

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Weizhe ZHENG

INTÉGRALITÉ, RATIONALITÉ ET INDÉPENDANCE DE l
EN COHOMOLOGIE l -ADIQUE SUR LES CORPS LOCAUX

Rapporteurs :

M. Pierre DELIGNE

M. Takeshi SAITO

Soutenue le 14 décembre 2007 devant la commission d'examen :

M. Pierre BERTHELOT (Président)

M. Luc ILLUSIE (Directeur de thèse)

M. Yves LASZLO

M. Gérard LAUMON

M. François LOESER

Intégralité, rationalité et indépendance de l en cohomologie l -adique sur les corps locaux

Résumé. On étudie deux problèmes sur les traces en cohomologie l -adique sur les corps locaux à corps résiduels finis. Dans la première partie, on décrit le comportement des complexes de faisceaux l -adiques entiers par les six opérations de Grothendieck et le foncteur des cycles proches. Dans la deuxième, on aborde le problème de rationalité et d'indépendance de l . Plus précisément, on introduit une notion de compatibilité pour les systèmes de complexes l -adiques et établit sa stabilité par lesdites opérations, dans un cadre un peu plus général (équivariant sous des groupes finis). L'outil principal dans ce travail est un théorème de de Jong sur les altérations.

Mots clefs : intégralité, indépendance de l , cohomologie l -adique, corps local, cycles proches, altération.

Integrality, Rationality, and Independence of l in l -adic Cohomology over Local Fields

Abstract. We study two problems on traces in l -adic cohomology over local fields with finite residue fields. In the first part, we describe the behavior of integral complexes of l -adic sheaves under Grothendieck's six operations and the nearby cycle functor. In the second part, we tackle the problem of rationality and independence of l . More precisely, we introduce a notion of compatibility for systems of l -adic complexes and establish its stability by the above operations, in a slightly more general context (equivariant under finite groups). The main tool in this work is a theorem of de Jong on alterations.

Keywords: integrality, independence of l , l -adic cohomology, local field, nearby cycles, alteration.

2000 Mathematical Subject Classification: 14F20, 11G25.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Luc Illusie, pour ses encouragements permanents et ses critiques incessantes, sans lesquels ce travail n'aurait jamais vu le jour. Pendant ces trois dernières années, sa patience et sa disponibilité m'ont beaucoup touché et ses nombreux conseils vont bien au-delà d'une thèse. Je voudrais lui témoigner ici ma gratitude profonde.

Je remercie vivement Pierre Deligne et Takeshi Saito d'avoir bien voulu écrire des rapports sur cette thèse. Je remercie également Pierre Berthelot, Yves Laszlo, Gérard Laumon et François Loeser, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

Des remarques d'Ofer Gabber m'ont fait éviter une erreur. Par ailleurs, une suggestion de Nicholas M. Katz m'a permis de simplifier certaines preuves. Je les en remercie chaleureusement l'un et l'autre. Sophie Morel et Fabrice Orgogozo ont lu avec soin une première version de ce travail et m'ont fait parvenir de longues listes de commentaires. Je leur en suis très reconnaissant. Je remercie également Wei Xiong et Hang Xue pour leurs observations.

J'ai pu faire mes études en France grâce à une coopération entre l'Université Paris-Sud et l'Université de Tsinghua. Je voudrais exprimer ici ma gratitude à tous ceux qui y ont participé. Je pense en particulier à Jean-Marc Fontaine et Michel Raynaud, ainsi qu'à leurs homologues chinois Keqin Feng, Yi Ouyang, Zhi-Ying Wen et Zhiyong Zheng, qui ont veillé sur moi où que je fusse.

Un grand merci à mes copains mathématiques du pays, qui ont créé autour de moi une ambiance amicale : Huayi Chen, Ke Chen, Miaofen Chen, Zongbin Chen, Yong Hu, Yongquan Hu, Zhi Jiang, Xiangyu Liang, Li Ma, Peng Shan, Yichao Tian, Jilong Tong, Shanwen Wang, Han Wu, Yi-Jun Yao, Guodong Zhou.

Enfin, ma reconnaissance toute particulière s'adresse à mes parents, et à toute ma famille, pour leur compréhension et leur soutien constant.

Table des matières

Introduction	1
Bibliographie	3
I Sur la cohomologie des faisceaux l-adiques entiers sur les corps locaux	5
1 Introduction	5
2 Intégralité et six opérations	6
3 Diviseurs à croisements normaux	9
4 Démonstration de 2.4 à 2.8	14
5 Variantes et cycles proches	20
6 Appendice : Intégralité sur les champs algébriques	32
Bibliographie	36
II Sur l'indépendance de l en cohomologie l-adique sur les corps locaux	39
Introduction	39
1 Indépendance de l et six opérations	40
1.3 Formalisme l -adique équivariant	42
1.8 Traces locales	49
1.13 E-compatibilité	51
2 Descente galoisienne et indépendance de l sur un corps fini	54
3 Altérations galoisiennes et réduction au cas des courbes	58
4 Indépendance de l des cycles proches et fin de la démonstration de 1.16	68
5 Appendice : Indépendance de l sur les champs algébriques	76
Bibliographie	82

Introduction

Soient $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, \bar{k} une clôture séparable. Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ est $\hat{\mathbb{Z}}$, avec pour générateur topologique canonique le Frobenius géométrique F qui envoie a sur $a^{1/q}$. Plusieurs résultats classiques sont connus pour les problèmes d'intégralité, de rationalité et d'indépendance de l de $\text{Tr}(F^n, \rho)$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $\rho : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(n, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est une représentation l -adique provenant de la cohomologie l -adique des schémas séparés de type fini sur k , $l \nmid q$.

Deligne a étudié le problème d'intégralité dans [SGA7, XXI 5]. Soit X un schéma de type fini sur k . Pour x un point fermé de X , on a $x = \text{Spec } k_x$, où k_x est un corps fini, extension finie de k . On choisit $\bar{x} = \text{Spec } \bar{k}_x$ un point géométrique algébrique au-dessus de x et on note $F_x \in \text{Gal}(\bar{k}_x/k_x)$ le Frobenius géométrique qui envoie a sur $a^{1/\#k_x}$. Un faisceau l -adique \mathcal{F} sur X est dit *entier* [ibid., 5.1] si pour tout point fermé x de X , les valeurs propres de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont des entiers algébriques. Pour $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas séparés de type fini sur k , Deligne [ibid., 5.2.2] démontre que les $R^i f_!$ préservent les faisceaux entiers et décrit la divisibilité des valeurs propres de F_x par des puissances de q . En plus, il établit la stabilité des faisceaux entiers par les $R^i f_*$ sous l'hypothèse de la résolution des singularités [ibid., 5.6].

Dans les années 1980, Gabber a prouvé l'indépendance de l de la cohomologie d'intersection [Fuj02, Th. 1] : pour X un schéma propre sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$, équidimensionnel et $i \in \mathbb{Z}$, $\det(1 - tF, \text{IH}^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l))$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$, indépendant de $l \nmid p$. Il déduit ce résultat d'un théorème général d'indépendance de l [ibid., Th. 2] : les systèmes E -compatibles sont stables par les six opérations. Ici E est une extension de \mathbb{Q} munie d'un système de plongements $(E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})_{\lambda \in I}$. La définition de système E -compatible est ponctuelle, comme celle des faisceaux entiers, mais virtuelle. Un système $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ d'éléments des groupes de Grothendieck des faisceaux l_λ -adiques sur X est E -compatible si pour tout point fermé x de X et tout $n \geq 1$, $\text{Tr}(F_x^n, (L_\lambda)_{\bar{x}})$ est, via les plongements donnés, un élément de E indépendant de λ .

L'objet de cette thèse est de transposer ces théorèmes connus pour les schémas sur un corps fini au cas des schémas sur un corps local, par lequel on entend le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini.

Le problème d'intégralité sur un corps local a été abordé récemment par Deligne-Esnault [DE06]. Soient K un corps local de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$, \bar{K} une clôture séparable de k . Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ est une extension de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ par le groupe d'inertie. D'après le théorème de monodromie locale de Grothendieck, si $\Phi \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$ est un relèvement de $F \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et si $\rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}(n, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est une représenta-

tion l -adique, $l \nmid q$, les valeurs propres de Φ ne dépendent pas, à multiplication par une racine de l'unité près, du relèvement choisi. Comme dans le cas d'un corps fini, on dit qu'un faisceau \mathcal{F} est *entier* [*ibid.*, 0.1], si pour tout point fermé $x = \text{Spec } K_x$ de X , les valeurs propres d'un relèvement $\Phi_x \in \text{Gal}(\overline{K}_x/K_x)$ du Frobenius géométrique agissant sur $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ sont des entiers algébriques. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x . Deligne-Esnault établissent un analogue [*ibid.*, 0.2] du théorème de Deligne. Plus précisément, ils prouvent que les $R^i f_!$ préservent les faisceaux entiers et décrivent également la q -divisibilité. Ils déduisent de ce théorème l'intégralité des $H^i(X_{\overline{K}}, \mathcal{F}_{\overline{K}})$ pour \mathcal{F} entier [*ibid.*, 0.3].

Dans la première partie de cette thèse, on décrit, plus généralement, le comportement de l'intégralité et de la q -divisibilité par les foncteurs usuels : les six opérations de Grothendieck et le foncteur des cycles proches $R\Psi$. On introduit pour cela la notion de faisceau entier inverse, déjà étudiée par Deligne dans le cas d'un corps fini [SGA7, XXI 5.5.3 (iii)], et une mesure de la q -divisibilité inspirée des « jauges » de Mazur-Ogus. On prouve notamment les résultats espérés dans [Ill06, 5.5]. Dans un appendice on généralise les résultats sur les six opérations aux champs algébriques.

