il n'est pas exact. On peut vérifier que le foncteur T_s est isomorphe au foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}_{k'\otimes k'}(k', X)$.

Cette difficulté disparaît en caractéristique 0:

5.7 **Proposition**. *Sous les hypothèses de 5.5, plus celle que k parfait, si $T : \Pi(A_i)_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{C}$ est k-multilinéaire et exact en chaque variable, le foncteur exact à droite T_d de $(\otimes A_i)_{\mathrm{coh}}$ dans $\mathcal{C}$ qu'il définit est exact.*

Preuve. Soit M l'objet $T((A_{id}))$ de $\mathcal{C}$. Pour des $N_i \in \mathrm{Ob}(A_i)_{\mathrm{coh}}$, on définit comme suit les

$$\mathrm{Tor}_*^{(A_i)}((N_i), M).$$

On prend des résolutions projectives N_{i*} des N_i et l'homologie du multiple complexe

$$\otimes N_{i*} \underset{\otimes A_i}{\otimes} M = T((N_{i*})).$$

Parce que T est exact en chaque varaible, on a $\mathrm{Tor}_n = 0$ pour $n > 0$. Le foncteur T_d se dérive de même en $\mathrm{Tor}_*^{\otimes A_i}(N, M)$. On a

$$\mathrm{Tor}_*^{\otimes A_i}(\otimes N_i, M) = \mathrm{Tor}_*^{(A_i)}((N_i), M),$$

d'où la nullité

$$\text{(5.7.1)} \qquad \mathrm{Tor}_n^{\otimes A_i}(\otimes N_i, M) \quad \text{pour } n > 0.$$

Le foncteur Tor_* étant semi-exact, il suffit, pour en déduire la nullité de tous les
$\mathrm{Tor}_n^{\otimes A_i}(N, M)$ $(n > 0)$, et 5.7, de vérifier le lemme suivant.

5.9 **Lemme**. (i) *Si S_i est un A_i-module simple, le produit tensoriel des S_i est un $\otimes A_i$-module semi-simple.*
(ii) *Tout $\otimes A_i$-module simple figure dans un produit tensoriel comme en (i).*

Preuve. (ii) est clair. Prouvons (i). Remplaçant A_i par son quotient par l'annulateur de S_i, on se ramène à supposer S_i fidèle. L'algèbre A_i est alors une algèbre centrale simple sur une extension finie k_i de k. Puisque k est parfait, cette extension est séparable. Le produit tensoriel des A_i est semi-simple et 5.9 en résulte.

5.10. Un $A_1 \underset{k}{\otimes} A_2$-module à droite est encore un A_2-module à droite M muni d'une structure de A_1-module à droite: $A_1^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_{A_2}(M)$ k-linéaire. Pour k un corps et A_1 de dimension finie k, une telle interprétation du produit tensoriel avec $(A_1)_{\mathrm{coh}}$ vaut plus généralement. Soient k un corps, A une k-algèbre de dimension finie et $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne k-linéaire. Soit $(A - \mathcal{B})$ (resp. $(\mathcal{B} - A)$ la catégorie des objets B de $\mathcal{B}$ munis d'une structure de A-module à gauche $A \to \mathrm{End}(B)$, k-linéaire (resp. d'une structure k-linéaire de A-module à droite). Le produit tensoriel 2.9: $\mathrm{Vect}(k) \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ induit un produit tensoriel k-bilinéaire exact en chaque variable

$$\otimes : (A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{B} - A)\,. \tag{5.10.1}$$

5.11 **Proposition.** *Avec les notations 5.10, le foncteur (5.10.1) fait de la catégorie but le produit tensoriel sur k des catégories sources.*

Preuve. Le foncteur (5.10.1) induit pour toute catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$ un foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\text{à}\,d}((\mathcal{B} - A), \mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\text{à}\,d}((A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})\,. \tag{5.11.1}$$

Montrons qu'on en obtient un quasi-inverse en attachant à $T : (A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ le foncteur de $(\mathcal{B} - A)$ dans $\mathcal{C}$:

$$B \longrightarrow T(A_d, B) \underset{A \otimes A}{\otimes} A\,. \tag{5.11.2}$$

Noter que $T(A_d, B)$ a une structure de A-module à droite venant de celle de B et une de A-module à gauche venant de celle de A_d. Le produit tensoriel est le conoyau dans $\mathcal{C}$ de

$$T(A_d, B) \underset{k}{\otimes} (A \otimes A) \underset{k}{\otimes} A \rightrightarrows T(A_d, B) \underset{k}{\otimes} A\,.$$

Pour un objet ${}_AX_A$ muni d'une structure de A, A-bimodule, on a aussi plus simplement

$${}_AX_A \underset{A \otimes A}{\otimes} A = \mathrm{coker}({}_AX_A \otimes A \rightrightarrows {}_AX_A)\,. \tag{5.11.3}$$

Comme en 5.2, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\grave{a}\,d}((A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est équivalente, par $T \mapsto T(A, B)$, à $\underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\grave{a}\,d}(\mathcal{B}, (A - \mathcal{C}))$. L'équivalence inverse est

$$U \longmapsto (\text{le foncteur } (M, B) \longmapsto M \underset{A}{\otimes} U(B)\,.$$

Composant cette équivalence avec (5.11.1) et (5.11.2), on obtient les foncteurs

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\grave{a}\,d}(\mathcal{B} - A, \mathcal{C}) \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Hom}}_{e\,\grave{a}\,d}(\mathcal{B}, A - \mathcal{C})$$

suivants.
①: $T(B_A) \longmapsto T(A_d \underset{k}{\otimes} B)$;
②: ${}_AT(B) \longmapsto {}_AT(B_A) \underset{A\otimes A}{\otimes} A$.
Dans ①, $T(A_d \underset{k}{\otimes} B)$ est muni de la structure de A-module à gauche due à celle de A_d. Dans ②, ${}_AT(B_A)$ est muni d'une structure droite (due à B_A) et gauche (due à ${}_AT$) et le produit tensoriel est encore le conoyau ${}_AT(B_A) \otimes A \rightrightarrows {}_AT(B_A)$.

Le composé ②∘①est

$$T(B_A) \longmapsto T(A_d \otimes B_A) \underset{A\otimes A}{\otimes} A\,.$$

Par exactitude à droite de T, le second membre est encore $T((A \underset{k}{\otimes} B_A) \underset{A\otimes A}{\otimes} A)$ et
$(A_d \underset{k}{\otimes} B_A) \underset{A\otimes A}{\otimes} A = B_A \underset{A}{\otimes} A = B_A$, de sorte que ②∘①est isomorphe à l'identité.

Le composé ①∘②est

$${}_AT(B) \longmapsto {}_AT(A_d \underset{k}{\otimes} B) \underset{A\otimes A}{\otimes} A = (A_d \underset{k}{\otimes} {}_AT(B)) \underset{A\otimes A}{\otimes} A = A \underset{A}{\otimes} {}_AT(B) = {}_AT(B)\,.$$

Il est également isomorphe à l'identité et ceci prouve 5.11.

5.12. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire satisfaisant à la condition de finitude (2.12.1): objets de longueur finie et Hom de dimension finie.

Pour X dans $\mathcal{A}$, soit $\langle X \rangle$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ d'objets les sous-quotients des X^n $(n \geq 0)$. Elle est abélienne. D'après 2.14, 2.17, la catégorie $\langle X \rangle$ est équivalente à la catégorie des modules sur une k-algèbre de rang fini.

La catégorie $\mathcal{A}$ est réunion croissante de ses sous-catégorie pleines $\langle X\rangle$ et de 5.3, 5.4, 5.5, 5.7 on déduit par passage à la limite (5.1) les énoncés (i) et (iii) à (vi) ci-dessous.

5.13 **Proposition**. *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégories abéliennes k-linéaires vérifiant* (2.12.1).
(i) *Le produit tensoriel sur k des $\mathcal{A}_i$ existe.*
(ii) *Il vérifie encore (2.12.1).*
(iii) *Le produit tensoriel $\otimes : \Pi\mathcal{A}_i \to \mathcal{A}$ est exact en chaque variable.*
(iv) *Il fait de la duale de $\mathcal{A}$ le produit tensoriel des duales des $\mathcal{A}_i$.*
(v) *On a* $\otimes\mathrm{Hom}(X_i, Y_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\otimes X_i, \otimes Y_i)$.
(vi) *Si k est parfait – par exemple de caractéristique 0 – un foncteur multilinéaire exact en chaque variable: $\Pi\mathcal{A}_i \to C$ définit un foncteur exact de $\mathcal{A}$ dans C.*

L'assertion (ii) sera déduite de 5.14 ci-dessous.

Soient $(\mathcal{A}'_i)_{i\in I}$ et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ deux familles finies de catégories abéliennes k-linéaire vérifiant (2.12.1) et $T_i : \mathcal{A}'_i \to \mathcal{A}_i$ k-linéaire et exact à droite. Soient $\mathcal{A}' := \otimes\mathcal{A}'_i$, $\mathcal{A} := \otimes\mathcal{A}_i$ et $T := \otimes T_i$ le foncteur k-linéaire exact à droite de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ avec

$$T(\otimes X_i) = \otimes T_i(X_i)\,.$$

5.14 **Proposition**. *Avec les hypothèses et notations précédentes,*
(i) *si les T_i sont exacts (resp. exactes et fidèles, resp. une équivalence de $\mathcal{A}'_i$ avec une sous-catégorie pleine stable par sous-quotient de $\mathcal{A}_i$), le foncteur T a la même propriété.*
(ii) *Soient $\mathcal{A}'_i, \mathcal{A}''_i \subset \mathcal{A}_i$ des sous-catégories abéliennes pleines stables par sous-quotients. L'intersection essentielle, dans $\mathcal{A} := \otimes\mathcal{A}_i$, de $\otimes\mathcal{A}'_i$ et $\otimes\mathcal{A}''_i$ est le produit tensoriel des intersections essentielles $\mathcal{A}'_i \cap \mathcal{A}''_i$.*

Preuve. (i) Par passage à la limite, on se ramène encore à supposer $\mathcal{A}'_i = (A'_i)_{\mathrm{coh}}, \mathcal{A}_i = (A_i)_{\mathrm{coh}}$, avec les A'_i et A_i de dimension finie sur k. Le foncteur exact à droite T_i est de la forme $E \mapsto E \underset{A'_i}{\otimes} M_i$ (5.2), où M_i est un A'_i, A_i-bimodule de type fini sur A_i. Soient $A = \otimes A_i$, $A' = \otimes A'_i$ et $M = \otimes M_i$. On a $\mathcal{A}' = (A')_{\mathrm{coh}}$, $\mathcal{A} = (A)_{\mathrm{coh}}$ et T est $\underset{A'}{\otimes} M$. Pour que T_i soit exact (resp. exact et fidèle), il faut et suffit que M_i soit plat (resp. fidèlement plat). Parce que A_i est de dimension finie sur k, cette condition équivaut à M_i facteur direct d'un A'_i–module libre (resp. et tel que A'_i soit facteur direct d'une puissance M_i^k). Ces conditions sont stables par produit tensoriel sur k.

Si $\mathcal{A}'_i$ est une sous-catégorie pleine stable par sous-quotient, il existe un idéal bilatère a'_i de A_i tel que $\mathcal{A}'_i$ soit la catégorie des A_i–modules annulés par a'_i (2.18): on peut faire $A'_i = A_i/a'_i$ et $M_i = A_i/a'_i$. On a encore stabilité par produit tensoriel sur k.

(ii) Si $\mathcal{A}'_i \subset \mathcal{A}_i = (A_i)_{\mathrm{coh}}$ (resp. $\mathcal{A}''_i \subset \mathcal{A}_i$) est la sous-catégorie des A_i–modules annulés par a'_i (resp. a''_i), leur intersection essentielle (d'objets les objets de $\mathcal{A}_i$ isomorphes à un objet de $\mathcal{A}'_i$ et à un objet de $\mathcal{A}''_i$) est la sous-catégorie des A_i–modules annulés par $a'_i + a''_i$. On conclut en observant qu'un A–module annulé par les a'_i et les a''_i est annulé par les $a'_i + a''_i$.

5.15 **Preuve de** 5.13(ii). Ecrivons $\mathcal{A}_i$ comme limite inductive des sous-catégories $\langle X_i \rangle$. D'après 5.14(i), $\otimes\langle X_i\rangle \hookrightarrow \mathcal{A}$ et est une sous-catégorie pleine stable par sous-quotients. De (2.12.1) pour les $\otimes\langle X_i\rangle$ résulte donc (2.12.1) pour leur limite inductive $\mathcal{A}$.

5.16. Soient $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégorie tensorielles sur k vérifiant (2.12.1) et $\mathcal{T}$ leur produit tensoriel sur k (5.13(i)). Le produit tensoriel $\otimes : \mathcal{T}_i \times \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i$ se factorise par un foncteur exact à droite $T_i : \mathcal{T}_i \otimes \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i$. Le produit tensoriel des T_i est un foncteur exact à droite

$$T : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} = (\otimes \mathcal{T}_i) \otimes (\otimes \mathcal{T}_i) = \otimes(\mathcal{T}_i \otimes \mathcal{T}_i) \longrightarrow \otimes \mathcal{T}_i = \mathcal{T}. \tag{5.16.1}$$

Le composant avec $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, on définit le *produit tensoriel* de $\mathcal{T}$. C'est un foncteur exact à droite en chaque variable, muni d'un isomorphisme fonctoriel

$$(\otimes X_i) \otimes (\otimes Y_i) \xrightarrow{\sim} \otimes(X_i \otimes Y_i). \tag{5.16.2}$$

Cet isomorphisme le caractérise: si $\otimes'$ est un foncteur exact à droite $\mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, muni d'un isomorphisme (5.16.2) de foncteurs $\Pi\mathcal{T}_i \times \Pi\mathcal{T}_i \to \mathcal{T}$, il existe un unique isomorphisme $\otimes \to \otimes'$ compatible aux isomorphismes (5.16.2) pour $\otimes$ et $\otimes'$. On munit $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ des contraintes d'associativité et de commutativité qui rendent commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
(\otimes X_i) \otimes (\otimes Y_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal, "5.16.2"'] & (\otimes Y_i) \otimes (\otimes X_i) \arrow[d, equal, "5\ 16\ 2"'] \\
\otimes(X_i \otimes Y_i) \arrow[r, equal] & \otimes(Y_i \otimes X_i)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
((\otimes X_i)\otimes(\otimes Y_i))\otimes(\otimes Z_i) & \xrightarrow{\sim} & (\otimes X_i)\otimes((\otimes Y_i)\otimes(\otimes Z_i)) \\
{\scriptstyle 5.16.2\ \text{itéré}}\Big\| & & {\scriptstyle 5.16.2\ \text{itéré}}\Big\| \\
\otimes((X_i\otimes Y_i)\otimes Z_i) & = & \otimes(X_i\otimes(Y_i\otimes Z_i))
\end{array}$$

5.17 **Proposition**. *Sous les hypothèses de 5.16, plus celle que k est parfait, le produit tensoriel $\mathcal{T}$ des $\mathcal{T}_i$ est une catégorie tensorielle sur k.*

Preuve. La vérification de (2.1.1) est laissée au lecteur; (2.1.3) est inclus dans la définition d'une catégorie produit tensoriel. L'unité de $\mathcal{T}$ est le produit tensoriel des unités des $\mathcal{T}_i$ et (2.1.4) résulte de 5.13(v). Prouvons (2.1.2).

D'après 5.13(vi) les foncteurs $T_i : \mathcal{T}_i \otimes \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i$ sont exacts. Par 5.14(i) leur produit tensoriel $T : \mathcal{T}\otimes\mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est exact. Par 5.13(iii), le produit tensoriel de $\mathcal{T}$ est exact en chaque variable.

D'après 5.13(iv), la construction de la catégorie abélienne $\mathcal{T}$ est autoduale. Son produit tensoriel $\otimes$ étant exact, sa caractérisation (5.16.2) est également autoduale. Celle de ses contraintes d'associativité et de commutativité aussi.

D'aprés 5.13(iii)(iv), la construction du produit tensoriel $\mathcal{T}$ des $\mathcal{T}_i$ est autoduale. Les antiéquivalences $X \mapsto X^\vee$ des $\mathcal{T}_i$ induisent donc une antiéquivalence de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$, encore notée $X \mapsto X^\vee$, munie d'un isomorphisme fonctoriel

$$\otimes X_i^\vee \xrightarrow{\sim} (\otimes X_i)^\vee \tag{5.17.1}$$

qui le caractérise (de la même façon que (5.16.2) caractérise $\otimes : \mathcal{T}\times\mathcal{T} \to \mathcal{T}$). Si $X = \otimes X_i$, les morphismes ev et δ pour les X_i ont des produits tensoriels ev : $X\otimes X^\vee \to 1$, $\delta : 1 \to X^\vee \otimes X$ qui font de $X^\vee$ un dual de X (2.2).

Définissons un isomorphisme entre les foncteurs multilinéaires

$$\mathrm{Hom}(X\otimes Y, Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(Y, X^\vee \otimes Z),$$

de $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{T}$ dans Vect(k). Ces foncteurs, exacts à gauche en chaque variable, se factorisent uniquement par des foncteurs exacts à gauche de $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{T}$ dans Vect(k) (5.13)(iv). Par 5.13(iv) encore, et la définition du produit tensoriel, il revient au même de se donner un isomorphisme entre les foncteurs multilinéaires de $\Pi\, \mathcal{T}_i^{\mathrm{opp}} \times \Pi\, \mathcal{T}_i^{\mathrm{opp}} \times \Pi\, \mathcal{T}_i$ dans $\mathrm{Vect}(k)$:

$$\mathrm{Hom}(\otimes X_i \otimes \otimes Y_i, \otimes Z_i) \text{ et } \mathrm{Hom}(\otimes Y_i, (\otimes X_i)^\vee \otimes \otimes Z_i)\,.$$

Par (5.16.2), (5.17.1) et (5.13(v)), ces foncteurs s'identifient respectivement au produit tensoriel des foncteurs

$$\mathrm{Hom}(X_i \otimes Y_i, Z_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(Y_i, X_i^\vee \otimes Z_i)\,.$$

isomorphes par l'adjonction entre s_{X_i} et $s_{X_i^\vee}$ (2.2).

