

Linear Algebra problem session for Final

Find orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$ wrt inner product

[5] M2 8:40

$$[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$v_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

want $v_2 \perp v_1$

$$[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$[2 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$v_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

want $v_3 \perp v_1, v_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$v_3 = [1 \ 1 \ -2]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz$$

	x	y	z
x	x^2	xy	xz
y	xy	y^2	yz
z	xz	yz	z^2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$v_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

$$v_3 = [1 \ 1 \ -2]$$

1	0	1	0
0	1	1	-2
0	0	1	-2

✓

1	1	-2
0	1	-2
0	0	1

✓

1	1	-2
0	1	-2
0	0	1

✓

F20 [8] $f(n) = \det nxn \text{ matrix like } \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ 0 & 3 & 1 & & \\ -4 & 0 & 3 & 1 & \\ & -4 & 0 & 3 & 1 \\ & & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

too hard for in-class final

2x2 J [2] from F13 set

$$f(0) = a \quad f(1) = b \quad f(n) = 6f(n-1) - 5f(n-2)$$

$$\begin{bmatrix} f(2) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) \\ f(0) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f(2) = 6f(1) - 5f(0) \\ f(1) = f(1) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

formula

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} r+s=6 & \text{trace}(A)=6 \\ rs=5 & \det(A)=5 \\ r,s=1,5 \end{matrix}$$

$$A^n =$$

λ	w	$A - \lambda I$	v
1	$\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} / 4 + 5^n \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} / 4$$

$$n=0 \quad \checkmark \quad I = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} / 4 + \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} / 4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} / 4$$

$$\begin{bmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \left(1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} / 4 + 5^n \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} / 4 \right) \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1^n}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-b+5a) + \frac{5^n}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} (b-a)$$

formula

$$F(n) = \frac{1}{4}(-b+5a) + \frac{5^n}{4}(b-a)$$

symmetric matrix



[7] Fall 2018 hw

Solve $y' = Ay$ where $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

row ③ = row ② - row ①
 A is singular
 $\lambda = 0$ sum = 3
 $0+0+3=3$
 repeated root of 0.

λ	w	$A - \lambda$	v
✓ 0	[1 1 1]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
1		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
2		$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
✓ 3	[2 1 2]	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
-1		$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} / 9 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} / 9$$

$$\lambda = a, a, b$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ a & a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0, 0, 3$$

Jordan canonical form

$$(\lambda - 0)^2(\lambda - 3) = 0$$

$$(A - 0)(A - 3) = 0$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}t} = e^{t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + t e^{t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + e^{3t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -6 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} / 9 + \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 9 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} / 9$$

$$\begin{array}{c|c|c} 9 & 9 & 9 \\ -12 & -6 & -12 \\ \hline 18 & 9 & 18 \\ -18 & -9 & -18 \\ \hline 9 & 0 & 9 \\ -6 & -3 & -6 \end{array} / 9$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} e^{0t} & t e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{0t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$A = CDC^{-1}$
 $A = C(D+E)C^{-1}$
 $= CDC^{-1} + CEC^{-1}$
 $e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}t} = e^{t \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -6 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} / 9} + t e^{t \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 9} + e^{3t} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} / 9$$

$$y = e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -6 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} / 9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t e^{t \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} / 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} / 9 + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} / 9 + e^{3t} \begin{bmatrix} 19 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} / 9$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$v_3 \xrightarrow{A-\lambda} v_2 \xrightarrow{A-\lambda} v_1 \xrightarrow{A-\lambda} 0$$

$(A-\lambda)v_3 = v_2$
 $(A-\lambda)v_2 = v_1$
 $(A-\lambda)v_1 = 0$

$$v_2 \xrightarrow{A-\lambda} v_1 \xrightarrow{A-\lambda} 0$$

$v_3 \xrightarrow{A-\lambda} 0$

$$(A-\lambda)v_3 = 0$$

$(A-\lambda)v_2 = v_1$
 $(A-\lambda)v_1 = 0$

HW [8] express the quadratic form

$$\underline{-2x^2} - \underline{2xy} - \underline{3y^2} + \underline{2xz} - \underline{3z^2}$$

$$= [x \ y \ z] \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r+s+t = -8 \\ rs+rt+st \\ rst = -12 \end{array} \quad \begin{array}{l} r=-3 \quad s=-1 \quad t=-4 \\ -3+s+t = -8 \\ (-3)st = -12 \end{array} \quad \begin{array}{l} s+t = -5 \\ st = 4 \end{array}$$

$$1 \mid \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{array} \mid -3 \mid \begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{array}$$

$$3 \quad -3 \cdot 5 =$$

λ	w	$A\lambda$	v
-1	$(2 \ -1 \ 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
-3	$(0 \ 1 \ 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
-4	$(1 \ 1 \ -1)$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} (2 \ -1 \ 1)_{/6} + (-3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0 \ 1 \ 1)_{/2} + (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (1 \ 1 \ -1)_{/3}$$

$$[x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1)_{/6} \left([x \ y \ z] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} (2 \ -1 \ 1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) + (-3)_{/2} \left([x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0 \ 1 \ 1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) + (-4)_{/3} \left([x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (1 \ 1 \ -1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{-1}{6} (2x-y+z)^2 - \frac{3}{2} (y+z)^2 - \frac{4}{3} (x+y-z)^2$$

2 -1 1 0 1 1 1 1 -1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r+s+t = -8 \\ rs+rt+st = 19 \\ rst = -12 \end{array} \quad |-2| + |-3| + |-3|$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$5 + 5 + 9 = 19$$

$$-1, -3, -4$$

$$\begin{array}{l} rs + rt + st = 19 \\ -1(-3) \quad (-1)(-4) \quad (-3)(-4) \\ 3 + 4 + 12 \end{array} \quad \textcircled{\checkmark}$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + \text{hch}(A)\lambda - \det(A)$$

$\lambda \quad w \quad A - \lambda I \quad v$

~~$-3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$~~

$\checkmark \quad -1 \quad [1 \ 1 \ -3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ -3] \times 8$

$\checkmark \quad 1 \quad [1 \ -3 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ -3 \ -1] \times 4$

$\checkmark \quad 3 \quad [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \times 8$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ -3] \times 8}_{\text{purple}} + 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ -3 \ -1] \times 4}_{\text{red}} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \times 8}_{\text{purple}}$$

$$e^{At} = \frac{e^{(-1)t}}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \frac{e^{1t}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{e^{3t}}{8} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$n=0 \quad A^0 = I$

1	2	5
1	-6	5
1	6	1
-2	0	2

$\times 8$

$n=1 \quad A^1 = A$

-1	2	5
-1	-6	5
-1	6	1
-2	0	2

$\times 8$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

[5] $e^{At} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 0 \quad \text{sum} = 3$

$$\lambda \quad w \quad A - \lambda I \quad v$$

$$\sqrt{0,0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{3} \quad [2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{f}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0,1,2$$

repeated root,
go on as before