Pour les résultats sur les six opérations, l'ingrédient essentiel est un théorème de de Jong, grâce auquel on se réduit, par les techniques usuelles de descente cohomologique, au cas crucial de $Rj_*\mathcal{F}$, pour l'inclusion $j : U \rightarrow X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D dans un schéma X lisse sur K et d'un faisceau \mathcal{F} lisse sur U et modérément ramifié le long de D . On déduit ce cas du cas des courbes.

Pour les résultats sur $R\Psi$, la stratégie de démonstration est similaire. À nouveau, l'ingrédient clef est un théorème de de Jong, qui permet de se ramener au cas de $R\Psi_{X/S}Ru_*\mathcal{F}$. Ici $S = \text{Spec } R$, où R est l'anneau des entiers de K , X est à réduction semi-stable sur S , u est l'inclusion $X - D \rightarrow X_\eta$, où X_η est la fibre générique de X , D est un diviseur de X , réunion de la fibre spéciale de X et des composantes horizontales, tel que (X, D) soit un couple semi-stable sur S , \mathcal{F} est un faisceau lisse sur $X - D$, modérément ramifié le long de D . L'étude de ce cas, plus délicate qu'on ne pouvait s'y attendre, repose sur une compatibilité technique (I 5.6(ii)) généralisant [Ill02, 1.5 (a)].

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la rationalité et de l'indépendance de l . Soit X un schéma séparé de type fini sur K . On dit qu'un système $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ d'éléments des groupes de Grothendieck des faisceaux l_λ -adiques est *E-compatible* si pour tout point fermé x de X , tout $n \geq 1$ et *tout* relèvement ϕ du n -ième itéré du Frobenius géométrique, $\text{Tr}(\phi, (L_\lambda)_{\overline{x}})$ est, via les plongements $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda}$ donnés, un élément de E indépendant de λ . On établit la stabilité des systèmes *E-compatibles* par les six opérations et le foncteur des cycles proches. On donne aussi une nouvelle démonstration du théorème de Gabber.

Plusieurs obstacles se présentent dans l'étude de la *E-compatibilité*. Premièrement, les faisceaux *E-compatibles* ne sont stables ni par passage à un sous-objet, ni par passage au quotient. C'est une des raisons pour lesquelles on travaille toujours dans les groupes de Grothendieck. Deuxièmement, la *E-compatibilité* est sensible aux morphismes finis. Dans l'étude de la *E-compatibilité*, il est donc naturel d'utiliser les résultats de de Jong sur les altérations équivariantes [dJ97], ce qui amène à généraliser le problème au cas équivariant sous des actions de groupes finis. En fait, les théo-

rèmes sont énoncés dans le cas équivariant. Une technique de Deligne-Lusztig permet dans la démonstration de se débarrasser des actions de groupes finis par descente galoisienne.

En ce qui concerne la stabilité par les six opérations, la première étape de la démonstration consiste à se réduire au cas des courbes. L'ingrédient essentiel est un raffinement [Vid04, 4.4], dû à Gabber, de résultats de de Jong, grâce auquel on se ramène au cas de Rj_*L pour l'inclusion $j : U \rightarrow X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G -strict D dans un schéma régulier X et des complexes G -équivariants L_λ sur U à faisceaux de cohomologie lisses, modérément ramifiés le long de D . Le cas des courbes sur un corps fini est connu [Del73, 9.8], d'où une démonstration indépendante du théorème de Gabber. Dans le cas d'un corps local, on déduit le cas des courbes, à l'aide des résultats de de Jong, d'un cas particulier de la stabilité par $R\Psi$. L'étude de ce cas repose aussi sur la compatibilité technique établie dans la première partie de cette thèse. La stabilité par $R\Psi$ en général découle de ce cas particulier et encore une fois des résultats de de Jong.

Les schémas équivariants sont mieux compris dans le contexte de leurs champs quotients associés. Il est donc naturel de considérer le problème d'indépendance de l pour les champs algébriques. C'est ce qu'on fait dans un appendice. On montre notamment que les six opérations préservent les systèmes E -compatibles pourvu qu'on se borne aux morphismes relativement de Deligne-Mumford.

Bibliographie

- [DE06] P. DELIGNE & H. ESNAULT – « Appendix to “Deligne’s integrality theorem in unequal characteristic and rational points over finite fields” », *Ann. Math. (2)* **164** (2006), p. 726–730.
- [Del73] P. DELIGNE – « Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L », in *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Math., vol. 349, Springer-Verlag, 1973, p. 501–597.
- [dJ97] A. J. DE JONG – « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.
- [Fuj02] K. FUJIWARA – « Independence of l for intersection cohomology (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 145–151.
- [Ill02] L. ILLUSIE – « Sur la formule de Picard-Lefschetz », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 249–268.
- [Ill06] ———, « Miscellany on traces in l -adic cohomology: a survey », *Jpn. J. Math.* (3) **1** (2006), p. 107–136.
- [Vid04] I. VIDAL – « Théorie de Brauer et conducteur de Swan », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), p. 349–391.
- [SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, I, dirigé par A. Grothendieck, II, par P. De-

ligne, N. Katz, Lecture Notes in Math., vol. 288, 340, Springer-Verlag, 1972–1973.

Partie I

Sur la cohomologie des faisceaux l -adiques entiers sur les corps locaux

1 Introduction

Soient R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini de caractéristique p , K son corps des fractions. Un tel corps sera appelé *corps local*. Soit $\eta = \text{Spec} K$.

Soit X un schéma de type fini sur η . On désigne par $|X|$ l'ensemble de ses points fermés. Pour $x \in |X|$, le corps résiduel $\kappa(x)$ de X en x est une extension finie de K . On note R_x son anneau des entiers, x_0 le point fermé de $\text{Spec} R_x$. Soient \bar{x} un point géométrique de X au-dessus de x de corps résiduel $\kappa(\bar{x})$ une clôture séparable de $\kappa(x)$, $R_{\bar{x}}$ la normalisation de R_x dans $\kappa(\bar{x})$, \bar{x}_0 le point fermé de $\text{Spec} R_{\bar{x}}$. Soit $F_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0))$ le Frobenius géométrique qui envoie a sur $a^{1/q}$, où $q = \#\kappa(x_0)$.

Fixons un nombre premier $l \neq p$. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_l . Soit \mathcal{F} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau sur X . D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres d'un relèvement $\Phi_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$ de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité [Del80, 1.7.4].

Rappelons qu'on dit que \mathcal{F} est *entier* [DE06, 0.1] si les valeurs propres de Φ_x sont des entiers algébriques pour tout $x \in |X|$. Cette intégralité est stable par image directe à support propre [*ibid.*, 0.2]. La démonstration utilise l'analogie de ce résultat sur un corps fini [SGA7, XXI 5.2.2].

L'objet de cet article est d'étudier, plus généralement, le comportement de l'intégralité par les foncteurs usuels : les six opérations et le foncteur des cycles proches. De façon plus précise, on examine le comportement par ces foncteurs de la divisibilité des valeurs propres des Φ_x par des puissances de q . On introduit pour cela une mesure de la q -divisibilité inspirée des « jauges » de Mazur-Ogus. On prouve notamment les résultats espérés dans [Ill06, 5.5].

Dans un travail ultérieur (la deuxième partie de cette thèse), on examine le com-

portement de la rationalité et de l'indépendance de l par les mêmes opérations.

Les résultats concernant les six opérations sont exposés au § 2. Au § 3 on traite le cas crucial de $Rj_*\mathcal{F}$, pour l'inclusion $j : U \rightarrow X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D dans un schéma X lisse sur η et d'un faisceau \mathcal{F} lisse sur U et modérément ramifié le long de D . Les démonstrations des résultats du § 2 sont données au § 4. L'ingrédient essentiel est un théorème de de Jong, grâce auquel on se réduit au cas traité au § 3 par les techniques usuelles de descente cohomologique. Le résultat principal du § 5 est la stabilité de l'intégralité par le foncteur des cycles proches $R\Psi$. À nouveau, l'ingrédient clef est un théorème de de Jong, qui permet de se ramener au cas d'un couple strictement semi-stable et d'un faisceau lisse sur le complémentaire du diviseur D réunion de la fibre spéciale et des composantes horizontales et modérément ramifié le long de D . L'étude de ce cas, plus délicate qu'on ne pouvait s'y attendre, repose sur une compatibilité technique (5.6 (ii)) généralisant [Ill02, 1.5 (a)]. Au § 6 on généralise la notion d'intégralité aux champs algébriques.

Je remercie chaleureusement L. Illusie pour m'avoir suggéré ce sujet, pour son aide à la composition de cet article, et pour sa lecture minutieuse des diverses versions du manuscrit. Je suis reconnaissant à G. Laumon pour une simplification de la démonstration de 5.6 (ii). Je remercie également O. Gabber, F. Orgogozo et le rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

2 Intégralité et six opérations

On conserve les notations du § 1. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans C . Pour $r \in \mathbb{Q}$, on note q^r l'unique élément de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $(q^r)^b = q^a$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tel que $r = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Soit X un schéma de type fini sur η .

Définition 2.1. Fixons un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$. On dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau \mathcal{F} sur X est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout point fermé x de X , et toute valeur propre α de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x_0)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On dit que \mathcal{F} est entier (resp. entier inverse) s'il est 0-entier (resp. 0-entier inverse).