Le foncteur s_X admet donc un adjoint à droite $\underline{\mathrm{Hom}}(X,\ \ )$, à savoir $s_{X^\vee}$ (muni de morphismes d'adjonction convenables). Par 2.3, pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme (2.2.1):

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X, 1) \otimes Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) \tag{5.17.2}$$

est un isomorphisme. Ces foncteurs: $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ sont exacts à gauche en chaque variable. Par 5.13(iv), ils définissent des foncteurs exacts à gauche $\mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ et pour vérifier que (5.17.2) est un isomorphisme, il suffit de vérifier que le morphisme entre foncteurs $\Pi\, \mathcal{T}_i^{\mathrm{opp}} \times \Pi\, \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}$ qui s'en déduit est un isomorphisme. En particulier, il suffit de vérifier que (5.17.2) est un isomorphisme pour X de la forme $\otimes X_i$. On a vu qu'un tel X admet un dual et on conclut par 2.3.

5.18. Pour prouver 1.12 sans hypothèse sur k, il nous faudra savoir que la conclusion de 5.17 est encore vraie, sans hypothèse sur k, si les $\mathcal{T}_i$ sont tannakiennes (2.8) sur k. Nous le prouverons en 6.9, 6.16–6.20, en nous aidant de 5.21, qui le prouve dans un cas particulier.

Soient $(S_i)_{i\in I}$ une famille finie de k-schémas non vides sur lesquels agissent des
groupoïdes affines transitifs G_i. Soient S le produit de S_i et G celui des G_i ; G est un groupoïde transitif agissant sur S. Le produit tensoriel externe $\otimes\, \mathrm{pr}_i^* V_i$ est un foncteur

$$\otimes : \Pi\, \mathrm{Rep}(S_i : G_i) \longrightarrow \mathrm{Rep}(S, G)\,. \tag{5.18.1}$$

Nous prouverons en 6.21 que ce foncteur fait de $\mathrm{Rep}(S : G)$ le produit tensoriel des $\mathrm{Rep}(S_i : G_i)$. Dans le language des gerbes: si les $\mathcal{G}_i$ sont une famille finies de gerbes à lien affine sur k, le produit tensoriel

$$\Pi : \mathrm{Rep}(\mathcal{G})_i \longrightarrow \mathrm{Rep}(\Pi\, \mathcal{G}_i)$$

fait de $\mathrm{Rep}(\Pi \mathcal{G}_i)$ le produit tensoriel des $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_i)$. On a en effet $\mathcal{G}_{S:G} \xrightarrow{\sim} \Pi \mathcal{G}_{S_i:G_i}$ et le produit tensoriel (5.18.1) s'identifie au produit tensoriel de représentations de gerbes.

5.19. Soient B une k-algèbre et $L := {}_B L_B$ un k-cogèbroïde agissant sur B. On suppose que, en tant que B-module à gauche, L est projectif de type fini. Soit L' son B-dual comme B-module à gauche. C'est encore un B,B-bimodule avec $\langle \ell, b\lambda \rangle = \langle \ell b, \lambda \rangle$ et $\langle \ell, \lambda b \rangle = \langle \ell, \lambda \rangle b$. Pour V un k-espace vectoriel et W un B-module à droite,

$$\mathrm{Hom}_k(V, W \underset{B}{\otimes} L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(V \underset{k}{\otimes} L', W)$$

par $f \mapsto (v \otimes \lambda \to \langle \lambda, f(v) \rangle)$. Pour V un B-module à droite, cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(V, W \underset{B}{\otimes} L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(V \underset{B}{\otimes} L', W).$$

La comultiplication $c : L \to L \underset{B}{\otimes} L$, vue comme morphisme de foncteurs en $V : V \underset{B}{\otimes} L \to V \underset{B}{\otimes} L \underset{B}{\otimes} L$ donne par adjonction un morphisme de foncteurs en $V : V \underset{B}{\otimes} L' \underset{B}{\otimes} L' \to V \underset{B}{\otimes} L'$, défini par une multiplication $L' \underset{B}{\otimes} L' \to L'$, faisant de L' une k-algèbre munie de $B \to L'$, et une coaction de L sur un B-module V s'identifie à une structure de L'-module sur V qui prolonge sa structure de B-module.

Soient $(B_i)_{i \in I}$ une famille finie de k-algèbres, L_i un k-cogèbroïde agissant sur B_i, B le produit tensoriel sur k des B_i et L celui des L_i ; L est un cogèbroïde agissant sur B. Le produit tensoriel sur k est un foncteur (généralisant (5.18.1))

$$\begin{aligned} &\otimes : \Pi(B_i - \text{modules de présentation finie à coaction de } L_i) \\ &\to (B - \text{modules de présentation finie à coaction de } L). \end{aligned} \tag{5.19.1}$$

Lemme 5.20. *Si B et les B_i sont cohérents, et que chaque L_i est projectif de type fini en tant que B_i-module à gauche, alors le foncteur (5.10.1) fait de la catégorie but le produit tensoriel des catégories sources.*

Preuve. La cohérence de B_i implique celle de L'_i (notation de 5.10). On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'équivalence 5.10

$$(B_i - \text{module cohérent à coaction}) \xrightarrow{\sim} (L'_i - \text{module cohérent})$$

est compatible au produit tensoriel sur k. Il ne reste alors qu'à appliquer 5.3.

Lemme 5.21. *Avec les hypothèses et notations de 5.18, si S_i est le spectre d'une extension finie de k, le foncteur (5.18.1) fait de la catégorie but le produit tensoriel des catégories sources.*

Preuve. Soit L_i l'algèbre affine de G_i. Le cogèbroïde L_i est réunion croissante de sous-cogèbroïdes L_i^α de type fini en tant que $k_i \otimes k_i$–modules (3.8), donc de dimension finie sur k_i. Par passage à la limite (5.1), 5.21 résulte de 5.20 pour les k_i et les L_i^α.

6. Le théorème principal

6.1. Soient k un corps commutatif et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire vérifiant (2.12.1): objets de longueur finie et Hom de dimension finie sur k. Pour X dans $\mathcal{A}$, on notera $\langle X\rangle$ la sous-catégorie abélienne pleine de $\mathcal{A}$ d'objets les sous-quotients des X^n.

Soient B une k-algèbre et ω un foncteur k-linéaire exact et fidèle de $\mathcal{A}$ dans la catégorie $(B\text{-mod})_{ptf}$ des B-modules à droite projectifs de type fini.

Pour X dans $\mathcal{A}$, la catégorie $\langle X\rangle$ admet un générateur projectif P (2.14). Le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}(P,Y)$ est une équivalence de $\langle X\rangle$ avec la catégorie $(A)_{\mathrm{coh}}$ des modules à droite de type fini sur $A := \mathrm{End}(P)$. Par cette équivalence, P corresponds à A_d. Posons ${}_AM_B := \omega(P)$. Par 5.2, le foncteur exact à droite $\omega\,|\,\langle X\rangle$ s'identifie au foncteur $E \longmapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ de $(A)_{\mathrm{coh}}$ dans les B-modules. Noter que, ω étant k-linéaire, les deux structures de k-module de ${}_AM_B$ coïncident.

D'après 4.8(ii), $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$ est le k-cogèbroïde ${}_BM_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ de 4.3. Par hypothèse, $\omega\,|\,\langle X\rangle$ est exact et fidèle. Le A-module ${}_AM_B$ est donc fidèlement plat sur A. D'après 4.4 et 4.5, ω induit une équivalence de $\langle X\rangle$ avec la catégorie des B-modules à droite de type fini munis d'une coaction de $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$.

La catégorie $\mathrm{Ind}\langle X\rangle$ des Ind-objets (cf. 7.5) de $\langle X\rangle$ s'identifie à celle de tous les A-modules à droite. L'extension de $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$ aux Ind-objets: $\omega(\text{“}\varinjlim\text{”}X_i) = \lim\mathrm{ind}\,\omega(X_i)$, est encore $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$. Par 4.4, cette extension est une équivalence de $\mathrm{Ind}\langle X\rangle$ avec la catégorie des B-modules à droite munis d'une coaction de $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$. Ceci, et les propriétés supposées de ω, montre que tout B-module à droite de type fini, muni d'une coaction de $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$, est projectif de type fini, et que tout B-module à droite à coaction est limite inductive de B-modules à droite projectifs de type fini à coaction, en particulier est plat.

L'exactitude de ω assure que ${}_AM_B$ est A-plat. De plus, pour tout A-module à droite N, le B-module à droite $N \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$ est plat. La formule

$$L(\omega\,|\,\langle X\rangle) = {}_BM_A \underset{A}{\otimes} {}_AM_B$$

montre alors que $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$ est plat pour ses deux structures de B-modules.

Si Y est dans $\langle X\rangle$, i.e. $\langle Y\rangle \subset \langle X\rangle$, et que a est l'idéal bilatère de A tel que $\langle Y\rangle$ corresponde aux A-modules annulés par a (2.18), on a

$$\begin{aligned} L(\omega\,|\,\langle Y\rangle) &= (A/a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)^\vee \underset{A/a}{\otimes} (A/a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B) \\ &= (A/a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B\,, \end{aligned}$$

et $(A/a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)^\vee$ est le noyau de l'épimorphisme ${}_BM_A^\vee \to (a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)^\vee$, d'où une suite exacte

$$0 \to L(\omega\,|\,\langle Y\rangle) \longrightarrow L(\omega\,|\,\langle X\rangle) \longrightarrow (a \underset{A}{\otimes} {}_AM_B)^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM_B \longrightarrow 0\,.$$

Le morphisme 4.10(ii) de $L(\omega\,|\,\langle Y\rangle)$ dans $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$ est donc injectif, de conoyau plat à droite et à gauche sur B.

Un B-module de type fini, à coaction de $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$, correspond à un objet de $\langle Y\rangle$ si la coaction

$$N \longrightarrow N \otimes L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$$

se factorise par $N \otimes L(\omega\,|\,\langle Y\rangle)$.

La catégorie $\mathcal{A}$ est réunion filtrante des sous-catégories $\langle X\rangle$ et $L(\omega)$ est limite inductive des $L(\omega\,|\,\langle X\rangle)$ (4.10 (iii)). Passant à la limite, on obtient:

6.2 **Proposition**. *Avec les hypothèses et notations de 6.1, le foncteur ω induit une équivalence de $\mathcal{A}$ avec la catégorie des modules à droite type fini sur B munis d'une coaction de $L(\omega)$.*

6.3. Soit B un anneau commutatif. Nous allons utiliser la construction $L(\omega_1, \omega_2)$ de 4.7 pour $B_1 = B_2 = k = B$. Plus tard, nous aurons à considérer un corps commutatif k, deux k-algèbres commutatives B_1, B_2 et nous aurons à prendre pour B l'anneau commutatif $B_1 \underset{k}{\otimes} B_2$.

Soient $\mathcal{A}_i$ $(i = 1,2,3)$ trois catégories et, pour $i = 1,2,3$, ω_1^i et ω_2^i deux foncteurs de $\mathcal{A}_i$ dans $(B\text{-mod})_{pft}$ (6.1). Supposons donné un foncteur $\otimes : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ et, pour $j = 1,2$, un isomorphisme de foncteurs

$$\omega_j^1(X_1) \underset{B}{\otimes} \omega_j^2(X_2) \xrightarrow{\sim} \omega_j^3(X_1 \otimes X_2)\,.$$

Nous avons défini en 4.7 des B-modules $L_B(\omega_1^i, \omega_2^i)$ et 4.10(ii)(iv) fournit un produit B-bilinéaire

$$L_B(\omega_1^1, \omega_2^1) \underset{B}{\otimes} L_B(\omega_1^2, \omega_2^2) \longrightarrow L_B(\omega_1^3, \omega_2^3)\,. \tag{6.3.1}$$

Quels que soient X_1 et X_2 dans $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, le morphisme (4.7.3)

$$\omega_2^3(X_1 \otimes X_2) \longrightarrow \omega_1^3(X_1 \otimes X_2) \underset{B}{\otimes} L_B(\omega_1^3, \omega_2^3)$$

se déduit des morphismes analogues pour les $\omega_1^j(X_j)$ et $\omega_2^j(X_j)$ par (6.3.1).

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie à produit tensoriel vérifiant (2.1.1) et ω_1 et ω_2 deux $\otimes$-foncteurs de $\mathcal{A}$ dans les B-modules projectifs de type fini. Faisons $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ et $\omega_j^i = \omega_j$ $(i = 1,2,3)$. Le produit (6.3.1) devient un produit

$$L_B(\omega_1, \omega_2) \underset{B}{\otimes} L_B(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow L_B(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{6.3.2}$$

6.4 **Proposition.** *Le produit (6.3.2) est associatif, commutatif et à unité, i.e. fait de $L_B(\omega_1, \omega_2)$ une B-algèbre commutative.*

Preuve. On dispose de diagrammes essentiellement commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r, "(X,Y)\mapsto(Y,X)"] \arrow[d, "\omega_j \otimes \omega_j"] \arrow[dr, phantom, "①"] & \mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\omega_j \otimes \omega_j"] \arrow[dr, phantom, "②"] & \mathcal{A} \arrow[d, "\omega_j"] \\
(B\text{-mod}) \arrow[r, equal] & (B\text{-mod}) \arrow[r, equal] & (B\text{-mod})
\end{tikzcd}$$

$(j = 1,2)$. Dans ①, le carré est rendu commutatif par l'isomorphisme de foncteurs $\omega_j(X) \underset{B}{\otimes} \omega_j(Y) \xrightarrow{\sim} \omega_j(Y) \underset{B}{\otimes} \omega_j(X)$. Dans ②, par l'isomorphisme

$\omega_j(X \otimes Y) \xrightarrow{\sim} \omega_j(X) \underset{B}{\otimes} \omega_j(Y)$. Par définition d'un $\otimes$-foncteur, l'isomorphisme de foncteurs composés rendant commutatif le bord du diagramme est le même qu'en ①, une fois identifié $\omega(Y \otimes X)$ à $\omega(X \otimes Y)$ par la commutativité de $\otimes$ dans $\mathcal{A}$. Appliquant $L(\ ,\ )$ à ce diagramme, on obtient la commutativité de (6.3.2). L'associativité s'obtient de même. Si $\{1\}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ réduite à l'objet unité et à sa flèche identique, on a par définition des $\otimes$-foncteur $\omega_j(1) \xrightarrow{\sim} B$ et $L_B(\omega_1 \mid \{1\}, \omega_2 \mid \{1\}) = B$. L'unité $B \to L_B(\omega_1, \omega_2)$ de $L_B(\omega_1, \omega_2)$ est définie par 4.10(ii).

6.5. Pour $\mathcal{A}$ une catégorie à produit tensoriel vérifiant (2.1.1) et ω_1, ω_2 deux $\otimes$-foncteurs de $\mathcal{A}$ dans les modules sur un schéma S, nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$) le foncteur sur (Sch/$S$) qui à $u : T \to S$ attache l'ensemble des morphismes (resp. isomorphismes) de $\otimes$-foncteurs $u^*\omega_1 \to u^*\omega_2$ (2.7). Si ω_1 et ω_2 sont à valeurs dans les modules localement libres de rang fini, ces foncteurs sont représentables par un schéma affine sur S. D'après 2.7, si $\mathcal{A}$ vérifie (2.1.1) et (2.1.2), cette condition est vérifiée et $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$.

Comme en 1.11, pour ω_i à valeurs dans les modules sur S_i, on pose $\underline{\mathrm{Hom}}_k^{\otimes}(\omega_2, \omega_1) := \underline{\mathrm{Hom}}_{S_1 \times S_2}^{\otimes}(\mathrm{pr}_2^*\omega_2, \mathrm{pr}_1^*\omega_1)$. De même pour $\underline{\mathrm{Isom}}$. Pour $\omega_1 = \omega_2$, on écrit $\underline{\mathrm{End}}(\omega)$ pour $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega, \omega)$ et $\underline{\mathrm{Aut}}(\omega)$ pour $\underline{\mathrm{Isom}}(\omega, \omega)$.

6.6 **Proposition.** *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie à produit tensoriel vérifiant (2.1.1) et ω_1, ω_2 deux $\otimes$-foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $(B\text{-mod})_{ptf}$. Posons $S :=$ Spec(B). Le schéma* Spec $L_B(\omega_1, \omega_2)$ *sur S représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_S^{\otimes}(\omega_2, \omega_1)$.

Preuve. Soient $T = \mathrm{Spec}(C)$ un schéma affine sur S : $u : T \to S$. Par définition (4.7) un morphisme f de B-modules de $L_B(\omega_1, \omega_2)$ dans C s'identifie à un système fonctoriel de morphismes de B-modules

$$f_X : \omega_2(X) \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B}{\otimes} C.$$

La donnée des f_X équivaut à celle de morphismes C-linéaires

$$f'_X : \omega_2(X) \underset{B}{\otimes} C \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B}{\otimes} C,$$

fonctoriels en X, i.e. à un morphisme f' de foncteurs de $u^*\omega_2$ dans $u^*\omega_1$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour que f soit un morphisme d'algèbres, il faut et il suffit que f' soit un morphisme de $\otimes$-foncteurs.