Les $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux entiers (resp. r -entiers, resp. entiers inverses, resp. r -entiers inverses) sur X forment une sous-catégorie épaisse [Gro57, 1.11] de $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$, notée $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}}$ (resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}}$, resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}^{-1}}$, resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}^{-1}}$).

Soient K' une extension finie de K , Z un schéma de type fini sur K' , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Z, \overline{\mathbb{Q}_l})$. Alors \mathcal{G} est r -entier (resp. r -entier inverse) relativement à K' si et seulement s'il est r -entier (resp. r -entier inverse) relativement à K .

Rappelons que pour les schémas X séparés de type fini sur un schéma S régulier de dimension ≤ 1 , et en particulier sur η , on dispose, par [Eke90, § 6], d'une catégorie triangulée $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ et d'un formalisme de six opérations : Rf_* , $Rf_!$, f^* , $Rf^!$, \otimes , $R\mathcal{H}om$. La catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est la 2-limite inductive des catégories $D_c^b(X, E_\lambda)$, où E_λ parcourt les extensions finies de \mathbb{Q}_l contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Si \mathcal{O}_λ est l'anneau des entiers de E_λ , $D_c^b(X, E_\lambda)$ est déduite de la catégorie $D_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$ définie dans [ibid.] par extension des

scalaires de \mathcal{O}_λ à E_λ . Le formalisme construit dans [ibid.] pour $D_c^b(-, \mathcal{O}_\lambda)$ se transpose trivialement.

Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. Pour un formalisme sans hypothèse de séparation, voir l'appendice (§ 6).

La définition qui suit est inspirée de la notion des « jauges » de Mazur-Ogus [BO78, 8.7].

Définition 2.2. Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction. On dit qu'un objet $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est *entier* (resp. ϵ -entier, resp. entier inverse, resp. ϵ -entier inverse) si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^i(K)$ est entier (resp. $\epsilon(i)$ -entier, resp. entier inverse, resp. $\epsilon(i)$ -entier inverse).

On désigne la sous-catégorie pleine de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ formée des objets entiers (resp. ϵ -entiers, resp. entiers inverses, resp. ϵ -entiers inverses) par

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} \text{ (resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}).$$

Lorsque ϵ est constant, $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}$ et $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$ sont des sous-catégories triangulées. On abrège parfois $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ en $D_c^b(X)$.

On note I la fonction d'inclusion de \mathbb{Z} dans \mathbb{Q} .

2.3. Soient $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

Pour $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1)\text{-ent}}$, $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_2)\text{-ent}}$, on a

$$K \otimes L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

De même pour « entier inverse ».

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}^{-1}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}}.$$

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}^{-1}}$, on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}^{-1}}.$$

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur η . Alors f^* préserve les complexes ϵ -entiers (resp. ϵ -entiers inverses).

Théorème 2.4. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , \mathcal{F} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau entier (resp. entier inverse) sur X . Alors pour tout point fermé y

de Y , $(Rf_! \mathcal{F})_y$ est entier et $(I - n)$ -entier (resp. I -entier inverse et n -entier inverse), où $n = \dim(f^{-1}(y))$. En particulier, $Rf_!$ induit

$$(2.4.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.4.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(2.4.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.4.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_r\text{-ent}^{-1}},$$

où $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$ est la dimension relative.

Le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est un théorème de Deligne-Esnault [DE06, 0.2].

Théorème 2.5. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors Rf_* induit

$$(2.5.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.5.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}},$$

$$(2.5.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.5.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

Sans hypothèse de séparation de f , (2.5.1), (2.5.3) et (2.5.4) sont encore vrais.

L'hypothèse de séparation est également superflue pour (2.5.2). On peut l'éliminer ou bien en étudiant la q -divisibilité en dehors d'un sous-schéma de dimension fixée, ou bien en utilisant une théorie de $Rf_!$ sans hypothèse de séparation (voir 6.5).

Théorème 2.6. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , $d_Y = \dim Y$, $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$. Alors $Rf^!$ induit

$$(2.6.1) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{-d_r\text{-ent}},$$

$$(2.6.2) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}},$$

$$(2.6.3) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_r)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.6.4) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}.$$

Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$. Rappelons que $Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l$ est globalement défini (pas de problème dans le cas séparé, dans le cas général par [BBD82, 3.2.4]). On pose $D_X = R\mathcal{H}om(-, Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Théorème 2.7. Soient X un schéma de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors D_X induit

$$(2.7.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}},$$

$$(2.7.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(X)_{I\text{-ent}},$$

$$(2.7.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}}^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.7.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}}^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}.$$

De plus, pour $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}$, $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a+1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$.

Théorème 2.8. Soient X un schéma de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors $R\mathcal{H}om_X(-, -)$ induit

$$(2.8.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}},$$

$$(2.8.2) \quad D_c^b(X)_{1\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{1\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(1-d_X)\text{-ent}},$$

$$(2.8.3) \quad D_c^b(X)_{1\text{-ent}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{1\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{1\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.8.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

3 Diviseurs à croisements normaux

Proposition 3.1. Soient $g : X \rightarrow Y$ un morphisme fini de schémas de type fini sur η , $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Alors g_*L est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si L l'est.

Démonstration. On peut supposer que Y est réduit à un seul point y , X est réduit à un seul point x et $L = \mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Soient $G_y = \text{Gal}(\kappa(\bar{y})/\kappa(y))$, $G_x = \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$. Le faisceau \mathcal{F} correspond à une représentation $\rho : G_x \rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\bar{x}})$. Soient K' une extension finie quasi-galoisienne (i. e., normale) de $\kappa(y)$ contenant $\kappa(x)$, $x' = \text{Spec } K'$. Pour $s \in G_y$, soit \mathcal{F}_s le faisceau sur x' correspondant à la représentation

$$\begin{aligned} \text{Gal}(\kappa(\bar{x}')/K') &\rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) \\ h &\mapsto \rho(s^{-1}hs). \end{aligned}$$

Ce faisceau ne dépend, à isomorphisme près, que de l'image de s dans G_y/G_x . D'après la formule de Mackey ([Ser98, 7.3]), on a $(g_*\mathcal{F})_{x'} \simeq \bigoplus_s \mathcal{F}_s$, où s parcourt un système de représentants de G_y/G_x . Donc

$$\begin{aligned} g_*\mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} &\Leftrightarrow (g_*\mathcal{F})_{x'} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} \\ &\Leftrightarrow \text{les } \mathcal{F}_s \text{ sont } \epsilon(0)\text{-entiers} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier.} \end{aligned}$$

De même pour le cas entier inverse. □

Soient, en 3.2 et 3.3, K un corps quelconque, $\eta = \text{Spec } K$.

On va utiliser le cas spécial suivant du théorème de pureté de Gabber [Fuj02].

Proposition 3.2. Soient n un entier inversible sur η , $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion fermée de schémas réguliers de type fini sur η purement de codimension c . Alors $Ri^!\Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$.

Gabber a remarqué que ce résultat découle facilement du théorème de pureté relative [SGA4, XVI 3.7]. En effet, i provient par changement de base d'une immersion fermée $i_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ de schémas de type fini sur K_1 , où K_1 est un sous-corps de K , extension de type fini d'un corps premier K_0 . Alors $\text{Spec } K_1$ est le point générique d'un schéma S_1 intègre de type fini sur K_0 . Quitte à remplacer S_1 par un ouvert, on peut supposer que i_1 est la fibre générique d'une immersion fermée $i_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ de schémas

de type fini sur S_1 . Comme X_1 (resp. Y_1) est un schéma régulier ([EGAIV, 6.5.2 (i)]) et que X_2 (resp. Y_2) est de type fini sur K_0 , donc en particulier, excellent, quitte à remplacer X_2 et Y_2 par des voisinages ouverts de leurs fibres génériques, on peut supposer que X_2 et Y_2 sont réguliers (donc lisses sur K_0) et i_2 est purement de codimension c . D'après le théorème de pureté relative, $Ri_2^! \Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$. On conclut par passage à la limite. \square

Le lemme suivant est décalqué de [SGA7, XXI 5.2.1].

Lemme 3.3. *Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$, l un nombre premier inversible sur η , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.*

(i) *Il existe une partie fermée Y de dimension 0 de X telle que $a_{X*} \mathcal{G} \rightarrow a_{Y*}(\mathcal{G}|_Y)$ soit injectif, où $a_Y : Y \rightarrow \eta$.*

(ii) *Si X est séparé de dimension n , et si U est un ouvert de X dont le complémentaire Z est de dimension $< n$, alors il existe une partie fermée Y de U de dimension 0 et une flèche surjective $a_{Y*}(\mathcal{G}|_Y)(-n) \rightarrow R^{2n} a_{X!} \mathcal{G}$, où $a_Y : Y \rightarrow \eta$.*

Démonstration. (i) est évident.

(ii) Quitte à remplacer X par X_{red} et à rétrécir U , on peut supposer U régulier purement de dimension n et $\mathcal{G}|_U$ lisse. Puisque $\dim Z < n$, on a

$$0 = R^{2n-1} a_{Z!}(\mathcal{G}|_Z) \rightarrow R^{2n} a_{U!}(\mathcal{G}|_U) \xrightarrow{\sim} R^{2n} a_{X!} \mathcal{G} \rightarrow R^{2n} a_{Z!}(\mathcal{G}|_Z) = 0,$$

où $a_Z : Z \rightarrow \eta$. Donc on peut supposer $X = U$. Appliquant (i) à $\check{\mathcal{G}} = \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on trouve une partie fermée Y de U de dimension 0 telle que $a_{U*} \check{\mathcal{G}} \rightarrow a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|_Y)$ soit injectif, donc $D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|_Y)) \rightarrow D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}})$ surjectif. Par le théorème de pureté 3.2, on a

$$D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|_Y)) \simeq a_{Y*}(D_Y(\check{\mathcal{G}}|_Y)) \simeq a_{Y*}(\mathcal{G}|_Y),$$

Par ailleurs, on a

$$D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}}) = \mathcal{H}^0(D_\eta R a_{U*} \check{\mathcal{G}}) \simeq \mathcal{H}^0(R a_{U!} D_U \check{\mathcal{G}}) \simeq \mathcal{H}^0(R a_{U!} \mathcal{G}(n)[2n]) = R^{2n} a_{U!} \mathcal{G}(n).$$

D'où le résultat. \square

On reprend les notations du § 1.

Corollaire 3.4. *Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse).*

(i) *$a_{X*} \mathcal{G}$ est entier (resp. entier inverse).*

(ii) *Si X est séparé de dimension n , alors $a_{X!} \mathcal{G}$ est entier (resp. entier inverse), $R^{2n} a_{X!} \mathcal{G}$ est n -entier (resp. n -entier inverse).*

La proposition suivante est décalqué de [SGA7, XXI 5.3 (a)].

Proposition 3.5. *Soient $j : X \hookrightarrow Y$ une immersion ouverte de schémas de type fini sur η de dimension 1, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier. Alors $j_* \mathcal{G}$ est entier.*

Démonstration. On se ramène au cas Y affine, puis Y projectif.

Définissons \mathcal{H} par la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_! \mathcal{G} \rightarrow j_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte

$$a_{X*} \mathcal{G} \rightarrow a_{Y*} \mathcal{H} \rightarrow R^1 a_{X!} \mathcal{G},$$

où $a_X : X \rightarrow \eta$, $a_Y : Y \rightarrow \eta$. D'après 3.4 (i), $a_{X*} \mathcal{G}$ est entier. D'après le théorème de Deligne-Esnault (2.4.1), $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$ est entier. Donc $a_{Y*} \mathcal{H}$ l'est aussi. Mais \mathcal{H} est à supports dans une partie fermée de dimension 0 de Y , donc \mathcal{H} est entier. \square

Proposition 3.6. *Soient X un schéma régulier de type fini sur η de dimension 1, D un diviseur positif régulier. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur U , entier, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_* \mathcal{G}$ est 1-entier.*

Démonstration. La question est locale sur X . Soit $x \in |D|$. Montrons que $(Rj_* \mathcal{G})_x$ est 1-entier.

On a $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_{\mathbb{E}} \overline{\mathbb{Q}}_l$, où E est un corps extension finie de \mathbb{Q}_l , \mathcal{O} son anneau des entiers, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ un \mathcal{O} -faisceau lisse (constructible) sur U . En vertu du lemme d'Abhyankar [SGA1, XIII 5.2], il existe, au voisinage de x , un revêtement fini $g : \tilde{X} \rightarrow X$ de la forme $\tilde{X} = X[T]/(T^n - t)$ où t est une équation locale de x , n est un entier premier à l'exposant caractéristique de K , tel que $(g|U)^*(\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O}))$ se prolonge en un faisceau localement constant sur \tilde{X} . Comme \mathcal{G} est facteur direct de $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$, on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$. Comme $g^{-1}(D)_{\text{red}}$ est un diviseur régulier, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} tel que $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ se prolonge en un faisceau localement constant sur X , puis au cas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ constant par la formule de projection.

Soient $X_{(x)}$ le hensélisé de X en x , $U_{(x)} = X_{(x)} \times_X U$, $j_{(x)} : U_{(x)} \hookrightarrow X_{(x)}$, $\mathcal{H} = \mathcal{G}|U_{(x)}$. Alors $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_{\mathbb{E}} \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ constant. On a $(Rj_{(x)*} \mathcal{H})_x = (Rj_* \mathcal{G})_x \in D_c^b(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. D'après 3.5, $(j_{(x)*} \mathcal{H})_x = (j_* \mathcal{G})_x$ est entier. Il reste à montrer que $(R^1 j_{(x)*} \mathcal{H})_x$ est 1-entier.

On a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow \hat{Z}(1) \rightarrow G \rightarrow \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)) \rightarrow 1,$$

où $\hat{Z}(1) = \prod_{p' \neq \text{car}(K)} \mathbb{Z}_{p'}(1)$, $G = \pi_1^{\text{mod}}(U_{(x)})$. Le faisceau \mathcal{H} correspond à une représentation l -adique de G . D'après le théorème de monodromie locale, la restriction de cette représentation à $\hat{Z}(1)$ est quasi-unipotente, donc unipotente. On obtient une filtration M finie, croissante de \mathcal{H} , telle que chaque $\text{gr}_a^M \mathcal{H}$ se prolonge en un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse \mathcal{G}_a sur $X_{(x)}$.

Montrons que $(R^1 j_{(x)*} M_a)_x$ est 1-entier par récurrence sur a , ce qui achèvera la démonstration de la proposition. L'assertion est claire pour $a \ll 0$. Supposons l'assertion établie pour $a - 1$. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow M_{a-1} \rightarrow M_a \rightarrow \mathcal{G}_a|U_{(x)} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Rj_{(x)*}M_{a-1} \rightarrow Rj_{(x)*}M_a \rightarrow Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U(x)}) \rightarrow .$$

D'après une formule de projection, $Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U(x)}) \simeq Rj_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{G}_a$. On a

$$(R^q j_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l)_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l(-q) & \text{si } q = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc on a la suite exacte

$$(j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x \rightarrow (R^1 j_{(x)*}M_{a-1})_x \rightarrow (R^1 j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x(-1).$$

Ici $(j_{(x)*}M_a)_x$ est un sous-faisceau de $(j_{(x)*}\mathcal{H})_x$, donc entier. Par hypothèse de récurrence, $(R^1 j_{(x)*}M_{a-1})_x$ est 1-entier. Donc $(\mathcal{G}_a)_x$ est entier, $(\mathcal{G}_a)_x(-1)$ est 1-entier. On en déduit que $(R^1 j_{(x)*}M_a)_x$ est 1-entier. \square

Le lemme suivant est une variante de [SGA7, XXI 5.6.2].

Lemme 3.7. Soient X un schéma noethérien régulier, $D = \sum_{i \in I} D_i$ un diviseur strictement à croisements normaux de X avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers, $U = X - D$, n un entier inversible sur X , $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$ localement constant, modérément ramifié sur X .

(i) Soient $i \in I$, $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$, $D_{i, U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$, d'où un diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_{i, U_{(i)}} & \xrightarrow{j'_{(i)}} & D_i \\ \downarrow \iota'_i & & \downarrow \iota_i \\ U & \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} \xrightarrow{j_{(i)}} X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base

$$(3.7.1) \quad \iota_i^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

est un isomorphisme et les faisceaux

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \mathcal{G}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

sont localement constants, modérément ramifiés sur D_i .

(ii) Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas réguliers noethériens. Supposons que $f^{-1}(D)$ soit un diviseur à croisements normaux et que $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$ soit une famille de diviseurs réguliers. Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y_U & \xrightarrow{j_Y} & Y \\ \downarrow f_U & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base $f^* Rj_* \mathcal{G} \rightarrow Rj_{Y*} f_U^* \mathcal{G}$ est un isomorphisme.

Démonstration. La question est locale sur X . Soit x un point de X . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de x , un revêtement fini $g : \tilde{X} \rightarrow X$ de la forme

$$\tilde{X} = X[T_1, \dots, T_r] / (T_1^{n_1} - t_1, \dots, T_r^{n_r} - t_r)$$

où les t_i sont des équations locales des composantes de D passant par x , et n_i des entiers premiers à l'exposant caractéristique de $\kappa(x)$, tel que $(g|U)^*\mathcal{G}$ se prolonge en un faisceau localement constant sur \tilde{X} . Comme \mathcal{G} s'injecte dans $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$ et le quotient \mathcal{G}_1 est modérément ramifié sur X , on peut itérer cette construction. Pour tout $N \geq 1$, on obtient, quitte à rétrécir X , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^*\mathcal{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^*\mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$. Comme $g^{-1}(D)_{\text{red}} = \sum_{i \in I} g^{-1}(D_i)_{\text{red}}$ est un diviseur à croisements normaux avec $(g^{-1}(D_i)_{\text{red}})_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} qui se prolonge en un faisceau localement constant sur X , puis au cas $\mathcal{G} = \Lambda_U$ par la formule de projection.

Le point (ii) résulte alors de [Fuj02, § 8] et de la functorialité des classes des diviseurs [SGA4½, Th. finitude, 2.1.1].

Pour (i), notons que $D_{i,U_{(i)}}$ est un diviseur régulier de $U_{(i)}$, de complémentaire U . Pour tout q ,

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \Lambda_U \simeq \begin{cases} \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}} & \text{si } q = 0, \\ \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}}(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est localement constant, modérément ramifié sur D_i . On a donc un triangle distingué

$$\iota_i'^* \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Le morphisme (3.7.1) est un isomorphisme car le morphisme de changement de base $\iota_i^* Rj_{(i)*} \rightarrow Rj_{(i)*}' \iota_i'^*$ induit des isomorphismes sur $\Lambda_{U_{(i)}}$ en vertu de (ii) et trivialement sur $\iota_i'^* \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}}$. \square

La proposition suivante est décalquée de [SGA7, XXI 5.6.1].