6.7. Soient k un anneau commutatif et B_1 et B_2 deux k-algèbres commutatives. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie à produit tensoriel vérifiant (2.1.1) et

ω_j $(j = 1,2)$ un $\otimes$-foncteur de $\mathcal{A}$ dans $(B_j\text{-mod})_{ptf}$. Par extension des scalaires, ω_1 (resp. ω_2) definit un $\otimes$-foncteur de $\mathcal{A}$ dans $(B_1 \underset{k}{\otimes} B_2\text{-mod})_{ptf}$; on le note $\omega_1 \otimes 1$ (resp. $1 \otimes \omega_2$). On a

$$L_k(\omega_1, \omega_2) = L_{B_1 \underset{k}{\otimes} B_2}(\omega_1 \otimes 1\,, 1 \otimes \omega_2)\,.$$

D'après 6.6, $\mathrm{Spec} L_k(\omega_1, \omega_2)$ représente le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_k^{\otimes}(\omega_2, \omega_1)$. D'après 6.5, ce dernier coïncide avec $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ si $\mathcal{A}$ vérifie (2.1.2).

Pour trois B_j et ω_j, la composition des morphismes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k^{\otimes}(\omega_3, \omega_2) \underset{S_2}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_k^{\otimes}(\omega_2, \omega_1) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_k^{\otimes}(\omega_3, \omega_1)$$

correspond à un morphisme de k-algèbres

$$c : L_k(\omega_1, \omega_3) \longrightarrow L_k(\omega_1, \omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3)\,.$$

Par définition, le morphisme de $L_k(\omega_1, \omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3)$-modules déduit par extension des scalaires (par c) de

$$\omega_3(X) \underset{B_3}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_3) \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_3)$$

est le composé des morphismes déduits par extension des scalaires de

$$\omega_3(X) \underset{B_3}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3) \longrightarrow \omega_2(X) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3) \quad \text{et}$$
$$\omega_2(X) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_2)\,.$$

Ceci revient à la commutativité

$$\begin{tikzcd}
\omega_3(X) \arrow[r] \arrow[d] & \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_2) \arrow[d] \\
\omega_2(X) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3) \arrow[r] & \omega_1(X) \underset{B_1}{\otimes} L_k(\omega_1, \omega_2) \underset{B_2}{\otimes} L_k(\omega_2, \omega_3)
\end{tikzcd}$$

et c est donc (4.7.4).

6.8 **Preuve de 1.12(ii) pour S affine.** Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k, B une k-algèbre, $S = \mathrm{Spec}(B)$ et ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur S.

On fait $\mathcal{A} = \mathcal{T}$, $B_1 = B_2 = B$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, (2.13)(i) permet d'appliquer 6.2. D'après 6.7, $\mathrm{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ est le spectre de $L(\omega) = L_k(\omega,\omega)$. L'action de $\mathrm{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ sur les $\omega(X)$ est définie par les morphismes

$$\omega(X) \to \omega(X) \underset{B}{\otimes} L(\omega,\omega)$$

qui définissent L (4.7.3). Par 6.7 encore, la loi de composition du groupoïde $\mathrm{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ est définie par la comultiplication de $L(\omega)$ et 6.2 équivaut à 1.12(ii).

Passons à la preuve de 1.12(i) pour S affine. Un point crucial sera le cas particulier du lemme suivant obtenu en faisant $I = \{1,2\}$ et $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$.

6.9 **Lemme**. *Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégories tannakiennes sur k. Le produit tensoriel sur k $\otimes\mathcal{T}_i$ des $\mathcal{T}_i$, muni du produit tensoriel (5.16), est une catégorie tensorielle sur k.*

Pour k parfait, le résultat a déjà été prouvé (5.17). Le cas général sera traité en 6.16 – 6.20.

Si ω_i est un foncteur fibre de $\mathcal{T}_i$ sur $B_i \neq 0$, le foncteur exact de $\Pi\mathcal{T}_i$ dans les $\otimes B_i$-modules: $(X_i) \mapsto \underset{k}{\otimes}\, \omega_i(X_i)$ se factorise par un foncteur k-linéaire exact à droite de $\otimes\mathcal{T}_i$ dans les $\otimes B_i$-module. Etant exact à droite, c'est un foncteur fibre (2.10.1). Il résulte donc de 6.9 qu'un produit tensoriel de catégorie tannakiennes est encore une catégories tannakienne.

6.10. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne sur k. La catégorie abélienne $\mathcal{T}$ étant noethérienne (2.13(i)), tout Ind-objet de $\mathcal{T}$ est réunion croissante de ses sous-objets dans $\mathcal{T}$. Si ω est un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur un k-schéma S, on étend ω en un $\otimes$-foncteur encore noté ω de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$ dans les modules quasi-cohérents sur S par $\omega(\text{“}\varinjlim\text{”} X_\alpha) \mapsto \varinjlim \omega(X_\alpha)$. Pour X dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}, \omega(X)$ est plat sur S en tant que limite inductive de modules localement libres.

6.11 **Lemme**. *Avec les hypothèses et notations de 6.10, si le* Ind-*objet X est non nul, $\omega(X)$ est fidèlement plat sur S.*

Preuve. Si $X \neq 0$, il existe $Y \hookrightarrow X$ avec Y dans $\mathcal{T}$ et non nul. D'après 2.10.1, $\omega(Y)$ est localement libre partout de rang non nul, donc fidèlement plat sur S. On a $\omega(Y) \hookrightarrow \omega(X)$ avec un quotient $\omega(X/Y)$ plat. La fidèle platitude de $\omega(X)$ en résulte.

6.12. Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k et T_1, T_2 deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$. A l'imitation de 4.7, on se propose de définir un Ind-objet $\Lambda_{\mathcal{T}}(T_1, T_2)$ de $\mathcal{T}$, muni, pour tout X dans $\mathcal{C}$, de

$$T_1(X)^{\vee} \otimes T_2(X) \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{T}}(T_1, T_2) \tag{6.12.1}$$

tel que pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_1(X)^{\vee} \otimes T_2(Y) & \longrightarrow & T_1(X)^{\vee} \otimes T_2(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1(Y)^{\vee} \otimes T_2(Y) & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{T}}(T_1, T_2) \end{array} \tag{6.12.2}$$

soit commutatif, et universel pour ces propriétés. Pour $\mathcal{C}$ finie, Λ est simplement un quotient convenable de la somme des $T_1(X)^{\vee} \otimes T_2(X)$ (X dans $\mathcal{C}$), et est dans $\mathcal{T}$. Dans le cas général, on écrit $\mathcal{C}$ comme limite inductive filtrante de ses sous-catégories finies $\mathcal{C}_\alpha$, et on pose

$$\Lambda_{\mathcal{T}}(T_1, T_2) := \text{``}\varinjlim\text{''}\Lambda_{\mathcal{T}}(T_1 \,|\, C_\alpha, T_2 \,|\, C_\alpha)\,.$$

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux catégories tensorielles sur k telles que le produit tensoriel sur k $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ existe et soit une catégorie tensorielle sur k. Soit inj_j l'injection de $\mathcal{T}_j$ dans $\mathcal{T}$: $\mathrm{inj}_1 : X \mapsto X \otimes 1$, $\mathrm{inj}_2 : X \mapsto 1 \otimes X$. Pour T_j un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}_j$, on pose

$$\Lambda_k(T_1, T_2) := \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{inj}_1 T_1, \mathrm{inj}_2 T_2)\,.$$

Soient B_1 et B_2 des k-algèbres commutatives et ω_j un foncteur fibre de $\mathcal{T}_j$ sur B_j. Le foncteur $(X, Y) \mapsto \omega_1(X) \underset{k}{\otimes} \omega_2(Y)$ est un foncteur exact en chaque variable de $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ dans les $B_1 \underset{k}{\otimes} B_2$-modules. Par définition du produit tensoriel $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, il se factorise uniquement par un foncteur exact à droite

$$\omega : \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \longrightarrow (B_1 \underset{k}{\otimes} B_2 - \text{modules})\,.$$

Ce foncteur est un $\otimes$-foncteur. Etant exact à droite, il est un foncteur fibre (2.10.1). On a

$$\omega\Lambda_k(T_1, T_2) = L_k(\omega_1 T_1, \omega_2 T_2)\,. \tag{6.12.3}$$

Faisons $\mathcal{C} = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ et prenons pour T_i le foncteur identique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$. Obtient un ind-objet $\Lambda := \Lambda_k(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}})$ de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. D'après

6.12.3, quels que soient les foncteurs fibres ω_1 et ω_2 de $\mathcal{T}$ sur B_1 et B_2 , on a

$$\omega\Lambda = L_k(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{6.12.4}$$

6.13 **Lemme.** $\Lambda := \Lambda_k(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}})$ *est non nul.*

Preuve. Soit T le foncteur exact à droite de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$ tel que $T(X \underset{k}{\otimes} Y) = X \otimes Y$. On a

$$T\Lambda = \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}})\,.$$

Les morphismes d'évaluation

$$X^\vee \otimes X \longrightarrow 1$$

rendent commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X^\vee \otimes Y \arrow[r] \arrow[d] & X^\vee \otimes X \arrow[d] \\ Y^\vee \otimes Y \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

pour $f : Y \to X$ et définissent $e : \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}) \to 1$. Pour $X = 1$, (6.12.1) est un morphisme de $1 = 1^\vee \otimes 1$ dans $\Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}})$. Le composé

$$1 = 1^\vee \otimes 1 \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}) \longrightarrow 1$$

est l'identité. On a donc $\Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}) \neq 0$. A fortiori, $\Lambda \neq 0$.

6.14 **Preuve de 1.12(i) pour** S **affine.** Posons $S = \mathrm{Spec}(B)$. Avec les notations de 6.7, il s'agit de montrer que si η un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur S, $L_k(\eta, \eta)$ est fidèlement plat sur $B \underset{k}{\otimes} B$. Par 6.12.4 pour $\omega_1 = \omega_2 := \eta$, c'est une conséquence de 6.11 et 6.13.

La même preuve donne, directement plutôt que via la réduction 1.13, que pour ω_1 et ω_2 des foncteurs fibres sur S_1 et S_2, $\underline{\mathrm{Isom}}_k(\omega_1, \omega_2)$ est fidèlement plat sur $S_1 \times S_2$.

6.15 **Preuve de 1.12(iii) pour** S **affine.** Soit G un groupoïde agissant transitivement sur $S \neq \emptyset$ et affine sur $S \times S$. Soit ω le foncteur fibre "oubli de l'action de G" de $\mathrm{Rep}(S : G)$ sur S. Il s'agit de prouver que $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_k(\omega)$. Les deux membres étant des groupoïdes transitifs, il suffit de le prouver après passage à une fibre. Pour $S_1 \to S$, $S_1 \neq \emptyset$, G_1 le groupoïde induit et ω_1 le foncteur fibre oubli de $\mathrm{Rep}(S_1 : G_1)$ sur S_1, on a $\mathrm{Rep}(S : G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(S_1 : G_1)$ (3.5.1) et le groupoïde induit par $\mathrm{Aut}_k(\omega)$ sur S_1 est donc $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_1)$. Prenant pour S_1 un point de S, ceci ramène à supposer que S_1 est le spectre d'un corps. Il ne reste qu'à appliquer 4.13.

Compte tenu de 1.13(b), ceci termine la preuve de 1.12.

6.16 **Preuve de 6.9**. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k. Pour X dans $\mathcal{T}$, la catégorie tensorielle $\langle X \rangle_\otimes$ *engendrée* par X est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ d'objets les sous-quotients des sommes de $X^{\otimes n} \otimes X^{\vee \otimes m}$. On dit que $\mathcal{T}$ est de *$\otimes$-génération finie* s'il existe X dans $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{T} = \langle X \rangle_\otimes$. Il est clair que $\mathcal{T}$ est réunion filtrante de ses sous-catégories $\langle X \rangle_\otimes$ et, par passage à la limite inductive (5.1), il suffit de prouver 6.9 lorsque les $\mathcal{T}_i$ sont de $\otimes$-génération finie. L'assertion résulte de 5.21 et du lemme suivant

6.17 **Lemme**. *Si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne sur k de $\otimes$-génération finie, il existe un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ sur S spectre d'une extension finie de k tel que $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$ soit fidèlement plat sur $S \times S$ (d'où, par 1.12(ii) prouvé en 6.8, $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(S : \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega))$)*

Soient $\mathcal{T}$ comme en 6.17 et ω un foncteur fibre sur $S = \mathrm{Spec}(B) \neq \emptyset$.

6.18 Lemme. *Le groupoïde $G := \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$ agissant sur S est une limite projective de groupoïdes G_n ($n > 0$) affines et de présentation finie sur $S \times S$, avec G_m sous-schéma fermé de G_n pour $m \geq n$.*

Preuve. Pour V un faisceau localement libre de rang fini sur S, soit $\underline{\mathrm{End}}_k(V)$ (resp. $\underline{\mathrm{Aut}}_k(V)$) le foncteur qui à T sur $S \times S : (p_1, p_2) : T \to S \times S$ attache l'ensemble des morphismes (resp. isomorphismes) $p_2^* V \to p_1^* V$. Le foncteur est représentable par un schéma affine sur $S \times S$ encore noté $\underline{\mathrm{End}}_k(V)$ (resp. $\underline{\mathrm{Aut}}_k(V)$). Si V est libre, le choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$ de V identifie $\underline{\mathrm{Aut}}_k(V)$ au fibré trivial sur $S \times S$ de fibre GL_n. La composition des isomorphismes fait de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(V)$ un groupoïde agissant sur S. Pour V libre muni d'une base, c'est le produit du groupoïde $S \times S$ agissant sur S et du groupe GL_n.

Pour Y dans $\mathcal{T}$, soit $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega \mid \langle Y \rangle)$ le foncteur qui à T sur $S \times S : (p_1, p_2) : T \to S$ attaché l'ensemble des isomorphismes de foncteurs $p_1^*(\omega \mid \langle Y \rangle) \xrightarrow{\sim} p_2^*(\omega \mid \langle Y \rangle)$. L'application de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega | \langle Y \rangle)(T)$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(Y))(T)$ est injective. Son image est l'ensemble des isomorphismes $g : p_1^* \omega(Y) \to p_2^* \omega(Y)$

tels que pour tout $Z \subset Y^n$, $\overset{n}{\oplus} g : p_1^*\omega(Y^n) = p_1^*\omega(Y) \xrightarrow{\sim} p_2^*\omega(Y^n) = p_2^*\omega(Y)^n$ respecte les sous-modules $p_i^*\omega(Z)$. En effet, pour tout sous-quotient $Q = Z_1/Z_2$ de Y^n, un tel g induit un isomorphisme g_Q entre les $p_i^*\omega(Q) = p_i^*\omega(Z_1)/p_i^*\omega(Z_2)$, et un argument de graphe montre que ces g_Q commutent aux $\omega(f)$, pour f un morphisme entre sous-quotients de Y^n. Cette description montre que $p_i^*\omega(Q) = p_i^*\omega(Z_1)/p_i^*\omega(Z_2)$. Pour Q' un sous-quotient Z_1'/Z_2' de Y^m, et $f : Q \to Q'$, le graphe $\Gamma(f) \subset Q \times Q'$ de f à une image inverse $\tilde{\Gamma}(f) \subset cy^{n+m}$ respectée par $\overset{n+m}{\oplus} g$. On a donc $\omega(f)g_Q = g_{Q'}\omega(f)$ et g se prolonge en le morphisme de foncteurs (g_Q). Cette description montre que $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega \mid \langle Y \rangle)$ est représenté par un sous-schéma fermé – encore noté $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega \mid \langle Y \rangle)$ de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(Y))$.

Si P est un générateur projectif de $\langle Y \rangle$, $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega \mid \langle Y \rangle)(T)$ s'identifie encore à l'ensemble des isomorphismes $g : p_1^*\omega(P) \to p_2^*\omega(P)$ qui commutent à l'action de $\mathrm{End}(P)$. Ceci montre que $\mathrm{Aut}_k(\omega \mid \langle Y \rangle)$ est le sous-schéma de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(P))$ défini par un nombre fini d'équations. C'est aussi le sous-schéma de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(Y))$ défini par un nombre fini d'équations: si P est le sous-quotient Z_1/Z_2 de Y^n, il s'agit de respecter les $\omega(Z_i) \subset \omega(Y)^n$, la structure de $\mathrm{End}\, P$-module de $\omega(P) = \omega(Z_1)/\omega(Z_2)$ et $\omega(f)$ pour f un épimorphisme $P^m \to Y$.

Soit X un $\otimes$-générateur de $\mathcal{T}$. Quitte à remplaçer X par $X \oplus 1 \oplus X^\vee$, on peut supposer, et on suppose, que 1 et $X^\vee$ sont dans $\langle X \rangle$. Les $\mathcal{T}(X, n) := \langle X^{\otimes n} \rangle$ forment alors une suite croissante de sous-catégories de $\mathcal{T}$ de réunion $\mathcal{T}$. Soit G_n le foncteur qui à $(p_1, p_2) : T \to S \times S$ attaché l'ensemble des isomorphismes g de $p_1^*\omega \mid \mathcal{T}(X, n)$ avec $p_2^*\omega \mid \mathcal{T}(X, n)$ qui respectent les isomorphismes $\omega(Y \otimes Z) \to \omega(Y) \otimes \omega(Z)$ pour Y dans $\mathcal{T}(X, i)$ et Z dans $\mathcal{T}(X, j)$ avec $i + j \le n$. Il suffit pour cela que g commute aux images inverses par les p_i des isomorphismes

$$\omega(\overset{m}{\otimes} X) \xrightarrow{\sim} \overset{m}{\otimes} \omega(X)$$

pour $m \le n$. On en déduit que G_n est représenté par un sous-schéma fermé de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X))$ défini par un nombre fini d'équations.

Le groupoïde G s'identifie à l'intersection des sous-groupoïdes G_n de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X))$ et 6.18 en résulte.

6.19 **Proposition.** *Sous les hypothèses de 6.18, avec B un corps, G est fidèlement plat de présentation finie sur $S \times S$.*

Preuve. Avec les notations de 6.18, soient G^Δ (resp. G_n^Δ) la restriction de G (resp. G_n) à la diagonale $S \hookrightarrow S \times S$ de $S \times S$. C'est un schéma en groupe sur S. Puisque S est noethérien, $G^\Delta = G_n^\Delta$ pour $n \ge n_0$.