Proposition 3.8. *Soient X un schéma de type fini sur η , D un diviseur à croisements normaux. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur U , entier, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_* \mathcal{G}$ est I-entier.*

Démonstration. Le problème étant local pour la topologie étale au voisinage d'un point fermé de D , on peut supposer D strictement à croisements normaux. Comme $\text{Reg}(X)$ est un ouvert de X contenant D , on peut supposer X régulier.

On pose $D = \sum_{i \in I} D_i$ avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers. On fait une récurrence sur $n = \#I$. Le cas $n = 0$ est trivial. Pour $n > 0$, on choisit $i \in I$ et applique 3.7 (i), dont on conserve les notations. Pour tout $x \in |D_{i,U_{(i)}}|$, il existe un sous-schéma régulier de $U_{(i)}$ de dimension 1 tel que son intersection avec $D_{i,U_{(i)}}$ soit le schéma x . Donc

$Rj_*^{(i)}\mathcal{G}$ est I -entier, d'après 3.7 (ii) et 3.6. Notons que $\sum_{h \in I - \{i\}} D_h \cap D_i$ est un diviseur à croisements normaux de D_i de complémentaire $D_{i, U^{(i)}}$, et pour tout q , $\iota_i'^* R^q j_*^{(i)}\mathcal{G}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur $D_{i, U^{(i)}}$, modérément ramifié sur D_i en vertu de 3.7 (i). Donc $\iota_i'^* Rj_*\mathcal{G} \simeq Rj'_{(i)*} \iota_i'^* Rj_*^{(i)}\mathcal{G}$ est I -entier, d'après l'hypothèse de récurrence. Comme i est arbitraire, on en conclut que $Rj_*\mathcal{G}$ est I -entier. \square

4 Démonstration de 2.4 à 2.8

La proposition suivante est une variante de [Org03, 2.6].

Proposition 4.1. *Soient F un corps, X un schéma séparé de type fini sur $\text{Spec } F$, U une partie ouverte de X .*

(i) *Il existe un morphisme $r_0 : X'_0 \rightarrow X$ propre surjectif avec X'_0 régulier et un sous-schéma ouvert fermé W_0 de X'_0 contenant $r_0^{-1}(U)$ tels que $r_0^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux dans W_0 .*

(ii) *Pour tout $n \geq 0$, il existe une extension finie radicielle F' de F et un hyperrecouvrement propre n -tronqué s -scindé $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{F'}$ tels que X'_m soit lisse sur $\text{Spec } F'$ et que $r_m^{-1}(U_{F'})$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à $\text{Spec } F'$ dans un sous-schéma ouvert fermé de X'_m , $0 \leq m \leq n$.*

Démonstration. (i) Au cas où X est intègre et $U \neq \emptyset$, il existe un morphisme $r_0 : X'_0 \rightarrow X$ propre surjectif avec X'_0 intègre et régulier tel que $r_0^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux, en vertu de [dJ96, 4.1]. On prend $W_0 = X'_0$.

Le cas où X est intègre et $U = \emptyset$ en résulte : appliquer le cas précédent à X et la partie ouverte X pour obtenir r_0 , et puis prendre $W_0 = \emptyset$.

Dans le cas général, soient X_α les schémas réduits associés aux composantes irréductibles de X , $a : \coprod X_\alpha \rightarrow X$ le morphisme canonique. Alors a est fini et surjectif. Pour chaque α , appliquons (i) à X_α et $U \times_X X_\alpha$, on obtient $\phi_\alpha : (X_\alpha)'_0 \rightarrow X_\alpha$ propre surjectif avec $(X_\alpha)'_0$ régulier et un sous-schéma ouvert fermé W_α de $(X_\alpha)'_0$ contenant l'image inverse U_α de U tels que U_α soit le complémentaire dans W_α d'un diviseur strictement à croisements normaux. Posons $X'_0 = \coprod (X_\alpha)'_0$, $r_0 = a \circ \coprod \phi_\alpha$, $W_0 = \coprod W_\alpha$. Alors r_0 et W_0 satisfont aux conditions de (i).

(ii) Cas F parfait. On fait une récurrence sur n . Lorsque $n = 0$, (ii) dégénère en (i). Supposons donné un hyperrecouvrement n -tronqué $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X$ vérifiant les conditions de (ii). On applique (i) au X -schéma $(\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$ et l'image inverse de U . On obtient $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$ propre surjectif avec N lisse sur $\text{Spec } F$ et un sous-schéma ouvert fermé W de N tels que l'image inverse de U dans N soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à $\text{Spec } F$ dans W . L'hyperrecouvrement propre $(n+1)$ -tronqué s -scindé associé au triplet (X'_\bullet, N, β) [SGA4, V^{bis} 5.1.3] vérifie les conditions de (ii) pour $n+1$.

Cas général. On prend une clôture parfaite \overline{F} de F et applique (ii) à \overline{F} , $X_{\overline{F}}$ et $U_{\overline{F}}$. L'hyperrecouvrement tronqué et les diviseurs strictement à croisements normaux obtenus se descendent à une sous-extension finie F' de F . \square

4.2. Démonstration de (2.5.1). Il faut montrer que pour un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau constructible \mathcal{G} sur X , entier, $Rf_*\mathcal{G}$ est entier.

On fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d \leq 0$ est trivial.

Soit $d \geq 1$. Choisissons un ouvert affine $U \xrightarrow{j} X$ tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse et que son complémentaire $Z \xrightarrow{i} X$ soit de dimension $< d$. Le triangle distingué

$$i_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fi)_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow Rf_* \mathcal{G} \rightarrow R(fj)_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que $Rj_* j^* \mathcal{G}$ et $R(fj)_* j^* \mathcal{G}$ sont entiers. Il suffit donc de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que X est séparé et \mathcal{G} lisse.

On a $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_{\mathbb{E}} \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ lisse. Soit $p: X' \rightarrow X$ un revêtement étale surjectif qui trivialisent $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O} . Le faisceau \mathcal{G} est facteur direct de $p_* p^* \mathcal{G}$, de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité de $R(fp)_* p^* \mathcal{G}$. Donc il suffit de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que X est séparé et

4.2.1 $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_{\mathbb{E}} \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ constant.

On factorise f en $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{g} Y$, où j est une immersion ouverte, g est un morphisme propre. Comme Rg_* préserve l'intégralité en vertu du théorème de Deligne-Esnault (2.4.1), il suffit de prouver l'intégralité de $Rj_* \mathcal{G}$. On est donc ramené à démontrer (2.5.1) pour j et \mathcal{G} . Pour cela, on peut supposer Z affine, donc séparé.

Soit $i \geq 0$. On applique 4.1 (ii) à j et $n = i + 1$. Quitte à changer les notations, on peut supposer que l'extension radicielle de *loc. cit.* est triviale. On obtient un carré cartésien (de schémas simpliciaux $(i + 1)$ -tronqués)

$$\begin{array}{ccc} X'_* & \xrightarrow{j'_*} & Z'_* \\ \downarrow s_* & & \downarrow r_* \\ X & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

où r_* est un hyperrecouvrement propre $(i + 1)$ -tronqué s -scindé, Z'_m lisse sur η , j'_m une immersion ouverte faisant de X'_m le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux relativement à η dans une partie ouverte fermée de Z'_m , $0 \leq m \leq i + 1$. D'après la descente cohomologique,

$$\tau_{\leq i} Rj_* \mathcal{G} \simeq \tau_{\leq i} Rj_* R s_* s_*^* \mathcal{G} = \tau_{\leq i} R r_* R j'_* s_*^* \mathcal{G}.$$

Comme $R r_*$ préserve l'intégralité (2.4.1), il suffit de voir l'intégralité des $R j'_{m*} s_m^* \mathcal{G}$, $0 \leq m \leq i$. Or $s_m^* \mathcal{G}$ satisfait encore à 4.2.1, donc est modérément ramifié sur Z'_m . Il suffit alors d'appliquer 3.8. \square

Proposition 4.3. *Soient X un schéma régulier séparé de type fini sur η , purement de dimension 1, $a_X : X \rightarrow \eta$, \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur X , entier inverse. Alors $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$ est 1-entier inverse.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$, avec $\mathcal{G}_\mathcal{O}$ lisse. Pour $p : X' \rightarrow X$ un revêtement étale surjectif qui trivialise $\mathcal{G}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, \mathcal{G} est un facteur direct de $p_* p^* \mathcal{G}$. Ceci permet de supposer $\mathcal{G}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ constant. On a

$$D_\eta(R^1 a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(D_\eta R a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(R a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1)[2]) = R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1).$$

Soit $j : X \hookrightarrow P$ une compactification régulière de X . De $a_X = a_P \circ j$ on déduit une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p a_{P*} R^q j_* \check{\mathcal{G}} \Rightarrow R^{p+q} a_{X*} \check{\mathcal{G}}.$$

D'après 3.8 et 3.4, $R^0 a_{P*} R^1 j_* \check{\mathcal{G}}$ est entier. D'autre part, $R^1 a_{P*} R^0 j_* \check{\mathcal{G}}$ est un quotient de $R^1 a_{P*} j_* \check{\mathcal{G}}$, donc entier en vertu de (2.4.1). Donc $R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}$ est entier, $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$ est 1-entier inverse. \square

Démonstration de 2.4. Comme on a déjà remarqué, le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est démontré dans [DE06, 0.2]. Supposons maintenant \mathcal{F} entier inverse. On peut supposer $Y = \eta$, $f = a_X$.

Traitons d'abord le cas $X = \mathbb{A}_\eta^1$. Soient $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense tel que $\mathcal{F}|_U$ soit lisse, $i : Z \hookrightarrow X$ le fermé complémentaire. La suite exacte

$$0 \rightarrow j_* j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$R a_{U!}(\mathcal{F}|_U) \rightarrow R a_{X!} \mathcal{F} \rightarrow R a_{Z!}(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow .$$

D'après 3.4, $R a_{Z!}(\mathcal{F}|_Z)$ est entier inverse, $R^0 a_{U!}(\mathcal{F}|_U)$ est entier inverse, $R^2 a_{U!}(\mathcal{F}|_U)$ est 1-entier inverse. D'après 4.3, $R^1 a_{U!}(\mathcal{F}|_U)$ est 1-entier inverse. Donc $R a_{X!} \mathcal{F}$ est I-entier inverse et 1-entier inverse.

Pour le cas général, procédons par récurrence sur n . Le cas $n \leq 0$ est trivial. Soit $n \geq 1$. D'après le lemme de normalisation, il existe $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense de X et un morphisme $f : U \rightarrow Y = \mathbb{A}_\eta^1$ à fibres de dimension $\leq n - 1$. Soit $i : Z \hookrightarrow X$ le complémentaire de U . Alors Z est de dimension $\leq n - 1$. La suite exacte

$$0 \rightarrow j_* j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$R a_{U!}(\mathcal{F}|_U) \rightarrow R a_{X!} \mathcal{F} \rightarrow R a_{Z!}(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow .$$

Par l'hypothèse de récurrence, $R a_{Z!}(\mathcal{F}|_Z)$ est I-entier inverse et $(n - 1)$ -entier inverse. Il suffit donc de vérifier la proposition pour $\mathcal{F}|_U$. Ceci résulte de la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p a_{Y!} R^q f_!(\mathcal{F}|_U) \Rightarrow R^{p+q} a_{U!}(\mathcal{F}|_U),$$

de l'hypothèse de récurrence appliquée aux fibres de f et du cas d'une droite affine déjà traité. \square

La proposition suivante est un analogue de 3.6.

Proposition 4.4. *Soient X un schéma régulier de type fini sur η de dimension 1, D un diviseur positif régulier. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur U , entier inverse, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_*\mathcal{G}$ est I-entier inverse.*

Démonstration. Comme $\check{\mathcal{G}}$ est lisse, modérément ramifié sur X , entier, $Rj_*\check{\mathcal{G}}$ est I-entier en vertu de 3.8. Soit $i : D \hookrightarrow X$. D'après la dualité locale en dimension 1, $i^*R^1j_*\mathcal{G} \simeq (i^*j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$ est 1-entier inverse, $i^*j_*\mathcal{G} \simeq (i^*R^1j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$ est entier inverse. \square

La proposition suivante est un analogue de 3.8.

Proposition 4.5. *Soient X un schéma de type fini sur η , D un diviseur à croisements normaux. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur U , entier inverse, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_*\mathcal{G}$ est I-entier inverse.*

On déduit 4.5 de 4.4 de la même manière qu'on a déduit 3.8 de 3.6.

On déduit (2.5.3) de 4.5 de la même manière qu'on a déduit (2.5.1) de 3.8 en 4.2.

Remarque 4.6. L'assertion (2.6.1) (resp. (2.6.3)) pour f une immersion fermée découle de ce qui précède. En effet, soient $j : Y - X \hookrightarrow Y$ l'ouvert complémentaire, $K \in D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. I-entier inverse). On a le triangle distingué

$$Rf^!K \rightarrow f^*K \rightarrow f^*Rj_*j^*K \rightarrow .$$

En appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) à j , on obtient que $f^*Rj_*j^*K$ est entier (resp. I-entier inverse), donc $f^*Rj_*j^*K[-1]$ l'est aussi (resp. $(I-1)$ -entier inverse). Or f^*K est entier (resp. I-entier inverse). On en conclut que $Rf^!K$ l'est aussi. Cette démonstration donne un peu plus dans le cas entier inverse : pour $K \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}$, $R^a f^!K$ est $(a-1)$ -entier inverse, $a \geq 1$.

4.7. Démonstration de 2.7. On peut supposer X réduit. On fait une récurrence sur d_X . Le cas $d_X \leq 0$ est trivial. Pour $d_X \geq 1$, il suffit de montrer que pour $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), DK est entier inverse et $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. I-entier et $-d_X$ -entier et $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a+1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$). Prenons un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ régulier purement de dimension d_X tel que le complémentaire $i : V \hookrightarrow X$ soit de dimension $< d_X$ et que $K|_U$ soit lisse. Alors $D(j^*K) \simeq (j^*K)^\vee(d_X)[2d_X]$.

On a le triangle distingué

$$(4.7.1) \quad i_*D(i^*K) \rightarrow DK \rightarrow Rj_*D(j^*K) \rightarrow .$$

D'après (2.5.3) (resp. (2.5.1)), $Rj_*D(j^*K)$ est $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. $-d_X$ -entier). D'après l'hypothèse de récurrence, $i_*D(i^*K)$ l'est aussi. Donc DK est $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. $-d_X$ -entier).

On a le triangle distingué

$$j_!D(j^*K) \rightarrow DK \rightarrow i_*D(Ri^!K) \rightarrow .$$

Le terme $j_!D(j^*K) \in D^{[-2d_X, -2d_X]}$ est entier inverse (resp. I-entier). D'après 4.6, $Ri^!K$ est entier (resp. $R^0i^!K$ est entier inverse et $R^a i^!K$ est $(a-1)$ -entier inverse, $a \geq 1$). D'après l'hypothèse de récurrence, $D(Ri^!K)$ est entier inverse (resp. $\mathcal{H}^0(D(Ri^!K))$ est entier et $\mathcal{H}^a(D(Ri^!K))$ est $(a+1)$ -entier, $a \leq -1$, en vertu de la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(D(R^{-q}i^!K)) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(DRi^!K).$$

Donc DK est entier inverse (resp. I-entier et $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a+1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$). \square

Démonstration de 2.5. Les assertions (2.5.1) et (2.5.3) sont déjà démontrées en 4.2 et 4.5. Si f est séparé, alors (2.5.2) et (2.5.4) découlent de 2.4 et 2.7 : $Rf_* \simeq D_Y Rf_! D_X$ induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X)_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\ D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{-d_X\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer (2.5.4) sans supposer f séparé. Pour cela, prenons un recouvrement ouvert affine $W \rightarrow X$. Soit $g_* : \text{cosq}_0(W/X)_* \rightarrow X$. Alors $Rf_* \simeq Rf_* Rg_* g_*^*$, et il suffit d'appliquer le résultat du cas séparé. \square

Remarque. Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) découlent de 2.7 : $Rf^! \simeq D_X f^* D_Y$ induit

$$\begin{aligned} D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}}, \\ D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{-d_Y\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{-d_Y\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Dans le cas f quasi-fini, on peut améliorer (2.5.2) comme suit.

Proposition 4.8. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini séparé de schémas de type fini sur η avec $d_X = \dim X \geq 1$. Alors Rf_* envoie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}}$ dans $D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(I+1-d_X)\text{-ent}}$.*

Démonstration. Par le théorème principal de Zariski, on peut supposer que f est une immersion ouverte dominante. Soit $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier. On a le triangle distingué

$$i_* Ri^! f_! K \rightarrow f_! K \rightarrow Rf_* K \rightarrow,$$

où $i : Y - X \hookrightarrow Y$ est le fermé complémentaire. Il suffit donc d'appliquer (2.6.2). \square

La proposition suivante généralise [DE06, 0.4].

Proposition 4.9. *Soient $i : X \hookrightarrow Y$ une immersion de schémas de type fini sur η avec Y régulier, $d_Y = \dim Y$, $d_c = \text{codim}(X, Y)$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse. Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction vérifiant*

$$\epsilon(a) = \begin{cases} d_c & \text{si } 2d_c \leq a < d_c + d_Y, \\ a + 1 - d_Y & \text{si } d_c + d_Y \leq a < 2d_Y, \\ d_Y & \text{si } a = 2d_Y. \end{cases}$$

Alors $Ri^! \mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse).