Écrivons B comme limite inductive filtrante de k-sous-algèbres de type fini B_α et soit $S_\alpha := \mathrm{Spec}(B_\alpha)$. Fixons n. Puisque G_n est de présentation finie sur $S \times S$, des arguments standard montrent que pour α assez grand, G_n provient d'un groupoïde de présentation finie $G_{n,\alpha}$ agissant sur S_α. Puisque $B_\alpha \subset B$, S_α est intègre. Remplaçant S_α par un ouvert affine dense, on peut supposer que les deux projections $p_i : G_{n,\alpha} \to S_\alpha$ sont plates et que la restriction $G^{\Delta}_{n,\alpha}$ de $G_{n,\alpha}$ à la diagonale $S_\alpha \hookrightarrow S_\alpha \times S_\alpha$ est plate sur S_α. Sous ces hypothèses, le quotient au sens des faisceaux *fppf* $S_\alpha/G_{n,\alpha}$ est représentable par un espace algébrique Q_α : on dispose d'un morphisme fidèlement plat $S_\alpha \to Q_\alpha$, égalisant la double flèche $G_{n,\alpha} \rightrightarrows S_\alpha$, et le morphisme $G_{n,\alpha} \to S_\alpha \underset{Q_\alpha}{\times} S_\alpha$ est fidèlement plat (3.11). Un espace algébrique admet toujours un ouvert non vide qui est un schéma affine. Remplaçant S_α par l'image inverse d'un tel ouvert, on obtient une situation où $Q_\alpha = S_\alpha/G_{n,\alpha}$ est un schéma affine. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & G_n \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{n,\alpha} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \\ & S \arrow[r] & S_\alpha \arrow[r] & Q_\alpha . \end{tikzcd}$$

Pour f l'image inverse sur S d'un élément de $\Gamma(Q_\alpha, \mathcal{O})$, les deux images inverses de f sur G coïncident. D'après (2.1.4), on a $f \in k$ et $Q_\alpha = \mathrm{Spec}(k)$. On conclut que $G_{n,\alpha}$ est fidèlement plat sur $S_\alpha \times S_\alpha$, donc G_n fidèlement plat sur $S \times S$.

Pour $m \geq n \geq n_0$, le morphisme de groupoïdes agissant transitivement sur S : $G_m \to G_n$ induit un isomorphisme $G^{\Delta}_m \to G^{\Delta}_n$. C'est donc un isomorphisme (3.5.2) et $G = G_n$ pour $n \geq n_0$, en particulier G est fidèlement plat de présentation finie sur $S \times S$.

6.20 **Corollaire.** *Si $\mathcal{T}$ admet un $\otimes$-générateur et admet un foncteur fibre ω sur $S = \mathrm{Spec}(B) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{T}$ admet un foncteur fibre sur une extension finie convenable k' de k.*

Preuve. Soit $s \in S$, de corps résiduel K. Par extension des scalaires, ω fournit un foncteur fibre sur K. On peut donc supposer, et on suppose, que B est un corps. Ecrivons B comme limite inductive de sous-algèbres B_α de type fini sur k. D'après 6.19, le groupoïde G agissant sur S des automorphismes de ω est de présentation finie. Il provient d'un groupoïde de présentation finie G_α sur un S_α. Puisque G est fidèlement plat sur

$S \times S$, pour β assez grand, le groupoïde G_β agissant sur S_β induit par G_α est fidèlement plat sur $S_\beta \times S_\beta (EGA)$. Le changement de base de S_β à S est alors une équivalence: $\mathrm{Rep}(S_\beta : G_\beta) \longrightarrow \mathrm{Rep}(S : G)$ (3.5.1). On déduit donc de ω un foncteur fibre ω_β sur S_β. La fibre de ω_β en un point fermé de S_β est le foncteur fibre voulu.

Le lemme 6.17 résulte de 6.19 et 6.20. Par 6.16, ceci termine la preuve de 6.9, et celle du théorème principal 1.12.

6.21 **Preuve de 5.18.** Soient S_i, G_i, S et G comme en 5.18. Soit G_{iS} le groupoïde agissant sur S induit par G_i. On a

$$\mathrm{Rep}(S_i : G_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(S : G_{iS})$$

et G est le produit (sur $S \times S$) des G_{iS}. Il s'agit donc de prouver que le produit tensoriel sur S:

$$\Pi\, \mathrm{Rep}(S : G_{iS}) \longrightarrow \mathrm{Rep}(S : G) \tag{6.21.1}$$

fait de la catégorie but le produit tensoriel des catégories sources.

Changeons de notations et soient G_i des k-groupoïdes agissant transitivement sur S, de produit G. Soit $\mathcal{T}$ le produit tensoriel des $\mathcal{T}_i := \mathrm{Rep}(S_i : G_i)$. Le produit tensoriel sur S des foncteurs fibres ω_i "oubli de l'action de G_i" est un foncteur exact en chaque variable $\Pi\, \mathcal{T}_i \to$ (modules sur S). Il se factorise par un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ sur S. On a (1.12(ii)) $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(S : \mathrm{Aut}_k(\omega))$ et le morphisme défini par transport de structures $G = \prod_{S \times S} G_i = \prod_{S \times S} \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_i) \to \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega)$ donne lieu à un diagramme essentiellement commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[rr] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathrm{Rep}(S : G) \\ & \mathrm{Rep}(S : \mathrm{Aut}_k(\omega)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Il reste à prouver que le morphisme

$$G = \prod_{S \times S} \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_i) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega) \tag{6.21.2}$$

est un isomorphisme. On dispose de $\otimes$-foncteurs $\mathrm{inj}_i = \mathcal{T}_i \to \mathcal{T} : X \mapsto$ produit tensoriel de X avec les $1 \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{T}_j$ $(j \neq i)$. Il définissent des morphismes $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega) \to \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega_i)$, de produit une retraction de (6.21.2). Cette rétraction est injective, car tout objet de $\mathcal{T}$ est sous-quotient d'un $\otimes \mathrm{inj}_i(X_i) = \otimes X_i$. Le morphisme (6.21.2) est donc un isomorphisme.

7. Caractérisation interne des catégories tannakiennes (caractéristique 0)

Notre but dans ce paragraphe est de prouver le théorème suivant

7.1 **Théorème**. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle (1.2, 2.1) sur k de caractéristique* 0. *Les condition suivantes sont équivalentes*

(i) *$\mathcal{T}$ est tannakienne (2.8).*

(ii) *Pour tout X dans $\mathcal{T}$*, $\dim X$ *est un entier* ≥ 0.

(iii) *Pour tout X dans $\mathcal{T}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que* $\overset{n}{\wedge} X = 0$.

Rappelons la définition de $\dim X$. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ soit $\delta(f) : 1 \to Y \otimes \check{X}$ le composé $(1_{X^\vee} \otimes f) \circ \delta : 1 \to X^\vee \otimes X \to X^\vee \otimes Y = Y \otimes X^\vee$. Pour $X = Y$, on pose $\mathrm{Tr}(f) := \mathrm{ev} \circ \delta(f) \in \mathrm{End}(1) = k$, et $\dim X := \mathrm{Tr}(1_X) = \mathrm{ev} \circ \delta$.

La *puissance extérieure* $\overset{n}{\wedge} X$ est l'image de l'antisymétrisation $a = \sum(-1)^{\epsilon(\sigma)}\sigma : \overset{n}{\otimes} X \to \overset{n}{\otimes} X$. En caractéristique 0, c'est aussi l'image du projecteur $a/n!$, et

$$(7.1.1) \qquad \dim \overset{n}{\wedge} X = \mathrm{Tr}(a/n!) = \mathrm{Tr}(a)/n!\ .$$

Montrons que cette dimension est donnée par la formule habituelle

$$(7.1.2) \quad \dim \overset{n}{\wedge} X = \binom{\dim X}{n} := (\dim X)(\dim X - 1) \cdots (\dim X - n + 1)/n!\ .$$

7.2 **Lemme**. *Soient n un entier ≥ 1, X_i ($i \in \mathbf{Z}/(n)$) dans $\mathcal{T}$, et des morphismes*
$u_i : X_i \to X_{i+1}$. Il définissent un endomorphisme $\otimes u_i$ du produit tensoriel des X_i. La trace de cet endomorphisme coïncide avec celle du composé des u_i :

$$(7.2.1) \qquad \mathrm{Tr}(\otimes u_i) = \mathrm{Tr}(u_n \circ \cdots \circ u_1)\ .$$

Preuve. Pour le composé de deux morphismes $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, $\delta(vu)$ est le composé

$$1 \xrightarrow{\delta(v) \otimes \delta(u)} Z \otimes Y^\vee \otimes Y \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}_Y} Z \otimes X^\vee\ .$$

Itérant, on obtient que $\delta(u_n \circ \cdots \circ u_1)$ est le composé

$$1 \xrightarrow{\delta(u_n)\otimes\cdots\otimes\delta(u_1)} X_1{\otimes}X_n^\vee{\otimes}X_n{\otimes}X_{n-1}^\vee \cdots {\otimes}X_2{\otimes}X_1^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}(X_n)\otimes\cdots\otimes\mathrm{ev}(X_2)} X_1{\otimes}X_1^\vee$$

et la trace de $u_n \cdots u_1$ est le composé

$$\mathrm{Tr}(u_n \cdots u_1) = \bigotimes_1^n \mathrm{ev}(X_i) \circ \otimes\delta(u_i)\,.$$

La trace de $\bigotimes_1^n u_i$ est donnée par la même formule et 7.2 en résulte.

Prouvons (7.1.2). Si $\sigma \in \mathcal{G}_n$ est une permutation cyclique, 7.2 appliqué à $X_i = X$, $u_i = \mathrm{Id}_X$ donne

$$\mathrm{Tr}(\sigma\,, \bigotimes_1^n X) = \dim(X)\,.$$

Pour σ une permutation ayant k cycles, on en déduit

$$\mathrm{Tr}(\sigma\,, \bigotimes_1^n X) = \dim(X)^k$$

et (7.1.1) prouve l'existence d'un polynôme universel $P \in \mathbf{Q}[T]$ tel que $\dim \overset{n}{\Lambda} X = P(\dim X)$. Prenant pour $\mathcal{T}$ la catégorie des espaces vectoriels sur k , on trouve que pour tout entier $d \geq 0$,

$$P(d) = \binom{d}{n}\,.$$

On a donc $P(T) = \binom{T}{n}$ et (7.1.2) en résulte.

7.3 **Lemme**. *Si $\mathcal{T}$ vérifie 7.1(ii) et que X dans $\mathcal{T}$ est de dimension* 0 , *alors* $X = 0$.

Preuve. Si $X \neq 0$, l'application identique de X est non nulle et δ : $1 \to X \otimes X^\vee$ est non nul, donc injectif (*cf* 2.9). On a $\dim(X \otimes X^\vee) = \dim X . \dim X^\vee = 0$ et $\dim \mathrm{coker}(\delta) = \dim(X \otimes X^\vee) - \dim 1 = -1$: contradiction.

7.4 **Preuve de 7.1:** (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Si $\dim X$ est un entier $n \geq 0$, (7.1.2) donne $\dim \overset{n+1}{\Lambda} X = 0$, donc par 7.3 $\overset{n+1}{\Lambda} X = 0$.

Preuve de 7.1: (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Si $\overset{n}{\wedge} X = 0$, on a $\dim \overset{n}{\wedge} X = 0$ et (7.1.2) montre que $\dim X$ est un entier entre 0 et $n-1$.

Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii)(iii). il reste à montrer que si $\mathcal{T}$ vérifie (ii) et (iii), alors $\mathcal{T}$ est tannakienne. La preuve sera donnée en 7.18.

7.5. Dans les n^0 7.5 à 7.12, nous allons montrer comment on peut imiter, dans une catégorie tensorielle quelconque $\mathcal{T}$, des rudiments d'algèbre commutative et de géométrie algébrique. Nous n'exigeons pas que k soit de caractéristique 0.

Soit $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{T}$ (SGA4 I8.2). Une définition est: un objet est un système inductif filtrant X_i, et les flèches sont définies par

$$\operatorname{Hom}((X_i),(Y_j)) = \varprojlim_i \varinjlim_j \operatorname{Hom}(X_i, Y_j).$$

Le système inductif filtrant (X_i), vu comme objet de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$, est noté "$\varinjlim$" X_i. Une définition équivalente: la catégorie des foncteurs $\mathcal{T} \to$ (Ens), limites inductives filtrantes de foncteurs représentables. Au système inductif (X_i), associer la limite inductive des foncteurs h_{X_i}. Parce que $\mathcal{T}$ est une catégorie abélienne, $\operatorname{Ind}(\mathcal{T})$ l'est aussi. Le produit tensoriel dans $\mathcal{T}$ en définit un dans $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$, encore exact, associatif et commutatif.

Un *anneau* (à unité) A de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ est un objet A de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ muni d'un produit $A \otimes A \to A$ associatif et admettant une "unité" $1 \to A$ (un morphisme u tels que les composés

$$A = 1 \otimes A \xrightarrow{u \otimes A} A \otimes A \longrightarrow A \quad \text{et}$$

$$A = A \otimes 1 \xrightarrow{A \otimes u} A \otimes A \longrightarrow A$$

soient l'identité).

On définit de façon évidente les A-modules à gauche et à droite, le produit tensoriel sur A, la commutativité de A. Par exemple: un A-module à gauche M est un objet de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ muni d'un produit $A \otimes M \to M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\cdot \otimes M"] \arrow[d, "A \otimes"] & A \otimes M \arrow[d] \\ A \otimes M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

et tel que le composé

$$M = 1 \otimes M \xrightarrow{u \otimes M} A \otimes M \longrightarrow M$$

soit l'identité. On a $M \underset{A}{\otimes} N = \mathrm{coker}(M \otimes A \otimes N \rightrightarrows M \otimes N)$. Pour A commutatif, la catégorie des A-modules, munie du produit tensoriel sur A, vérifie 2.1.1. L'objet unité est le A-module A, encore noté 1_A.

7.6 *Exemple.* (i) L'objet 0 admet une unique structure d'anneau. Tout module sur cet anneau est nul.

(ii) L'objet unité 1, muni du morphisme structural $1 \otimes 1 \to 1$ et de l'identité $1 \to 1$ est un anneau. Un objet de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$ admet exactement une structure de module sur cet anneau.

L'anneau 1 (resp. 0) est initial (resp. final) dans la catégorie des anneaux de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$.

7.7. Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$. On dit que B est *plat* (resp. *fidèlement plat*) sur A si le foncteur (A-modules) $\to$ (B-modules) : $M \mapsto B \underset{A}{\otimes} M$ est exact (resp. exact et fidèle). Le formalisme de la descente fidèlement plate des modules (SGA 1 XIII 1) s'applique tel quel: si B est fidèlement plat sur A, le foncteur $M \mapsto B \underset{A}{\otimes} M$ est une équivalence de la catégorie des A-modules avec celle de B-modules N munis d'une donnée de descente (un isomorphisme $(B \underset{A}{\otimes} B) \underset{B}{\otimes} N \xrightarrow{\sim} N \underset{B}{\otimes} (B \underset{A}{\otimes} B)$ vérifiant la condition de cocycle usuelle). La preuve de SGA 1 VIII 1 s'applique, ou on peut se ramener au théorème de Barr-Beck (4.1) comme en 4.2.

Si $A \neq 0$, le morphisme unité $1 \to A$ est non nul, donc un monomorphisme (*cf* 2.9). Le tensorisant avec un Ind-objet M, on obtient un monomorphisme $M \hookrightarrow A \otimes M$. Si $A \neq 0$, on a donc $A \otimes M \neq 0$. Le produit tensoriel dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$ coïncide avec le produit tensoriel de modules sur l'anneau 1. Le foncteur $M \mapsto A \underset{1}{\otimes} M = A \otimes M$ est donc exact et fidèle. Si $A \neq 0$, A est donc fidèlement plat sur 1.

7.8. Pour disposer d'un langage plus géométrique, on appelle *catégorie des schémas affines en* $\mathcal{T}$ l'opposée de celle des anneaux commutatifs à unité de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$. On dira aussi: $\mathcal{T}$-schéma affine. On note $\mathrm{Sp}(A)$ le $\mathcal{T}$-schéma affine défini par A. Les produits fibrés existent: ils correspondent au produit tensoriel. Les sommes disjointes finies existent: elles correspondent aux produits.

Soit S un $\mathcal{T}$-schéma affine. Un *S-schéma affine* est un $\mathcal{T}$-schéma affine X, muni de $a : X \to S$. Un *S-schéma en groupes affines* est un objet en groupes de la catégorie ($\mathcal{T}$-schémas affines$/S$) des $\mathcal{T}$-schémas affines sur S.

On appelle schéma *vide* (resp. *point* noté (P^t)) le schéma initial (resp. final) Sp(0) (resp. Sp(1)). On dit que $S = \mathrm{Sp}(A)$ est *non vide* si $A \neq 0$. Puisque (P^t) est final, il n'y a pas lieu de distinguer entre (P^t)-schémas affines et $\mathcal{T}$-schémas affines, ni entre (P^t)-schémas en groupes affines et objets en groupes de la catégorie des $\mathcal{T}$-schémas affines, i.e. algèbres de Hopf commutatives à antipode de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$.

Pour abréger, nous dirons simplement *S-groupe* pour S-schéma en groupes affines et *$\mathcal{T}$-groupe* pour (P^t)-schéma en groupes affines.