Démonstration. On va montrer que pour toute partie fermée W de X , $Ri_W^! \mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse), où $i_W : W \hookrightarrow Y$. Ici on a muni W de la structure de schéma réduit induite. On fait une récurrence noethérienne. Le cas $W = \emptyset$ est trivial. Pour $W \neq \emptyset$, on prend un ouvert régulier irréductible $j : U \hookrightarrow W$. Soit $i_Z : Z \hookrightarrow W$ son complémentaire. On a le triangle distingué

$$i_{Z*} Ri_Z^! Ri_W^! \mathcal{G} \rightarrow Ri_W^! \mathcal{G} \rightarrow Rj_* j^* Ri_W^! \mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 3.2, $j^* Ri_W^! \mathcal{G} = R(i_W j)^! \mathcal{G} \simeq \mathcal{G}(-d)[-2d]$, où $d = \text{codim}(U, Y) \geq d_c$. Si $d_U = \dim U = 0$, alors $Rj_* j^* Ri_W^! \mathcal{G}$ est ϵ -entier car $\epsilon(2d) \leq d$; si $d_U \geq 1$, alors d'après (2.5.1) et 4.8, $Rj_* j^* Ri_W^! \mathcal{G}$ est d -entier et $(I + 1 - d - d_U)$ -entier, donc ϵ -entier, compte tenu du fait que $d + d_U \leq d_Y$. (Resp. d'après (2.5.3), $Rj_* j^* Ri_W^! \mathcal{G}$ est $(I - d)$ -entier inverse, donc $(I - d_c)$ -entier inverse.) D'après l'hypothèse de récurrence, $Ri_Z^! Ri_W^! \mathcal{G} = R(i_W i_Z)^! \mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse). Donc $Ri_W^! \mathcal{G}$ l'est aussi. \square

4.10. Démonstration de 2.6. Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) sont traitées plus haut. Pour le reste, on fait une récurrence sur d_Y . Le cas $d_Y < 0$ est clair. Pour $d_Y \geq 0$, on peut supposer Y réduit. Soit $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse). Il existe un ouvert régulier U de Y de complémentaire W de dimension $\leq d_Y - 1$ tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse. On considère le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X_U & \xrightarrow{j'} & X & \xleftarrow{i'} & X_W \\ \downarrow f_U & & \downarrow f & & \downarrow f_W \\ U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & W \end{array}$$

On a le triangle distingué

$$(4.10.1) \quad i'_* Rf_W^! Ri^! \mathcal{G} \rightarrow Rf^! \mathcal{G} \rightarrow Rj'_* Rf_U^! j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 4.6, $Ri^! \mathcal{G}$ est entier (resp. I -entier inverse), donc $Rf_W^! Ri^! \mathcal{G}$ est $-d_r$ -entier (resp. $(I + d_r)$ -entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence. Il reste à considérer $Rf_U^! (\mathcal{G}|_U)$.

Il suffit de montrer que pour Y régulier et $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse, $Rf^! \mathcal{G}$ est $-d_r$ -entier (resp. $(I + d_r)$ -entier inverse). Le problème étant local sur Y , on peut supposer Y irréductible et que f se factorise en $X \xrightarrow{i_X} \mathbb{A}_Y^n \xrightarrow{p} Y$, où i_X est une immersion fermée. \mathbb{A}_Y^n est irréductible [EGAIV, 4.5.8], donc biéquadimensionnel [EGAIV, 5.2.1], donc $\text{codim}(X, \mathbb{A}_Y^n) = n + d_Y - d_X \geq n - d_r$, car $d_X \leq d_Y + d_r$. Il suffit donc d'appliquer 4.9 à i_X et $Rp^! \mathcal{G}[-2n] = p^* \mathcal{G}(n)$. \square

4.11. Démonstration de 2.8. Les assertions (2.8.2) et (2.8.4) découlent de 2.7 :

$$R\mathcal{H}om_X(-, -) \simeq D_X(- \otimes D_X -)$$

induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{(\text{Id}, D_X)} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\ D_c^b(X)_{\text{ent}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{(\text{Id}, D_X)} D_c^b(X)_{\text{ent}}^{\text{op}} \times D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^{\text{op}} \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Pour le reste, il suffit de montrer que pour $K, L \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, K entier inverse, L entier (resp. K entier, L entier inverse), $R\mathcal{H}om(K, L)$ est entier (resp. I -entier inverse). Par dévissage de K , on se ramène à supposer K de la forme $j_! \mathcal{G}$, où $j : Y \hookrightarrow X$ une immersion, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier inverse (resp. entier) lisse. Alors

$$R\mathcal{H}om_X(j_! \mathcal{G}, L) \simeq Rj_* R\mathcal{H}om_Y(\mathcal{G}, Rj^! L).$$

Il suffit d'appliquer (2.6.1) et (2.5.1) (resp. (2.6.3) et (2.5.3)). \square

5 Variantes et cycles proches

Variante 5.1. Soient k un corps fini, l un nombre premier $\neq \text{car}(k)$. Soit X un schéma de type fini sur k . Soit $r \in \mathbb{Q}$. On fixe un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$. On dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau \mathcal{F} est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout point géométrique \bar{x} au-dessus d'un point fermé x de X , et toute valeur propre α du Frobenius géométrique $F_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$ agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas du choix de ι . On définit l'intégralité pour $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de manière analogue à 2.2.

On a des résultats similaires pour les diverses opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9. Le cas entier de l'analogue de 2.4 est un théorème de Deligne [SGA7, XXI 5.2.2]. Les démonstrations des autres résultats sont similaires à celles données aux §§ 3 et 4.

Variante 5.2. Soient R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini $k = \mathbb{F}_p$, K son corps des fractions, $S = \text{Spec} R$, $\eta = \text{Spec} K$, $s = \text{Spec} k$. Soit X un schéma de type fini sur s . On a un topos $X \times_s \eta$ [SGA7, XIII 1.2.4]. Rappelons qu'un faisceau d'ensembles sur $X \times_s \eta$ est un faisceau sur $X_{\bar{s}}$ muni d'une action continue [ibid., 1.1.2] de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, compatible à l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $X_{\bar{s}}$ (via $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k)$). Fixons un nombre premier $l \neq p$. Soit $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour $x \in X$, soit $\Phi_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x)) \times_{\text{Gal}(\overline{k}/k)} \text{Gal}(\overline{K}/K)$ un relèvement du Frobenius géométrique $F_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x))$. D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On fixe $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$. On dit que \mathcal{F} est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout $x \in |X|$ et toute valeur propre α de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On définit l'intégralité pour $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de manière analogue à 2.2.

Toute section continue σ de $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ induit un foncteur exact

$$\sigma^* : D_c^b(X \times_s \eta, \bar{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_l).$$

Un complexe $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si σ^*K l'est. Comme σ^* commute aux six opérations et à la dualité, on déduit de 5.1 des résultats similaires pour ces opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9.

Soient S, η, s, l comme dans 5.2. Le résultat principal de ce § est le suivant.

Théorème 5.3. *Soit X un schéma de type fini sur S . Le foncteur des cycles proches*

$$R\Psi_X : D_c^b(X_\eta, \bar{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)$$

induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X_\eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}}, \\ D_c^b(X_\eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \bar{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

5.4. Soient $S = \text{Spec } R$ un trait hensélien quelconque, η son point générique, s son point fermé. On va garder ces notations jusqu'en 5.7.

Définition 5.5. (a) Soient X un S -schéma de type fini, Z une partie fermée contenant X_s . On dit que le couple (X, Z) est *semi-stable* si, localement pour la topologie étale, il est de la forme

$$(\text{Spec } R[t_1, \dots, t_n] / (t_1 \dots t_r - \pi), Z),$$

où π est une uniformisante de R , Z est défini par l'idéal $(t_1 \dots t_s)$, $1 \leq r \leq s \leq n$. Le couple est dit *strictement semi-stable* s'il est semi-stable et si Z est la somme d'une famille finie de diviseurs réguliers de X .

(b) Soit X un S -schéma de type fini. On dit que X est *strictement semi-stable* si (X, X_s) est un couple strictement semi-stable.

Soit (X, Z) un couple strictement semi-stable avec $Z = \sum_{i \in I} D_i$, $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers. Alors $X_s = \bigcup_{i \in I - J} D_i$, où $J = \{i \in I \mid D_i \not\subset X_s\}$. Soit $H = \bigcup_{j \in J} D_j$ la réunion des composantes horizontales. Alors $Z = X_s \cup H$.

Nous établirons d'abord 5.3 dans le cas semi-stable. Nous aurons besoin pour cela des points (ii) et (iii) du lemme suivant (la partie (i) est utilisée dans la preuve de (ii)) :

Lemme 5.6. *Soient (X, Z) un couple strictement semi-stable sur S , $Z = \sum_{i \in I} D_i$ avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers, J comme plus haut, $U = X - Z$, u l'inclusion $U \hookrightarrow X_\eta$, $\Lambda = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m inversible sur S , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$ localement constant, modérément ramifié sur X .*

(i) Soient $i \in J$, $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$, $D_{i, U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc}
 D_{i, U_{(i)}} & \xrightarrow{j^{(i)}} & (D_i)_\eta & \xrightarrow{\quad} & D_i & \longleftarrow & (D_i)_s \\
 \downarrow \iota'_i & & \downarrow (i)_\eta & & \downarrow \iota_i & & \downarrow (i)_s \\
 U \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} & \xrightarrow{j^{(i)}} & X_\eta & \xrightarrow{\quad} & X & \longleftarrow & X_s \\
 & \searrow u & & & & & &
 \end{array}$$

Alors la flèche

$$(5.6.1) \quad \alpha : (i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota'_i{}^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

composée de $(i)_s^* R\Psi_X (Ru_* \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} (i)_\eta^* (Ru_* \mathcal{G})$ [SGA7, XIII (2.1.7.2)] et du changement de base $R\Psi_{D_i} (i)_\eta^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota'_i{}^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$ est un isomorphisme.

(ii) Soient $i \in I - J$, $U_{(i)}$, $D_{i, U_{(i)}}$ comme plus haut, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & U_{(i)} & \longleftarrow & D_{i, U_{(i)}} \\
 \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow j^{(i)} \\
 & & & & D_i \\
 & & & & \downarrow (i)_s \\
 X_\eta & \xrightarrow{\quad} & X & \longleftarrow & X_s
 \end{array}$$

Alors $R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \simeq \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(D_{i, U_{(i)}} \times_s \eta, \Lambda)$ est lisse, modérément ramifié sur D_i , et le morphisme

$$(5.6.2) \quad \beta : (i)_s^* R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$$

déduit de $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow (i)_s^* Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$ [SGA7, XIII (2.1.7.1)] est un isomorphisme.