On dit que $T = \mathrm{Sp}(B)$ est *fidèlement plat* sur $S = \mathrm{Sp}(A)$ si B est fidèlement plat sur A. On dit que des $S_i \to S$ $(i \in I)$ *couvrent* S s'il existe T fidèlement plat sur S, une partie finie J de I et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] T \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \coprod_{i\in J} S_i \arrow[dl] \\ & S . & \end{tikzcd}$$

Ceci définit une topologie sur la catégorie des $\mathcal{T}$-schémas affines. L'adjectif "*localement*" référera à cette topologie.

Exemple. Si le $\mathcal{T}$-schéma S est non vide, il est fidèlement plat sur le point.

Comme en théorie des schémas, il est souvent commode de décrire un S-schéma affine X en terme du foncteur représentable $T/S \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, X)$ correspondant. Ce foncteur est un faisceau pour la topologie fidèlement plate. On appelera $\mathrm{Hom}_S(T, X)$ l'ensemble des *T-points* de X. Comme d'habitude, se donner une structure de S-groupe sur X revient à se donner une structure fonctorielle de groupe sur l'ensemble de ses T-points, pour tout T/S. Cas particulier $S = (P^t)$: l'ensemble $X(T)$ des T-points de X est $\mathrm{Hom}(T, X)$.

Si $S = \mathrm{Sp}(A)$, un A-module M sera encore appelé un *module* sur S. Le produit tensoriel est le produit tensoriel sur A. Il vérifie (2.1.1). On écrit 1_S pour 1_A (le A-module unité A). Les catégories de modules forment une catégorie fibrée sur celle des $\mathcal{T}$-schémas affine. Pour $\mathrm{Sp}(B)$ au-dessus de $\mathrm{Sp}(A)$, l'image inverse de M sur $\mathrm{Sp}(A)$ est $B \underset{A}{\otimes} M$ sur $\mathrm{Sp}(B)$. Le formalisme de la descente fidèlement plate pour les schémas affines s'applique.

Pour M dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$, posons $\Gamma(M) := \mathrm{Hom}(1, M)$. Pour M un module sur $S = \mathrm{Sp}(A)$, on a

$$\Gamma(M) = \mathrm{Hom}(1, A) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(1_A, M)$$

et on appelle encore $\Gamma(M)$ les *sections globales* de M sur S. Prendre garde que le foncteur Γ peut ne pas être exact.

7.9 *Exemple: $V(M)$.* Soit M un module sur $S = \mathrm{Sp}(A)$. La *puissance symétrique* $\mathrm{Sym}^n_A(M)$ est le plus grand quotient de $\overset{n}{\underset{A}{\otimes}} M$ sur lequel le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ agisse trivialement. L' *algèbre symétrique* $\mathrm{Sym}^*_A(M)$ est la somme des $\mathrm{Sym}^n_A M$ $(n \geq 0)$. Pour toute A-algèbre commutative B, on a

$$\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(\mathrm{Sym}^*_A M, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, B)\,.$$

Pour tout $T = \mathrm{Sp}(B)$ au-dessus de S, soit M_T déduit de M par changement de base. Le foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}(M_T, 1_T)$ est représentable, représenté par $V(M) := \mathrm{Sp}(\mathrm{Sym}^*_A M)$: on a

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes M, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, B) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(\mathrm{Sym}^*_A M, B)\,.$$

Le foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}(M_T, 1_T)$ est un foncteur en groupes et $V(M)$ est donc un S-groupe.

7.10 *Exemple: fibrés vectoriels.* Si M sur $S = \mathrm{Sp}(A)$ admet un dual $M^\vee$ (2.2 pour $\mathcal{M}$ la catégorie des A-modules), tout facteur direct de M en admet un également et, pour T sur S, $(M^\vee)_T$ est encore un dual de M_T. En particulier, si M est facteur direct d'un $A \otimes X$ avec X dans $\mathcal{T}$, M admet un dual.

Si M et N admettent un dual, on dispose (2.4) de

$$u \longmapsto {}^t u : \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(N^\vee, M^\vee)\,.$$

Pour $N = 1_A$, on trouve en appliquant 7.9 que le foncteur qui à T sur S attache l'ensemble des sections globales sur T de M_T est représentable, représenté par $V(M^\vee)$:

$$\Gamma(M_T) = \mathrm{Hom}_T(1_T, M_T) = \mathrm{Hom}_T(M_T^\vee, 1_T)\,.$$

On appellera encore le $\mathcal{T}$-schéma $V(M^\vee)$ le *fibré vectoriel* M. Pour $S = (P^t)$, et pour M dans $\mathcal{T}$, on appellera de même $\mathrm{Sp}(\mathrm{Sym}^*(M^\vee))$ le

$\mathcal{T}$-schéma vectoriel M. Cette terminologie est parallèle à celle qui identifie un espace vectoriel V de dimension finie sur k et le schéma Spec $\mathrm{Sym}^*(V^\vee)$ ayant même k-points.

7.11 *Exemple: k-schémas et $\mathcal{T}$-schémas, $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_m$.* Si $T : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ est un $\otimes$-foncteur entre catégories tensorielles sur k, il s'étend en un $\otimes$-foncteur encore noté $T : \mathrm{Ind}\,\mathcal{T}_1 \to \mathrm{Ind}\,\mathcal{T}_2$. Ce dernier transforme anneaux de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}_1$ en anneaux de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}_2$, et $\mathcal{T}_1$-schémas affines en $\mathcal{T}_2$-schémas affines.

Prenons pour $\mathcal{T}_2$ une catégorie tensorielle $\mathcal{T}$, pour $\mathcal{T}_1$ la catégorie des multiples de 1, identifiée à celle des k-vectoriels de dimension finie (2.9) et pour T l'inclusion de $\mathcal{T}_1$ dans $\mathcal{T}$. On trouve qu'un schéma affine sur k définit un $\mathcal{T}$-schéma affine. La droite affine sur k définit ainsi le schéma vectoriel 1, qu'on notera A^1 ; son image inverse sur $S = \mathrm{Sp}(A)$ est le fibré vectoriel 1_S, qu'on notera A^1_S. On a $A^1_S = \mathrm{Sp}(\mathrm{Sym}^*_A(1_A))$ et $\mathrm{Sym}^*_A(1_A) = \bigoplus_{n\geq 0} A = A[X]$. L'ensemble $\mathrm{Hom}_S(S, A^1_S)$ des sections de A^1_S est $\Gamma(A)$. On notera 1 la section unité.

De même, le k-schéma $\mathbf{G}_m$ définit le $\mathcal{T}$-schéma qui représente le foncteur $S = \mathrm{Sp}(A) \mapsto \Gamma(A)^*$.

7.12 *Exemple: espace homogène sous un vectoriel.* Soit dans $\mathcal{T}$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} 1 \longrightarrow 0\,.$$

Soit ${}^t v : 1 \to E^\vee$ le transposé de v. Le morphisme v définit un morphisme de $\mathcal{T}$-schémas vectoriels $E \to A^1$. Soit P le $\mathcal{T}$-schéma image inverse du point 1. C'est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ (P^t) & \xrightarrow{1} & A^1 \end{array}$$

i.e. le Sp du produit tensoriel $\mathrm{Sym}^*(E^\vee) \underset{\mathrm{sym}^*(1)}{\otimes} 1$. Les flèches sont $\mathrm{Sym}^*(1) = \bigoplus_{n\geq 0} 1 \to 1$: coordonnées l'identité et $\mathrm{Sym}^*(1) \to \mathrm{Sym}^* E^\vee$: en degré 1, ${}^t v$. Le produit tensoriel est la limite inductive des $\mathrm{Sym}^n(E^\vee)$, avec pour morphismes de transition la multiplication par ${}^t v$:

$$P = \mathrm{Sp}(\varinjlim \mathrm{Sym}^n(E^\vee))\,.$$

Supposons k de caractéristique 0. La puissance symétrique $\mathrm{Sym}^n X$ de X dans $\mathcal{T}$ est alors le facteur direct de $\overset{n}{\otimes} X$ défini par le projection $s/n!$, avec $s = \sum \sigma$ $(\sigma \in \mathcal{S}_n)$. Si $X_1 \subset X$, le produit tensoriel des filtrations $0 \subset X_1 \subset X$ est une filtration sur $\overset{n}{\otimes} X$. Parce que le produit tensoriel est exact, le gradué associé est $\overset{n}{\otimes}(X_1 \oplus X/X_1)$. Passant au facteur direct définit par $s/n!$, on obtient une filtration de $\mathrm{Sym}^n(X)$, de quotients successifs les $\mathrm{Sym}^p(X_1) \otimes \mathrm{Sym}^{n-p}(X/X_1)$.

Dans le cas de la suite exacte

$$0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{t_v} E^\vee \xrightarrow{t_u} M^\vee \longrightarrow 0,$$

on obtient une filtration croissante F de $\mathrm{Sym}^n(E^\vee)$ de quotients successifs les $\mathrm{Sym}^n(M^\vee)$. On a $F_p = \mathrm{Sym}^p(E^\vee)$ $(p \leq n)$:

$$0 \subset 1 = \mathrm{Sym}^0(E^\vee) \overset{t_v}{\hookrightarrow} E^\vee = \mathrm{Sym}^1(E^\vee) \overset{t_v}{\hookrightarrow} \mathrm{Sym}^2(E^\vee) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(E^\vee).$$

7.13. Soit $\underline{\underline{P}}$ une propriété de modules, stable par changements de bases. En accord avec 7.8, on dira qu'un module M sur S vérifie $\underline{\underline{P}}$ *localement* s'il existe des $S_i \to S$ couvrant M tel que les M_i sur S_i déduits de M par changement de base vérifient $\underline{\underline{P}}$. La propriété $\underline{\underline{P}}$ est dite *locale* si elle est vraie dès que localement vraie.

Exemple: la propriété d'admettre un dual est locale.

7.14 **Lemme**. *Supposons k de caractéristique 0 et soit $0 \to M \to E \to N \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{T}$. Localement, cette suite est scindable.*

Preuve. Supposons tout d'abord que $N = 1$. Soit P comme en 7.12. Parce que k est de caractéristique 0, les calculs 7.12 donnent $P \neq \emptyset$. Le $\mathcal{T}$-schéma P est donc fidèlement plat sur le point. Après changement de base à P, il existe par définition une section globale de E_P de projection sur $N_P = 1_P$ la section un. Une telle section globale n'est pas autre chose qu'un scindage de la suite exact $0 \to M_P \to E_P \to 1_P \to 0$ de modules sur P.

Passons au cas général. Prenons l'image inverse de l'extension $0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(N, M) \to \underline{\mathrm{Hom}}(N, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}(N, N) \to 0$ par $\delta : 1 \to \underline{\mathrm{Hom}}(N, N)$. Il revient au même de scinder (M, E, N) ou cette nouvelle extension; ceci nous ramène au cas déjà traité.

Si un module M sur $S = \mathrm{Sp}(A)$ admet un dual, sa dimension $\dim_A(M) \in \Gamma(A)$ est définie comme le composé $\mathrm{ev} \circ \delta : 1_A \to M^\vee \otimes M \to 1_A$.

7.15 **Lemme**. *Soit M un module sur $S = \mathrm{Sp}(A)$. On suppose que k est de caractéristique 0, que $A \neq 0$, que M est facteur direct d'un A-module $A \otimes X$ (X dans $\mathcal{T}$) et que $\dim_A M$ est un entier $d > 0$. Alors, M admet localement une décomposition $M = 1_S \oplus N$.*

Preuve. La donnée d'une décomposition $M = 1_S \oplus N$ équivaut à celle de morphismes $1_S \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} 1_S$ avec $vu = 1$. Soit F le foncteur qui à T sur S attache l'ensemble des paires $v, u : 1_T \xrightarrow{u} M_T \xrightarrow{v} 1_T$ avec $vu = 1$. Nous allons montrer que F est représentable, représenté par un $\mathcal{T}$-schéma affine $\mathrm{Sp}(B)$ sur $\mathrm{Sp}(A)$, et que B est fidèlement plat sur A.

Le foncteur des paires $v, u : 1_T \xrightarrow{u} M_T \xrightarrow{v} 1_T$ est représenté par le fibré vectoriel $M \times M^\vee$ sur S. La composition $(u, v) \to vu$ est un morphisme de foncteur, définissant un morphisme de $\mathcal{T}$-schémas $c : M \times M^\vee \to A^1_S$. Le foncteur F est représenté par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(B) & \longrightarrow & M \times M^\vee \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle c} \\ S & \xrightarrow{\text{“1”}} & A^1_S \,. \end{array}$$

Calculons B. On a $A^1_S = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Sym}^*_A(1_A)$, $\mathrm{Sym}^*_A(1_A) = A[T] = \bigotimes_0^\infty A$ et $S \xrightarrow{\text{“1”}} A^1_S$ est $T \to 1 : A[T] \to A$ i.e. l'identité en chaque degré: $\bigoplus_0^\infty A \to A$. On a $M \times M^\vee = \mathrm{Sp}(\mathrm{Sym}^*_A(M^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^*_M(M))$ et la composante de degré un, A, de $\mathrm{Sym}^*_A(1_A)$ s'envoie dans $M^\vee \underset{A}{\otimes} M$, la flèche est δ. Le produit tensoriel B est le plus grand anneau quotient de $\mathrm{Sym}^*_A(M^\vee) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Sym}^*_A(M)$ dans lequel les flèches unité et $\delta : A \to M^\vee \otimes M$ sont égalisées. C'est

$$B = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} \varinjlim_n \mathrm{Sym}^n_A M^\vee \underset{A}{\otimes} \mathrm{Sym}^{n+p}_A M \,, \tag{7.15.1}$$

les flèches de transition dans la limite inductive étant la multiplication par δ.

La puissance symétrique $\mathrm{Sym}^n_A M$ est plate sur A: si M est facteur direct de $A \otimes X$, c'est un facteur direct du A-module plat $A \otimes \mathrm{Sym}^n X =$

$\mathrm{Sym}_A^n(A \otimes X)$. La formule (7.15.1) montre donc que, comme A-module, B est somme de limites inductives filtrantes de modules plats sur A. Pour conclure, nous allons montrer que le morphisme $A \to B$ admet une rétraction A-linéaire. Il suffit pour cela de construire un système de morphismes

$$\tau_n : \mathrm{Sym}_A^n M^\vee \underset{A}{\otimes} \mathrm{Sym}_A^n M \longrightarrow A$$

avec $\tau_0 = \mathrm{Id}$, rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Sym}_A^n M^\vee \underset{A}{\otimes} \mathrm{Sym}_A^n M \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\tau_n"'] & & \mathrm{Sym}_A^{n+1} M^\vee \underset{A}{\otimes} \mathrm{Sym}_A^{n+1} M \arrow[dl, "\tau_{n+1}"] \\
& A\,. &
\end{tikzcd} \tag{7.15.2}$$

Parce qu'on est en caractéristique 0, la puissance symétrique Sym_A^n est le facteur direct de $\overset{n}{\underset{A}{\otimes}}$ défini par le projecteur $s/n!$ (*cf* 5.12) et la dualité entre $\overset{n}{\underset{A}{\otimes}} M^\vee$ et $\overset{n}{\underset{A}{\otimes}} M$ induit une dualité entre $\mathrm{Sym}_A^n M^\vee$ et $\mathrm{Sym}_A^n M$. On prend

$$\tau_n : \mathrm{ev}/\dim_A \mathrm{Sym}^n M \tag{7.15.3}$$

où $\dim_A \mathrm{Sym}^n M = d(d+1)\cdots(d+n-1)/n!$ (*cf* 7.1).

7.16 <u>Lemme</u>. *Pour τ_n donné par (7.15.3), les diagrammes (7.15.2) commutent.*

Preuve. La multiplication par δ de (7.15.2) se déduit de l'opération analogue dans $\overset{n}{\otimes}$ par symétrisation:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}_A^n M^\vee \otimes \mathrm{Sym}_A^n M \arrow[r, "\delta."] \arrow[d, hook] & \mathrm{Sym}_A^{n+1} M^\vee \otimes \mathrm{Sym}_A^{n+1} M \\
\overset{n}{\underset{A}{\otimes}} M^\vee \otimes \overset{n}{\underset{A}{\otimes}} M \arrow[r] & \overset{n+1}{\underset{A}{\otimes}} M^\vee \otimes \overset{n+1}{\underset{A}{\otimes}} M\,. \arrow[u, "s/(n+1)!\otimes s/(n+1)!"']
\end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{ev} \circ (s/(n+1)! \otimes s/(n+1)!) = \mathrm{ev} \circ (1 \otimes s/(n+1)!)$. Développons en $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$. Le terme relatif à σ ne dépend que de si $\sigma(n+1) = n+1$ ou non. On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} \circ (\delta.\ ) &= \frac{1}{n+1}\langle \mathrm{ev}, \delta\rangle.\mathrm{ev} && (\text{termes où } \sigma(n+1) = n+1) \\ &+ \frac{n}{n+1}\mathrm{ev} && (\text{autres termes}) \\ &= \frac{d+n}{n+1}\mathrm{ev}\ , \end{aligned}$$

d'où 7.16.

7.16.1 *Remarque.* Dans la catégorie tensorielle sur k des super espaces vectoriels de dimension finie (1.4) un espace vectoriel V purement impair n'admet pas localement 1 pour facteur direct. Le lecteur vérifiera que dans ce cas le foncteur F de la preuve de 7.15 est le foncteur vide.

7.17 **Proposition.** *Sous les hypothèses (ii)(iii) de 7.1, tout X dans $\mathcal{T}$ est localement isomorphe à $1^{\dim X}$.*

Preuve. Soit $d = \dim X$. Appliquant 7.15 de façon itérée, on obtient $A \neq 0$ et un isomorphisme de A-modules entre $A \otimes X$ et un A-module $1_A^d \oplus N$. On a pour les A-modules

$$\overset{n}{\underset{A}{\wedge}}(U \oplus V) = \bigoplus_{p+q=n} \overset{p}{\underset{A}{\wedge}} U \otimes \overset{q}{\underset{A}{\wedge}} V\ .$$

Pour $n = d+1$, on a $\overset{d}{\wedge} 1_A^d = 1_A$ et N est donc facteur direct de

$$\overset{d+1}{\underset{A}{\wedge}}(1_A^d \oplus N) \sim \overset{d+1}{\underset{A}{\wedge}}(A \otimes X) = A \otimes \overset{d+1}{\wedge} X = 0\ .$$

On a donc $N = 0$, ce qui prouve 7.17.

7.18 **Preuve de 7.1** (fin). Appliquant 7.14 et 7.17 transfiniment, on obtient un anneau commutatif $A \neq 0$ de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$ tel que

(7.19.1) Pour tout X dans $\mathcal{T}$, les A-modules $A \otimes X$ et $A^{\dim X}$ sont isomorphes;

(7.19.2) Pour toute suite exacte courte dans $\mathcal{T}$, la suite exacte courte de A-modules qui s'en déduit par extension des scalaires est scindable.

Le foncteur $X \mapsto \Gamma(A \otimes X)$ est alors un foncteur fibre sur $\Gamma(A)$.

8. Le groupe fondamental d'une catégorie tensorielle

8.1. Dans ce paragraphe, nos résultats essentiels supposent que $\mathcal{T}$ est une catégorie tensorielle sur k vérifiant la condition de finitude (2.12.1): objets de longueur finie et Hom de dimension finie, et que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est encore une catégorie tensorielle sur k. Cette dernière condition est vérifiée pour k parfait (5.17) ou pour $\mathcal{T}$ tannakienne (6.9). J'ignore si elle est toujours vérifiée.

L'idée essentielle est qu'on peut paraphraser certains des arguments et des résultats du paragraphe 6, pour ω le foncteur identique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$. Dans la catégorie but le rôle essentiel est joué par les $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$, et le foncteur identique est à interpréter comme attachant X à X, et comme définissant

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$$

pour X, Y dans $\mathcal{T}$. A gauche, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, interprété comme un objet de $\mathcal{T}$ (*cf* 2.9 et 7.11).

8.2. Soient k un corps commutatif, $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k, A une k-algèbre de rang fini, $(A)_{\mathrm{coh}}$ la catégorie des A-modules à droite de type fini et ${}_AM$ un objet de $\mathcal{T}$ muni d'une structure de A-module à gauche. Il définit un foncteur

$$\omega_0 : (A)_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathcal{T} : E \longmapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM .$$

La catégorie $(A)_{\mathrm{coh}} \underset{k}{\otimes} \mathcal{T}$ est la catégorie $(\mathcal{T} - A)$ des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une structure de A-module à droite (5.11). Le foncteur

$$\omega : (\mathcal{T} - A) \longrightarrow \mathcal{T} : E \longrightarrow E \underset{A}{\otimes} {}_AM$$

est exact à droite; il correspond au foncteur

$$(A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : E, T \longmapsto (E \underset{A}{\otimes} {}_AM) \otimes T$$

de $(A)_{\mathrm{coh}} \times \mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$.

Soit $M_A^\vee$ le dual (au sens de $\mathcal{T}$) de ${}_AM$. On le munit de la structure de A-module à droite transposée de la structure de A-module de ${}_AM$. Le morphisme d'évaluation: $M_A^\vee \otimes {}_AM \to 1$ se factorise par $\mathrm{ev}_A : M_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM \to 1$ et le morphisme $\delta : 1 \to {}_AM \otimes M_A^\vee$ se prolonge de façon unique en un morphisme de A-bimodules $\delta_A : A \to {}_AM \otimes M_A^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}({}_AM, {}_AM)$. Soit ω^* le foncteur de $\mathcal{T}$ dans $(\mathcal{T} - A)$:

$$\omega^* : T \longmapsto T \otimes M_A^\vee .$$

On laisse au lecteur le soir de vérifier que, comme en 4.3, ev_A et δ_A définissent des morphismes de foncteurs $\omega\omega^* \to \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \to \omega^*\omega$ faisant de (ω, ω^*) une paire de foncteurs adjoints. Posons $L := M_A^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM$. Le foncteur $\omega\omega^*$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$ est $\otimes L$, et le morphisme de foncteur $\omega\omega^* \to \omega(\omega^*\omega)\omega^* = (\omega\omega^*)(\omega\omega^*)$ est défini par un coproduit $c : L \to L \otimes L$, coassociatif et de counité ev_A : on dira que L est une cogèbre de $\mathcal{T}$.

Une *représentation* de L est un objet T de $\mathcal{T}$ muni de $u : T \to T \otimes L$ rendant commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & T \otimes L \arrow[d, "1 \otimes c"] \\
T \otimes L \arrow[r, "u \otimes 1"] & T \otimes L \otimes L
\end{tikzcd}$$

et tel que $T \to T \otimes L \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{ev}_A} T$ soit l'identité. La cogèbre L de $\mathcal{T}$ agit fonctoriellement sur chaque $\omega(E)$.

Supposons ω_0 exact et fidèle, et que $\mathcal{T}$ vérifie (2.12.1). D'après 5.14(i), le foncteur

$$\omega_0 \otimes \mathrm{Id} : (A)_{\mathrm{coh}} \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$$

est encore exact et fidèle. Si $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est tensorielle, le foncteur k-linéaire exact à droite $T : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que $T(X \underset{k}{\otimes} Y) = X \otimes Y$ est exact et fidèle (2.10). Le foncteur composé $\omega = T \circ (\omega_0 \otimes \mathrm{Id})$ est exact et fidèle et le théorème de Barr-Beck (4.1) donne:

8.3 **Proposition**. *Avec les hypothèses et notations de 8.2, si $\mathcal{T}$ vérifie (2.12.1), que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est tensorielle et que $\omega_0 : (A)_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{T}$ est exact et fidèle, le foncteur ω induit une équivalence de $(A)_{\mathrm{coh}} \otimes \mathcal{T}$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une action de L.*

8.4 (parallèle à 4.7). Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et ω_1, ω_2 deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$. Nous avons défini en 6.12 un object $\Lambda_{\mathcal{T}}(\omega_1, \omega_2)$ de $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$. Si cela ne crée pas de confusion, nous le noterons simplement $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$. On peut interpréter (6.12.1) comme un morphisme

$$\lambda(X) : \omega_2(X) \longrightarrow \omega_1(X) \otimes \Lambda(\omega_1, \omega_2) \tag{8.4.1}$$

et (6.12.1) signifie que ce morphisme est fonctoriel en X. La propriété universelle de $\Lambda := \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ est que pour tout ind-objet U de $\mathcal{T}$, l'application $f \mapsto f \circ \lambda(X)$ de $\mathrm{Hom}(\Lambda, U)$ dans les systèmes de morphismes $u(X)$: $\omega_2(X) \to \omega_1(X) \otimes U$ fonctoriels en X, est une bijection.

Pour trois foncteurs $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, itérant (8.4.1) on obtient

$$\omega_3(X) \longrightarrow \omega_2(X) \otimes \Lambda(\omega_2, \omega_3) \longrightarrow \omega_1(X) \otimes \Lambda(\omega_1, \omega_2) \otimes \Lambda(\omega_2, \omega_3)$$

fonctoriel en X, d'où

$$\Lambda(\omega_1, \omega_3) \longrightarrow \Lambda(\omega_1, \omega_2) \otimes \Lambda(\omega_2, \omega_3)\,. \tag{8.4.2}$$

Le coproduit (8.4.2) est coassociatif en un sens évident et les morphismes d'évaluation $\omega_i(X)^\vee \otimes \omega_i(X) \to 1$ définissent comme en 4.7 une counité $c : \Lambda(\omega_i, \omega_i) \to 1$.

Pour ω un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$, posons $\Lambda(\omega) := \Lambda(\omega, \omega)$. Le coproduit (8.4.4) de $\Lambda(\omega)$:

$$\Lambda(\omega) \longrightarrow \Lambda(\omega) \otimes \Lambda(\omega) \tag{8.4.3}$$

est coassociatif et admet une counité.

8.5 *Exemples (parallèle à 4.8).* (i) Pour $\mathcal{C}$ réduite à un objet et à sa flèche identique, la donnée de ω est celle d'un objet M de $\mathcal{T}$ et $\Lambda(\omega) = M^\vee \otimes M$.
(ii) Soient A une algèbre de dimension finie sur k, ${}_AM$ un objet de $\mathcal{T}$ muni d'une structure de A-module à gauche, $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules à droite de type fini, contenant A, et ω la restriction à $\mathcal{C}$ du foncteur $E \mapsto E \underset{A}{\otimes} {}_AM$. Le morphisme $\omega(A)^\vee \otimes \omega(A) \to \Lambda(\omega)$: ${}_AM^\vee \underset{A}{\otimes} M \to \Lambda(\omega)$ se factorise par un isomorphisme

$${}_AM^\vee \underset{A}{\otimes} {}_AM \xrightarrow{\sim} \Lambda(\omega)\,.$$

Pour $\mathcal{C}$ réduite à A, c'est la définition du produit tensoriel sur A. Le cas général sera traité en 8.7.

8.6 *Fonctorialités (parallèle à* 4.10*).* (i) Soient $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un $\otimes$-foncteur exact à droite, donc exact d'après 2.10, entre catégories tensorielles. Notant encore T son extension aux Ind-objets, on a

$$T\Lambda(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} \Lambda(T\omega_1, T\omega_2)\,. \tag{8.6.1}$$

(ii) Soit $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Les morphismes $\omega_2 TD \to \omega_1 TD \otimes \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ (D dans $\mathcal{D}$) définissent

$$\Lambda(\omega_1 \circ T, \omega_2 \circ T) \longrightarrow \Lambda(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{8.6.2}$$

(iii) Si $\mathcal{C}$ est limite inductive filtrante de catégorie $\mathcal{C}_i$ et que T_i est le foncteur naturel de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}$, les morphismes (8.6.2) induisent un isomorphisme

$$\varinjlim \Lambda(\omega_1 \circ T_i, \omega_2 \circ T) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\omega_1, \omega_2)\,. \tag{8.6.3}$$

(iv) Soient $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille finie de catégories, ω_j^i de source $\mathcal{C}_i$ ($i \in I$, $j = 1, 2$), $\mathcal{C}$ le produit des $\mathcal{C}_i$ et $\bigotimes_i \omega_j^i$ le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$ produit tensoriel des ω_j^i : $(\bigotimes_i \omega_j^i)((C_i)) = \bigotimes_i \omega_j^i(C_i)$. On a

$$\bigotimes_i \Lambda(\omega_1^i, \omega_2^i) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\bigotimes_i \omega_1^i, \bigotimes_i \omega_2^i)\,. \tag{8.6.4}$$

8.7 *Vérification de* 8.5(ii) *(parallèle à* 4.11*)*. Soit $L := M_A^\vee \underset{A}{\otimes}{}_A M$. Par 8.2, L coagit sur les $\omega(E)$. La propriété universelle de $\Lambda(\omega)$ fournit $\Lambda(\omega) \longrightarrow L$. Appliquant 8.6(ii) à la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ réduite à A, on obtient $L \to \Lambda(\omega)$ (8.5(ii) pour $\mathcal{D}$) et on vérifie que le composé $L \to \Lambda(\omega) \to L$ est l'identité. Prouvons que $L \to \Lambda(\omega)$ est un épimorphisme, i.e. que pour tout E dans $\mathcal{C}$, l'image de $\omega(E)^\vee \otimes \omega(E)$ dans $\Lambda(\omega)$ est contenue dans celle de $\omega(A)^\vee \otimes \omega(A)$. Soit u un epimorphisme $A^n \to E$, de composantes u_i. Les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\omega(E)^\vee \otimes \omega(A) \arrow[r, "t_{u_i}"] \arrow[d, "u_i"] & \omega(A)^\vee \otimes \omega(A) \arrow[d] \\
\omega(E)^\vee \otimes \omega(E) \arrow[r] & \Lambda(\omega)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs et on conclut en observant que la somme

$$\bigoplus_i \omega(E)^\vee \otimes \omega(A) \to \omega(E)^\vee \otimes \omega(E)$$

est un épimorphisme.

8.8. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux catégories abéliennes k-linéaires vérifiant (2.12.1), $\omega_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{T}$ k-linéaire et exact à droite, et $\omega : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \mathcal{T}$ k-linéaire et exact à droite défini par

$$\omega(X_1 \underset{k}{\otimes} X_2) = \omega_1(X_1) \otimes \omega_2(X_2).$$

Appliquant 8.6(ii) à $\otimes : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, on obtient

$$\Lambda(\omega_1) \otimes \Lambda(\omega_2) \underset{8.6(\mathrm{ii})}{=} \Lambda(\omega_1(X_1) \otimes \omega_2(X_2)) \longrightarrow \Lambda(\omega). \tag{8.8.1}$$

Ce morphisme est un isomorphisme. Pour le vérifier, on écrit $\mathcal{A}_i = \varinjlim \langle X_i \rangle$ (X_i dans $\mathcal{A}_i$) et on se ramène par 5.1 et 8.6(iii) à supposer $\mathcal{A}_i = \langle X_i \rangle$, donc que $\mathcal{A}_i$ est de la forme $(A_i)_{\mathrm{coh}}$ avec A_i de dimension finie sur k. Le foncteur ω_i s'écrit $E \mapsto E \underset{A_i}{\otimes} M_i$, avec M_i un objet de $\mathcal{T}$ muni d'une structure de A_i-module. On a $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = (A_1 \otimes A_2)_{\mathrm{coh}}$, ω est $\otimes_{A_1 \otimes A_2}(M_1 \otimes M_2)$ et le morphisme s'identifie à l'isomorphisme évident

$$(M_1^\vee \underset{A_1}{\otimes} M_2) \otimes (M_2^\vee \underset{A_2}{\otimes} M_2) \xrightarrow{\sim} (M_1 \otimes M_2)^\vee \underset{A_1 \otimes A_2}{\otimes} (M_1 \otimes M_2).$$

8.9 (parallèle à 6.3). Soient $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trois catégories et ω_1^i (resp. ω_2^i) un foncteur de $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{T}$. Supposons donné un foncteur $\otimes : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ et, pour $j = 1, 2$ un isomorphisme de foncteurs

$$\omega_j^1(X_1) \otimes \omega_j^2(X_2) \xrightarrow{\sim} \omega_j^3(X_1 \otimes X_2).$$

Appliquant 8.6(ii)(iv), on obtient un produit

$$\Lambda(\omega_1^1, \omega_2^1) \otimes \Lambda(\omega_1^2, \omega_2^2) \longrightarrow \Lambda(\omega_1^3, \omega_2^3). \tag{8.9.1}$$

caractérisé par l'exigence que, quels que soient X_1 et X_2 dans $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, le morphisme (8.4.1)

$$\omega_2^3(X_1 \otimes X_2) \longrightarrow \omega_1^2(X_1 \otimes X_2) \otimes \Lambda(\omega_1^3, \omega_2^3)$$

se déduit des morphismes analogues pour les $\omega_1^i(X_i)$ et $\omega_2^i(X_i)$ $(i = 1, 2)$ par (8.9.1).

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie à produit tensoriel vérifiant (1.1.1) et ω_1, ω_2 deux $\otimes$-foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{T}$. Faisons $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ et $\omega_j^i = \omega_j$ $(i = 1, 2, 3)$. Le produit (8.9.1) devient un produit

$$\Lambda(\omega_1, \omega_2) \otimes \Lambda(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \Lambda(\omega_1, \omega_2). \tag{8.9.2}$$

La même preuve qu'en 6.4 donne

8.10 **Proposition.** *Le produit (8.9.2) est associatif, commutatif et à unité.*

Pour $T = \mathrm{Sp}(B)$ un schéma affine en $\mathcal{T}$ et ω un $\otimes$ foncteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{T}$, notons ω_T le $\otimes$-foncteur $A \mapsto \omega(A) \otimes B$ de $\mathcal{A}$ dans les modules sur T. La preuve de 6.6 donne

8.11 **Proposition.** *Sous les hypothèses de 8.9.2,*
(i) *Le $\mathcal{T}$-schéma* $\mathrm{Sp}\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ *représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_2)$ *qui au $\mathcal{T}$-schéma affine T attache l'ensemble des morphismes de $\otimes$-foncteurs de ω_{1T} dans ω_{2T}.*
(ii) *Si $\mathcal{A}$ vérifie (1.1.1) et (1.1.2), tout morphisme $\omega_{1T} \to \omega_{2T}$ comme en (i) est un isomorphisme:* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_2)$ *coïncide avec* $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_2)$.
(iii) *Etant donnés trois $\otimes$-foncteurs $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ la composition*
$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_2) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_2,\omega_3) \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_3)$ *est définie par (8.4.2).*

8.12. Prenons pour $\mathcal{A}$ la catégorie $\mathcal{T}$ et pour foncteurs ω_1 et ω_2 le foncteur identique. Posons $\Lambda = \Lambda(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}})$. D'après 8.11, $\mathrm{Sp}(\Lambda)$ est le $\mathcal{T}$-groupe qui représente le foncteur qui à $T = \mathrm{Sp}(B)$ attache le groupe des automorphismes de $\otimes$-foncteur du foncteur $X \mapsto X_T = X \otimes B$ de $\mathcal{T}$ dans les modules sur T.

8.13 *Définition. Le $\mathcal{T}$-groupes* $\mathrm{Sp}(\Lambda)$ *construit en 8.12 est le* *__groupe fondamental__* *de $\mathcal{T}$. On le note $\pi(\mathcal{T})$.*

Si ω est un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur un schéma S sur k, $\omega(\pi(\mathcal{T}))$ est un schéma en groupes affines sur S. L'action donnée par (8.4.1) de $\pi(\mathcal{T})$ sur chaque X de $\mathcal{T}$ définit une action de $\omega(\pi(\mathcal{T}))$ sur les $\omega(X)$. Cette action est fonctorielle et compatible au produit tensoriel. Comparant 4.7 et 8.2–8.4, on trouve que

$$\omega(\pi(\mathcal{T})) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_S(\omega)\,. \tag{8.13.1}$$

A. Grothendieck compare cette situation à la suivante: pour X un espace topologique localement connexe et localement simplement connexe, les groupes fondamentaux $\pi_1(X,x)$ forment un système local sur X, i.e. un objet en groupes de la catégorie des faisceaux localement constants sur X. Ce faisceau de groupes agit sur tout faisceau localement constant. Sa fibre $\pi_1(X,x)$ en x est le groupe des automorphismes du foncteur "fibre en x" :

$$\text{(faisceaux localement constants)} \longrightarrow \text{(Ens)}\,.$$

8.14 *Exemple.* (i) Pour $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne, la donnée d'un $\mathcal{T}$-groupe G équivaut par $G \mapsto (\omega(G))$ à la donnée, pour tout foncteur fibre ω sur tout schéma S sur k, d'un schéma en groupes affines G_ω sur S, de formation compatible à tout changement de base S'/S. Le groupe fondamental $\pi(\mathcal{T})$ est donné par

$$\omega \longmapsto \underline{\mathrm{Aut}}_S(\omega).$$

(ii) Cas particulier: si $\mathcal{T} = \mathrm{Rep}(G)$, un $\mathcal{T}$-groupe s'identifie à un schéma en groupes affines sur k, muni d'une action de G. Le schéma en groupe G, muni de son action sur lui-même par automorphismes intérieurs, corrrespond à $\pi(\mathrm{Rep}(G))$.
(iii) Pour G le groupe trivial, on trouve que $\pi(\mathrm{Vect}\, k)$ est le groupe trivial.
(iv) Prenons pour $\mathcal{T}$ la catégorie des super-espaces vectoriels de dimension finie sur k (1.4). Regardons le k-schéma en groupes μ_2 des racines carrées de l'unité comme un $\mathcal{T}$-groupe (*cf* 7.11). Il agit sur chaque super-espace vectoriel par l'action "parité": $(\epsilon, a) \mapsto \epsilon^{\deg a}.a$ pour a homogène, et on vérifie que

$$\pi(\mathcal{T}) = \mu_2.$$

8.15 *Fonctorialité.* Soit $\eta : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ un $\otimes$-foncteur exact k-linéaire entre catégories tensorielles sur k. Faisant $T = \eta$ dans 8.6(i), on obtient

$$\mathrm{Sp}(\Lambda(\eta)) = \eta(\pi(\mathcal{T}_1)) \tag{8.15.1}$$

et le $\mathcal{T}_2$-schéma en groupes affines $\eta(\pi(\mathcal{T}_1))$ représente le foncteur $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\eta)$: $T = \mathrm{Sp}(B) \mapsto$ automorphismes du $\otimes$-foncteur $X \mapsto \eta_T(X) = \eta(X) \otimes B$ de $\mathcal{T}_1$ dans les modules sur T. Faisant $T = \eta$ dans 8.6(ii), on obtient un morphisme

$$\pi(\mathcal{T}_2) \longrightarrow \eta(\pi(\mathcal{T}_1)) \tag{8.15.2}$$

Le morphisme de foncteurs correspondant attache à un automorphisme du foncteur
$X \mapsto X_T = X \otimes B$ l'automorphisme qu'il induit de son composé avec η.

8.16. *Produit.* Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux catégories tensorielles sur k. On suppose que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ vérifient (2.12.1) et que $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est encore tensorielle sur k. On identifie $\mathcal{T}_1$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ stable par sous-quotients par

$$\begin{aligned} \mathrm{inj}_1 : \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathrm{Vect}(k) &\longrightarrow \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \\ X &\longmapsto X \underset{k}{\otimes} 1 \end{aligned}$$

(appliquer 2.9 et 5.14(i)). De même pour $\mathcal{T}_2$. Le produit tensoriel

$$\otimes_k : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$$

est le composé du produit tensoriel dans $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ et de $(\mathrm{inj}_1, \mathrm{inj}_2)$:

$$X_1 \underset{k}{\otimes} X_2 = \mathrm{inj}_1(X_1) \otimes \mathrm{inj}_2(X_2)\ .$$

Par 8.8 appliqué au foncteur identique de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ dans $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, $\pi(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$ est le Sp de $\Lambda(\underset{k}{\otimes} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$. Par 8.6(iv), ce Λ est le produit tensoriel des $\Lambda(\mathrm{inj}_i : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ qui, par 8.6(i) pour $T = \mathrm{inj}_i$ et $\omega = \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}$ coïncident avec $\mathrm{inj}_i\, \Lambda(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}})$. On conclut que les morphismes (8.15.2) (pour $\eta = \mathrm{inj}_i$)

$$\pi(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \longrightarrow \mathrm{inj}_i\, \pi(\mathcal{T}_i)$$

définissent un isomorphisme

$$\pi(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{inj}_1(\pi(\mathcal{T}_1)) \times \mathrm{inj}_2(\pi(\mathcal{T}_2))\,. \tag{8.16.1}$$

8.17 **Théorème.** *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux catégories tensorielles sur k vérifiant (2.12.1) et η un $\otimes$-foncteur exact de $\mathcal{T}_1$ dans $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_2$ est encore tensorielle sur k (cf 8.1). Le $\otimes$-foncteur induit par η, de $\mathcal{T}_1$ dans la catégorie des objets de $\mathcal{T}_2$ munis d'une action de $\eta(\pi(\mathcal{T}_1))$ telle que l'action naturelle de $\pi(\mathcal{T}_2)$ s'en déduise par (8.15.2), est une équivalence de catégories.*

La preuve sera donnée en 8.26.

Prenant pour $\mathcal{T}_1$ la catégorie Vect(k) des multiples de 1, on obtient par 8.14(iii).

8.18 **Corollaire.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k. On suppose que $\mathcal{T}$ vérifie (2.12.1) et que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est encore tensorielle sur k. Alors, pour* *que X dans $\mathcal{T}$ soit une somme de copies de 1, il faut et il suffit $\pi(\mathcal{T})$ agisse trivialement sur X.*

Si on prend pour $\mathcal{T}_2$ la catégorie Vect(k), on retrouve le fait qu'un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ sur k induit une équivalence $\mathcal{T} \to \operatorname{Rep}\underline{\operatorname{Aut}}(\omega)$, puisque $\omega(\pi(\mathcal{T})) = \underline{\operatorname{Aut}}(\omega)$.

8.19. Un autre cas intéressant est celui où $\mathcal{T}_2$ est la catégorie 1.4 des super-espaces vectoriels de dimension finie. On a $\pi(\mathcal{T}_2) = \mu_2$ (8.14(iv)). Soit G est un super groupe affine, i.e. un $\mathcal{T}_2$-groupes, muni de $p : \mu_2 \to G$ tel que l'action par automorphismes intérieurs de μ_2 sur l'algèbre affine de G soit l'action "parité" (8.14(iv)). La catégorie des super-espaces vectoriels V de dimension finie, munis d'une action ρ de G telle que $\rho \circ p$ soit l'action "parité" est une catégorie tensorielle $\operatorname{Rep}(G, p)$ sur k. D'après 8.17, toute catégorie tensorielle $\mathcal{T}$ sur k, muni d'un $\otimes$-foncteur exact

$$\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \text{(super-espaces vectoriels)}$$

est ainsi obtenue: on a une équivalence

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Rep}(\omega(\pi(\mathcal{T})), p \text{ donné par } (8.15.2)).$$

8.20. Soient k un corps, $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne vérifiant (2.12.1) et ω_0 un foncteur k-linéaire exact à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{T}$. La catégorie $\mathcal{A}$ est limite inductive filtrante de ses sous-catégories $\langle X \rangle$, et chacune est équivalente à une catégorie $(A)_{\mathrm{coh}}$ pour A une k-algèbre de rang fini. Par (5.1) et 5.11, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ existe:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{T} = \varinjlim \langle X \rangle \otimes \mathcal{T}.$$

Le foncteur $\mathcal{A} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} : (A, T) \mapsto \omega_0(A) \otimes T$ est exact à droite et se factorise donc uniquement par

$$\omega : \mathcal{A} \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}.$$

On a

$$L(\omega_0) = \varinjlim L(\omega_0 \mid \langle X \rangle).$$

Par définition des Ind-objets, on a pour T dans $\mathcal{T}$

$$\operatorname{Hom}(T, T \otimes L(\omega_0)) = \varinjlim \operatorname{Hom}(T, T \otimes L(\omega_0 \mid \langle X \rangle))$$

et la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une coaction de $L(\omega_0)$ est la limite inductive des catégories analogues pour les $L(\omega_0 \mid \langle X \rangle)$. Appliquant 8.3 et 8.5(ii), on obtient

8.21 **Proposition.** *Avec les hypothèses et notations de 8.19, si $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est tensorielle et que $\omega_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ est exact et fidèle, le foncteur ω induit une équivalence de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une coaction de $L(\omega_0)$.*

En particulier, par (8.15.1)

8.22 **Proposition.** *Soit $\omega_0 : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}$ un $\otimes$-foncteur exact k-linéaire entre catégories tensorielles sur k. Si $\mathcal{T}_1$ vérifie (2.12.1) et que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est tensorielle, le foncteur $\omega : \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que $\omega(T_1 \underset{k}{\otimes} T) = \omega_0(T_1) \otimes T$ induit une équivalence de $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une action de $\omega_0(\pi(\mathcal{T}_1))$.*

Supposons que $\mathcal{T}$ vérifie (2.12.1) et faisons $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$. Prenons pour foncteur ω_0 le foncteur identique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$. On obtient

8.23 **Corollaire.** *Supposons que $\mathcal{T}$ vérifie (2.12.1) et que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est tensorielle. Le foncteur $\omega : \mathcal{T} \underset{k}{\otimes} \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que $\omega(X \underset{k}{\otimes} Y) = X \otimes Y$ induit une équivalence de $\mathcal{T} \underset{k}{\otimes} \mathcal{T}$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une action de $\pi(\mathcal{T})$; l'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur $\omega(X \underset{k}{\otimes} Y) = X \otimes Y$ est celle déduite de son action sur X.*

8.24 **Preuve de 8.18.** La sous-catégorie $\mathrm{Vect}(k) \subset \mathcal{T}$ (2.9) est stable par sous-quotient et

$$\mathrm{Vect}(k) \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$$

est donc pleinement fidèle d'image essentielle stable par sous-quotients (5.14(i)). Le groupe $\pi(\mathrm{Vect}(k))$ est trivial et comparant 8.22 pour $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Vect}(k)$ et $\mathcal{T}$, on trouve que l'équivalence 8.23 de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ avec les objets de $\mathcal{T}$ à action de $\pi(\mathcal{T})$ identifie $\mathrm{Vect}(k) \otimes \mathcal{T}$ à la sous-catégorie des objets de $\mathcal{T}$ à action triviale. En particulier, pour X dans $\mathcal{T}$, $X \otimes 1$ est dans $\mathrm{Vect}(k) \otimes \mathcal{T}$ si et seulement si l'action naturelle de $\pi(\mathcal{T})$ sur X est triviale. D'après 5.14(ii), pour que $X \otimes 1$ soit dans $\mathrm{Vect}(k) \otimes \mathcal{T}$, il faut et il suffit que X soit dans $\mathrm{Vect}(k)$ et 8.18 en résulte.

8.25 **Corollaire.** *Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux catégories tensorielles sur k vérifiant (2.12.1) et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. On suppose $\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}$ tensorielles. Le foncteur $inj_1 : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 : X \mapsto X \underset{k}{\otimes} 1$ est une équivalence de $\mathcal{T}_1$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ sur lesquels $inj_2(\pi(\mathcal{T}_2))$ agit trivialement.*

Puisque $\pi(\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{inj}_1\pi(\mathcal{T}_1) \times \mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T}_2)$, on a une inclusion $\mathrm{inj}_j\pi(\mathcal{T}_j) \to \pi(\mathcal{T})$; via cette inclusion, $\mathrm{inj}_j\pi(\mathcal{T}_j)$ agit sur les objets de $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. C'est de cette action qu'il est question dans le corollaire.

Preuve. Si un $\mathcal{T}$-groupe G agit sur un objet T de $\mathcal{T}$, $G = \mathrm{Sp}(B)$, l'action de G est un morphisme $\rho : T \to T \otimes B$. L'unité de $B : 1 \to B$ définit une autre flèche $\otimes 1 : T \to T \otimes B$. Soit T^G le noyau de la double flèche $(\rho, \otimes 1)$. C'est un Ind-objet de $\mathcal{T}$, et un sous-objet de T. Parce que $\mathcal{T}$ est noethérienne (5.13.2), tout Ind-objet de $\mathcal{T}$ est réunion croissante de ses sous-objets dans $\mathcal{T}$. Un Ind-objet, qui est sous-objet d'un objet de $\mathcal{T}$, est donc dans $\mathcal{T}$ et T^G est dans $\mathcal{T}$.

Appliquons 8.18. Le foncteur $\mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_2 : Y \mapsto Y^{\pi(\mathcal{T}_2)}$ se factorise par $\mathrm{Vect}(k)$ et est exact à gauche. Il définit un foncteur exact à gauche $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ se factorisant par $\mathcal{T}_1 \otimes \mathrm{Vect}(k) = \mathcal{T}_1$. Ce foncteur coïncide avec $T \mapsto T^{\mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T}_2)}$: il suffit de le vérifier après composition après $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, et que

$$(X_1 \underset{k}{\otimes} X_2)^{\mathrm{inj}\pi(\mathcal{T}_2)} = X_1 \underset{k}{\otimes} X_2^{\mathrm{inj}\pi(\mathcal{T}_2)}$$

résulte de l'exactitude de $\otimes_k$. En particulier, si T est fixe par $\mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T}_2)$, T est dans l'image de $\mathcal{T}_1$. La réciproque est claire.

8.26 **Preuve de 8.17.** On sait déjà (8.22) que

$$\eta \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \longrightarrow (\eta\pi(\mathcal{T}_1) - \text{objets de } \mathcal{T}_2)$$

est une équivalence. En particulier, $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est tensorielle. Soient X dans $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Il est muni d'une action (ρ_1, ρ_2) de $\mathrm{inj}_1\pi(\mathcal{T}_1) \times \mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T}_2)$. Son image $(\eta \otimes \mathrm{Id})(X)$ dans $\mathcal{T}_2$ est munie d'une action ρ de $\pi(\mathcal{T}_2)$. Cette action est le produit des actions – qui commutent – suivantes: ρ_1', déduit par(8.15.2) $\pi(\mathcal{T}_2) \to \eta\pi(\mathcal{T}_1)$ de l'action de $\eta\pi(\mathcal{T}_1)$, et ρ_2', déduit de l'action ρ_2. Tout objet de $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}$ étant quotient d'un $T_1 \underset{k}{\otimes} T$, il suffit de le vérifier dans le cas – laissé au lecteur – où $X = T_1 \underset{k}{\otimes} T_2$.

Le foncteur $\eta \otimes \mathrm{Id}$ transforme donc l'action de $\mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T})$ sur X en la différence entre deux actions de $(\eta\otimes\mathrm{Id})\circ\mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T}) = \pi(\mathcal{T})$ sur $(\eta\otimes\mathrm{Id})(X)$. L'action naturelle, et l'action via (8.15.2): $\pi(\mathcal{T}) \to \eta\pi(\mathcal{T}_1)$. Pour que l'action de $\mathrm{inj}_2\pi(\mathcal{T})$ sur X soit triviale (i.e que X soit dans $\mathcal{T}_1$) il faut et suffit que son image par $\eta \otimes \mathrm{Id}$ le soit, et 8.17 résulte de 8.25.

9. Corps différentiels

9.1. Soit (K, ∂) un corps différentiel: un corps commutatif de caractéristique 0, muni d'une dérivation $\partial : K \to K$. Le *corps des constantes* k est $k := \ker(\partial)$. Une *connexion* ∇ sur un espace vectoriel V sur K, supposé de dimension finie, est $\nabla : V \to V$, additif et vérifiant l'identité de Leibniz

$$\nabla(\lambda v) = \partial\lambda . v + \lambda\nabla v .$$

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels à connexion est défini par

$$\nabla(v_1 \otimes v_2) = (\nabla v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\nabla v_2) .$$

Pour ce produit tensoriel, et ses données évidentes d'associativité et de commutativité, la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces vectoriels de dimension finie sur K munis d'une connexion est une catégorie tensorielle sur k. L'objet unité est (K, ∂) et $k = \mathrm{End}(K, \partial)$. Le foncteur ω de $\mathcal{T}$ dans les espaces vectoriels sur K: "oubli de ∇" est un foncteur fibre. La catégorie $\mathcal{T}$ est donc tannakienne.

Soit (X, ∇) dans $\mathcal{T}$. Comme en 6.16, on notera $\langle X\rangle_\otimes$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ d'objets les sous-quotients de sommes de $X^{\otimes n} \otimes X^{\vee\otimes m}$. C'est encore une catégorie tannakienne.

9.2. Supposons que $\omega_0 : \langle X\rangle_\otimes \to \mathrm{Vect}(k)$ soit un foncteur fibre. Si k est algébriquement clos, un tel foncteur fibre existe (6.20) et est unique à isomorphisme (non unique) près car tout $\underline{\mathrm{Aut}}(\omega_0)$-torseur sur k est trivial.

Soient $G := \underline{\mathrm{Aut}}(\omega_0) \subset GL(\omega_0(X))$, G_K déduit de G par extension des scalaires à K et P le G_K-torseur $\underline{\mathrm{Isom}}_K(\omega_0 \underset{k}{\otimes} K, \omega \mid \langle X\rangle_\otimes)$. C'est un sous-schéma du $GL(\omega_0(X))$-torseur des isomorphismes K-linéaires $\omega_0(X)\underset{k}{\otimes} K \xrightarrow{\sim} X$.

Ce torseur est muni d'une connexion, redonnant la connexion de $(W\underset{k}{\otimes} K)^P \in \mathrm{Ob}\langle X\rangle_\otimes$ pour W une représentation de $\underline{\mathrm{Aut}}(\omega_0)$. Pour le voir, le plus simple est d'interpréter la dérivation ∂ comme un automorphisme infinitésimal: pour $K[\epsilon]$ les nombres duaux ($\epsilon^2 = 0$), ∂ définit l'automorphisme $k[\epsilon]$ linéaire de $K[\epsilon]$: $\exp(\epsilon\partial) : \lambda+\mu\epsilon \to \lambda+(\partial\lambda+\mu)\epsilon$. Une connexion sur un objet sur K (espace vectoriel, torseur ...) s'interprète comme un automorphisme $\exp(\epsilon\partial)$-linéaire de l'objet sur $K[\epsilon]$ s'en déduisant par extension des scalaires. La connexion de chaque $\omega(W)$ (W dans $\langle X\rangle_\otimes$) définit une connexion sur $\omega \mid \langle X\rangle_\otimes$ et, par transport de structure, sur P.

La connexion de P peut aussi être vue comme une dérivation de $\Gamma(P,\mathcal{O})$. Le schéma P est un sous-schéma du schéma vectoriel défini par le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(\omega_0(X)\otimes K, X)$. La connexion de X (et la connexion de $\omega_0(X)\otimes K$ avec les $a \in \omega_0(X)$ horizontaux) définissent sur cet espace vectoriel une connexion qui induit celle de P. Sur l'espace $\Gamma(P,\mathcal{O})\otimes X$ des morphismes de P dans X, on définit ∇ par $\nabla(f\otimes x) = \nabla f\otimes x + f\otimes\nabla x$. Pour $a\in\omega_0(X)$, le morphisme $p\mapsto p(a)$ est horizontal.

9.3 **Proposition**. *Avec les notations précédentes,*
(i) *Le schéma P sur K est lisse et connexe.*
(ii) *Soit $k(P)$ le corps des fonctions rationnelles sur P. Le corps des constantes de ce corps différentiel est k.*

Preuve. Le schéma P est lisse car c'est un torseur sous le groupe algébrique G_K sur K.

Le foncteur $W \mapsto (W\underset{k}{\otimes}K)^P$ est une équivalence de catégories $\mathrm{Rep}(G) \to \langle X\rangle_\otimes$. En particulier, si $(V,\nabla) = (W\underset{k}{\otimes}K)^P$, les sous-espaces vectoriels de V stable sous ∇ sont les $(W'\underset{k}{\otimes}K)^P$ pour $W'\subset W$ G-stable. Le k-vectoriel V^∇ des vecteurs horizontaux: $\nabla v = 0$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(1,V)$ (par $f\mapsto f(1)$) et donc à W^G. Par passage à la limite inductive, les même résultats valent pour une représentation de G non nécessairement de dimension finie. A une telle représentation correspond un espace vectoriel à connexion, réunion filtrante de sous-espaces de dimension finie stables par ∇ et dans $\langle X\rangle_\otimes$.

Prenons pour W la représentation régulière de G : $\Gamma(G,\mathcal{O})$ sur lequel G agit par translations à gauche: $f(x)\mapsto f(g^{-1}x)$. Le V obtenu est $\Gamma(P,\mathcal{O})$, muni de ∇. Sur G, les seules fonctions invariantes par translation sont les constantes, et les seules sous-schémas fermés invariants par translations sont $\emptyset$ et G. On obtient

$$k \xrightarrow{\sim} \Gamma(P,\mathcal{O})^\nabla\ ; \tag{9.3.1}$$

(9.3.2) un idéal $I\subset\Gamma(P,\mathcal{O})$, stable par ∇, est trivial: $I=\Gamma(P,\mathcal{O})$ ou 0.

Si P n'était pas connexe, il y aurait dans $\Gamma(P,\mathcal{O})$ des idempotents non triviaux – nécessairement horizontaux – et ceci contredirait (9.3.1). Ceci prouve (i).

Prouvons (ii). On ne peut pas directement appliquer le même argument (9.3.1) à $k(P)$, car $k(G)$ n'est pas une représentation du groupe algébrique G, seulement de $G(k)$. Soit $f \in k(P)$ avec $\nabla f = 0$. Soit $I \subset \Gamma(P,\mathcal{O})$ l'idéal des g tels que $gf \in \Gamma(P,\mathcal{O})$. Si $gf \in \Gamma(P,\mathcal{O})$, on a $\nabla(gf) = \nabla(g).f \in \Gamma(P,\mathcal{O})$ et l'idéal I est donc stable par ∇. Par (9.3.2), on a $I = \Gamma(P,\mathcal{O})$ et donc $f \in \Gamma(P,\mathcal{O})$. On conclut par (9.3.1).

9.4. Une *extension de Picard-Vessiot* de K, pour (X,∇), est un corps différentiel (L,∂) extension de (K,∂) tel que

(a) $X \underset{K}{\otimes} L$ est engendré sur L par ses vecteurs horizontaux;

(b) L est engendré par les coordonnées, dans une base de X sur K, des vecteurs horizontaux de $X \underset{K}{\otimes} L$, et

(c) le corps des constantes de L est k.

La propriété de (V,∇) : "$V \underset{K}{\otimes} L$ est engendré sur L par ses vecteurs horizontaux" est stable par produits tensoriels et sous-quotients. Si elle est vérifiée pour V, on a

$$(V \underset{K}{\otimes} L)^{\nabla} \underset{L^{\nabla}}{\otimes} L \xrightarrow{\sim} V \underset{K}{\otimes} L$$

et en particulier, si k est le corps des constantes de L,

$$(V \underset{K}{\otimes} L)^{\nabla} \underset{k}{\otimes} L \xrightarrow{\sim} V \underset{K}{\otimes} L. \tag{9.4.1}$$

Si (L,∂) est une extension de Picard-Vessiot de K, pour (X,∇), le foncteur

$$\omega_L : \langle X\rangle_{\otimes} \longrightarrow \mathrm{Vect}(k) : V \longmapsto (V \underset{K}{\otimes} L)^{\nabla}$$

est donc un foncteur fibre.

Sur L, on dispose de l'isomorphisme (9.4.1) entre les foncteurs fibres déduit de ω_L et ω : un K-morphisme

$$\mathrm{Spec}(L) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_K^{\otimes}(\omega_L \underset{k}{\otimes} K, \omega \mid \langle X\rangle_{\otimes}). \tag{9.4.2}$$

9.5 **Proposition**. *Avec les notations précédentes, (9.4.1) identifie L au corps des fonctions rationnelles de $\underline{\mathrm{Isom}}_K^{\otimes}(\omega_L \underset{k}{\otimes} K, \omega \mid \langle X\rangle_{\otimes})$.*

Preuve. Soient $G = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_L)$ et P le G_K-torseur $\underline{\mathrm{Isom}}(\omega_L \underset{k}{\otimes} K, \omega \mid \langle X \rangle_{\otimes})$. Le morphisme (9.4.2), en termes d'anneaux, est

$$\Gamma(P, \mathcal{O}) \longrightarrow L. \tag{9.5.1}$$

Le noyau I de ce morphisme est un idéal ∇-stable. Par (9.3.2), $I = 0$ et (9.5.1) est injectif. Le G-torseur P est contenu dans le $GL(\omega_L(X))$-torseur $\underline{\mathrm{Isom}}(\omega_L \underset{k}{\otimes} K, X)$ et que $\Gamma(P, \mathcal{O})$ engendre L exprime 9.4(b).

9.6.*Scholie.* Si $\omega_0 : \langle X \rangle_{\otimes} \to \mathrm{Vect}(k)$ est un foncteur fibre, le torseur P de 9.5 a pour corps de fonctions rationnelles $k(P)$ une extension de Picard-Vessiot de K : pour V dans $\langle X \rangle_{\otimes}$ et $a \in \omega_0(X)$, $p(a)$ est une section horizontale de V sur P, d'où

$$a \longmapsto p(a) \; : \omega_0(V) \xrightarrow{\sim} (V \otimes L)^{\nabla} \tag{9.6.1}$$

$$\omega_k(V) \underset{k}{\otimes} L \xrightarrow{\sim} V \otimes L. \tag{9.6.2}$$

Pour $V = X$, ceci fournit (a), l'assertion (b) résulte de ce que $P \hookrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_K^{\otimes}(\omega_0(X), X \otimes K)$ et (c) est 9.3(ii). Par (9.6.1), ω_0 est canoniquement isomorphe à ω_L (6.4). Ceci, et 9.4, donnent un dictionnaire entre extensions de Picard-Vessiot pour (X, ∇) et foncteurs fibres pour $\langle X \rangle_{\otimes}$.

9.7 **Corollaire.** *Si k est algébriquement clos, il existe une extension de Picard-Vessiot L pour (X, ∇). Elle est unique à isomorphisme (non unique) près.*

Soit $G := \underline{\mathrm{Aut}}(\omega_L)$. Le groupe des K-automorphismes différentiels de L est $G(k)$: G est le groupe de Picard-Vessiot. Voir I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris 1957.

9.8 *Remarque.* Soient $(e^i)_{1 \le i \le n}$ une base de X et $\nabla e^i = \sum_j c_j^i e^j$. Soit M une extension différentielle de K. Pour que $\sum y_i e^i \in X \underset{K}{\otimes} M$ soit horizontal, if faut et suffit que les y_i vérifient le système

$$\partial y_i = -\sum y_j c_j^i. \tag{9.8.1}$$

Plutôt que d'une extension de Picard-Vessiot pour X, on parle classiquement d'une extension de Picard-Vessiot pour un système (9.8.1): une extension différentielle de L, engendrée par des $y_{i\alpha}$, formant n solutions linéairement indépendentes de (9.8.1) et de même corps de constantes que K.

Plus classiquement encore, on considère des équations différentielles linéaires du n$^{\text{ième}}$ ordre en une indéterminée y. On passe de là à un système par l'astuce habituelle: passer au système vérifié par $(y, \partial y, \partial^2 y, \cdots, \partial^{n-1} y)$.

9.9 *Remarque.* Plus généralement, soient K un corps de caractéristique 0, $\mathcal{D}$ un espace vectoriel sur K et $[\,,\,]$ un crochet de Lie sur $\mathcal{D}$. On ne le suppose pas K-linéaire, mais on suppose qu'il existe $\theta : \mathcal{D} \to \mathrm{Der}(K, K)$ (linéaire et morphisme de Lie) vérifiant

$$(9.9.1) \qquad [D_1, \lambda D_2] - \lambda[D_1, D_2] = \theta_{D_1}(\lambda) D_2 \ .$$

Le *corps des constantes* k est l'intersection des noyaux des $\theta(D)$ $(D \in \mathcal{D})$. Une *connection intégrable* sur un K-espace vectoriel V est une action de Lie ∇ de $\mathcal{D}$ sur V vérifiant

$$\nabla_D(\lambda v) = \theta_D(\lambda).v + \lambda.\nabla_D v \ .$$

Les K-espaces vectoriels de dimension finie à connection intégrable (V, ∇) forment une catégorie tannakienne sur k.

Une *extensions différentielle* de $(K, \mathcal{D})$ est $(L, \mathcal{D}')$ avec L extension de K, muni de $L \underset{k}{\otimes} \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$ compatible aux actions θ de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sur K et L. Une *extension de Picard-Vessiot* de $(K, \mathcal{D})$, pour (V, ∇), est une extension différentielle $(L, \mathcal{D}')$ de $(K, \mathcal{D})$, de même corps de constantes, telle que $L \underset{K}{\otimes} V$ soit engendré par ses vecteurs horizontaux (annulés par les ∇_D) et que L soit engendré par les coordonnées, dans une base de V sur K, des vecteurs horizontaux de $V \underset{K}{\otimes} L$. Comme en 9.6, les extensions de Picard-Vessiot correspondent aux foncteurs fibres de $\langle V \rangle_{\otimes}$ sur k. En particulier, si k est algébriquement clos, elles existent et sont uniques à isomorphisme près.

Exemple: on prend pour K un corps aux dérivées partielles: muni de d dérivations ∂_i qui commutent. On prend pour $\mathcal{D}$ le K-espace vectoriel de base les ∂_i , pour $\theta : \partial_i \mapsto \partial_i$ et on définit $[\,,\,]$ par (9.9.1) et $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Index terminologique

anneau (algèbre): à unité	1.1
Barr-Beck (théorème de)	4.1
coaction(d'un cogèbroïde)	1.15
(d'une comonade)	4.1
cogèbroïde	1.15
(des k-endomorphismes de ω)	4.7
comonade	4.1
compact closed	2.5
contragrédient	2.4
contrainte d'associativité (commutativité)	1.2
d'unité	2.1.1
dimension	7.1
dual	2.2
fibre (foncteur –): $\otimes$-foncteur exact k-linéaire	1.9
fidèlement plat (dans $\mathcal{T}$)	7.7,7.8
$\otimes$-foncteur; morphisme de –	2.7
fppf : fidelèment plat de présentation finie	
fpqc : fidèlement plat quasi-compact	
gerbe	3.2
gerbe à lien affine	3.6
$\mathcal{T}$-groupe	7.8
(k-) groupoïde	1.6
Hom interne	2.2
Induit (groupoïde –)	1.6
Ind-objet	7.5
$\otimes$-isomorphisme (isomorphisme de foncteur fibres)	1.9, cf. 2.7
localement (dans $\mathcal{T}$): pour la topologie *fpqc*	7.8
module (sur un $\mathcal{T}$-schéma)	7.8
monoïdal (catégorie –)	2.2
puissance extérieure, symmétrique	
(dans une catégorie tensorielle)	7.1,7.8
(fidèlement) plat (dans une catégorie tensorielle)	7.7
représentation (d'un cogèbroïde)	1.15
(d'une catégorie fibrée, d'une gerbe)	3.2
(d'un groupoïde)	1.6
rigide	2.5
schéma affine en $\mathcal{T}$ = $\mathcal{T}$-schéma affine	7.8

Index des notations

Pour l'usage de Isom, Aut, avec $\otimes$ en exposant et k ou S en indice, voir 1.11. Pour Hom et End : 6.5.

ACU :	2.7
$(A - \mathcal{B})$, $(\mathcal{B} - A)$	5.10
coh : $(A)_{\mathrm{coh}}$	5.2
e à d : $\underline{\mathrm{Hom}}_{e \text{ à } d}$: catégorie de foncteurs exacts à droite	5.2
$\mathcal{G}_{S\,G}$, $\mathcal{G}^0_{S \cdot G}$	3.1
Ind$(\cdots)$: catégorie des ind-objets (cf. 7.5) de ...	
k : toujours commutatif	1.1
$L_k(\omega_1, \omega_2)$, $L_k(\omega)$	4.7
$\Lambda(\omega_1, \omega_2)$, $\Lambda(\omega)$ (dans $\mathcal{T}$)	8.4
"$\varinjlim$"	7.5
(P^t) (dans $\mathcal{T}$)	7.8
ptf : $(B\text{-mod})_{ptf}$: projectif de type fini	6.1
Sp$(\cdots)$	7.8
Rep(G)	1.5
Rep$(S : G)$	1.7
Rep$(\mathcal{G})$	3.2
$\mathcal{T}$-schéma affine, groupe	7.8
schéma vectoriel	7.10
Vect(k)	1.3
$\langle X \rangle$	5.12
$\langle X \rangle_{\otimes}$	6.16
$\Lambda_{\mathcal{T}}$	6.12
$\pi(\mathcal{T})$	8.13

sections globales d'un module sur un $\mathcal{T}$-schéma	7.8
$\mathcal{T}$-schéma vectoriel	7.10
super-	1.4
tannakien (catégorie –)	2.8
tensoriel (catégorie –)	1.2,2.1
(produit – de catégories abéliennes)	5.1
transitif (groupoïde –)	1.6
transposé	2.4
vide ($\mathcal{T}$-schéma – non –)	7.8

Bibliographie

[1] M. Artin, *Versal deformations and algebraic stacks*, Inv. math. **27** (1974) pp. 165–189.

[2] P. Deligne and J.S. Milne, *Tannakien categories in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Mathematics **900**, Springer Verlag, 1982, pp. 101–228.

[3] E.R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups,* Academic press, 1973.

[4] S. MacLane, *Natural associativity and commutativity*, Rice University Studies **49** (1963) pp. 28–46.

[5] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in math. **5** (Springer-Verlag 1971).

[6] S. Saavedra, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics **265**, Springer Verlag 1972.

Sigles

SGA : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie.

SGA 1: Revêtements étales et groupe fondamental: Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer Verlag, 1971.

SGA 3: Schémas en groupes, vol. 1: Lecture Notes in Mathematics **151**, Springer Verlag, 1970.

SGA 4: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, vol. 1: Lecture Notes in Mathematics **269**, Springer Verlag, 1972.

Juin 1990. Une approche toute différente de résultats proches de ceux du paragraphe 7 a été développée par S. Doplicher et J.E. Roberts (Ann. of Math. **130** p. 75–119 (1989) et Inv. Math. **98** p. 175–218 (1989)). Dans un langage un peu différent du leur : ils considèrent une catégorie tensorielle sur $\mathbb{R}, \mathcal{T}$, polarisée au sens de [6], et prouvent qu'elle est la catégorie des représentations d'un groupe compact munie de sa polarisation naturelle. Le début de leur preuve, parallèle au début du paragraphe 7, observe que la dimension de chaque objet est un entier ≥ 0 et que si $V_1, \ldots, V_k$ sont de dimension $n_1, \ldots, n_k$, il existe un $\otimes$-foncteur de la catégorie des représentations de $\Pi GL(n_i)$ dans $\mathcal{T}$ envoyant la représentation standard de $GL(n_i)$ sur V_i. Le premier point acquis, leur résultat pourrait être déduit de ceux du paragraphe 7 et de Saavedra (Chap VI). Leur preuve est toute différente.

Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey 08540