(iii) Supposons que $J = \emptyset$. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas tel que Y soit un S -schéma strictement semi-stable avec $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers de Y . Alors le morphisme

$$(5.6.3) \quad \gamma : f_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_Y f_\eta^* \mathcal{G}$$

[SGA7, XIII (2.1.7.2)] est un isomorphisme.

Le point (ii) est une généralisation partielle de [Ill02, 1.5 (a)].

Démonstration. On remplace tout d'abord le premier énoncé de (ii) par l'assertion que les faisceaux $R^q \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$, $q \in \mathbb{Z}$ sont lisses, modérément ramifiés sur D_i . L'annulation des cycles proches supérieures résultera de (iii).

La question est locale sur X . Soit y un point de X_s . On peut supposer que $y \in D_j$ pour tout $j \in I$. Soit π une uniformisante de R . Il existe un ouvert de X contenant y , lisse sur

$$\text{Spec } R[t_j]_{j \in I} / (\prod_{j \in I - J} t_j - \pi)$$

avec t_j définissant D_j . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de y , un revêtement fini $g : \tilde{X} = X[T_j]_{j \in I} / (T_j^n - t_j)_{j \in I} \rightarrow X$ où n est un entier premier à l'exposant caractéristique de s , tel que $(g|U)^* \mathcal{G}$ se prolonge en un Λ -module localement constant constructible sur \tilde{X} . Comme \mathcal{G} s'injecte dans $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$ et le quotient \mathcal{G}_1 est modérément ramifié sur X , on peut itérer cette construction. Pour tout $N \geq 1$, on obtient, quitte à rétrécir X , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^* \mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$.

Soient R_1 l'anneau obtenu en adjoignant à R les n -ièmes racines de l'unité, $R' = R_1[\Pi]/(\Pi^n - \pi)$, $S' = \text{Spec } R'$. Comme $R\Psi$ commute au changement de traits $S' \rightarrow S$ [SGA4½, Th. finitude, 3.7], il suffit de montrer le lemme pour $((g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G})_{S'} \simeq (g_{S'}|U_{S'})_*(g_{S'}|U_{S'})^* \mathcal{G}_{S'}$. Or $X_{S'} = \coprod_{\zeta} X_{\zeta}$, où X_{ζ} est lisse sur

$$\text{Spec } R[T_j]_{j \in J} / \left(\prod_{j \in I-J} T_j - \zeta \cdot \Pi \right),$$

ζ parcourt les n -ièmes racines de l'unité. Donc $(X_{S'}, g_{S'}^{-1}(Z_{S'})_{\text{red}})$ est un couple strictement semi-stable avec $(g_{S'}^{-1}(D_{i,S'})_{\text{red}})_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers.

On peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} qui se prolonge en un Λ -module localement constant constructible sur X , puis au cas $\mathcal{G} = \Lambda_U$ par la formule de projection.

L'assertion (iii) découle alors de la functorialité de [Ill04, 3.3]. Plus précisément, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} & \xrightarrow{\sim} & f_s^* R^q \Psi_X \Lambda_{X_\eta} \\ \downarrow \wedge^q \mathcal{H}^1_Y & & \downarrow \mathcal{H}^q_Y \\ \wedge^q R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} & \xrightarrow{\sim} & R^q \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) & \longrightarrow & f_s^* i_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} & \longrightarrow & f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \text{3.7(ii)} & & \downarrow \mathcal{H}^1_Y \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda_{Y_s}(-1) & \longrightarrow & i_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} & \longrightarrow & R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$, $j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$, $i_X : X_s \rightarrow X$, $i_Y : Y_s \rightarrow Y$. Les lignes du deuxième diagramme sont des suites exactes courtes et le carré à gauche est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) & \xrightarrow{d} & f_s^* \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{X_i}(-1) & \xrightarrow{\sim} & f_s^* i_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Lambda_{Y_s}(-1) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{Y_i}(-1) & \xrightarrow{\sim} & i_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{array}$$

où les flèches marquées d sont des diagonales et celles marquées c sont induites par les classes des diviseurs réguliers.

(i) Il s'agit de montrer l'assertion suivante :

(A) Le morphisme de foncteurs

$$(5.6.4) \quad (t_i)_s^* \mathbf{R}\Psi_X \mathbf{R}j_{(i)*} \rightarrow \mathbf{R}\Psi_{D_i} \mathbf{R}j'_{(i)*} \iota_i'^*$$

induit un isomorphisme sur $\mathbf{R}j_*^{(i)} \Lambda_U$.

On a un triangle distingué

$$(\iota_i')_* \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow \mathbf{R}j_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Comme (5.6.4) induit trivialement un isomorphisme sur le premier terme, (A) équivaut à

(B) Le morphisme (5.6.4) $\Lambda_{U_{(i)}}$

$$(5.6.5) \quad (t_i)_s^* \mathbf{R}\Psi_X \mathbf{R}j_{(i)*} \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow \mathbf{R}\Psi_{D_i} \mathbf{R}j'_{(i)*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}$$

est un isomorphisme.

On montre ces énoncés par récurrence sur $\#J \geq 1$. Le cas $\#J = 0$ est vide.

Dans le cas général, on montre d'abord que pour tout $j \in J - \{i\}$, (5.6.5) $|_{(D_{ij})_s}$ est un isomorphisme, où $D_{ij} = D_i \cap D_j$. Soit $U_{(ij)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i, j\}} D_h$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 D_{i, U_{(i)}} & \xrightarrow{j'_1} & D_{i, U_{(ij)}} & \xrightarrow{j_{2,i}} & (D_i)_\eta & \xrightarrow{\quad} & D_i \\
 \downarrow \iota'_i & & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & \downarrow \iota_i \\
 & & D_{ij, U_{(ij)}} & \xrightarrow{j'_2} & (D_{ij})_\eta & \xrightarrow{\quad} & D_{ij} \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \iota_{ij} \\
 U_{(i)} & \xrightarrow{j_1} & U_{(ij)} & \xrightarrow{j_2} & X_\eta & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \iota_{i,j} \\
 & & D_{j, U_{(ij)}} & \xrightarrow{j_{2,j}} & (D_j)_\eta & \xrightarrow{\quad} & D_j \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \iota_j
 \end{array}$$

D'après [SGA4, XII 4.4 (i)], le composé

$$\begin{aligned}
 & (t_{ij})_s^* \mathbf{R}\Psi_X \mathbf{R}(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\
 & \rightarrow (t_{j,i})_s^* \mathbf{R}\Psi_{D_i} \mathbf{R}(j_{2,i} j'_1)_* \Lambda_{D_i, U_{(i)}} \quad (5.6.5) |_{(D_{ij})_s} \\
 & \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Psi_{D_{ij}} \mathbf{R}j'_{2*} ((\mathbf{R}j'_{1*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}) |_{D_{ij, U_{(ij)}}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)}
 \end{aligned}$$

est égal au composé

$$\begin{aligned}
& (t_{ij})_s^* R\Psi_X R(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\
& \xrightarrow{\sim} (t_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} R(j_2, j)_* ((Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)} \\
& \rightarrow R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad (*) \\
& \xrightarrow{\sim} R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj'_{1*} \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad 3.7 \text{ (ii)}
\end{aligned}$$

où (*) est un morphisme de type (5.6.4) appliqué à $(Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}$. On a le triangle distingué

$$\Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow (Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow .$$

Donc l'hypothèse de récurrence (B) implique que (*) est un isomorphisme. Il en résulte que (5.6.5)| $(D_{ij})_s$ est un isomorphisme.

Il reste à montrer que (5.6.5)| $(V_i)_s$ est un isomorphisme, où

$$V_i = X - \bigcup_{h \in J - \{i\}} D_h.$$

Comme $(V_i)_\eta = U_{(i)}$, $j_{(i),V_i} = \text{Id}_{U_{(i)}}$, ceci découle de (iii).

(ii) Comme $U_{(i)}$ est lisse sur S , $R\Psi_{U_{(i)}} \Lambda_U \simeq \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}$, donc est modérément ramifié sur D_i .

Pour montrer que β est un isomorphisme, traitons d'abord deux cas spéciaux : (a) $\#J = 0$; (b) $\#(I - J) = \#J = 1$.

Dans le cas (a), on a $U = X_\eta$, $j_\eta = \text{Id}_{X_\eta}$. On pose $D = D_i$, $E = \bigcup_{j \in I - \{i\}} D_j$, $D^* = D - D \cap E = D_{i,U_{(i)}}$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
U & \xrightarrow{j^{(i)}} & X - E & \xleftarrow{t'_i} & D^* \\
\parallel & & \downarrow j_{(i)} & & \downarrow j'_{(i)} \\
X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{t_i} & D \\
& & & & \downarrow (t_i)_s \\
& & & & X_S
\end{array}$$

On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^q (t_i)_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_U & \xrightarrow{\sim} & (t_i)_s^* R^q \Psi_X \Lambda_U \\
\downarrow \wedge^q \mathcal{H}^1 \beta & & \downarrow \mathcal{H}^q \beta \\
\wedge^q R^1 j'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \Lambda_U & \longrightarrow & R^q j'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \Lambda_U \\
\uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
\wedge^q R^1 j'_{(i)*} \Lambda_{D^*} & \xrightarrow{\sim} & R^q j'_{(i)*} \Lambda_{D^*}
\end{array}$$

Donc il suffit de montrer que $\mathcal{H}^1 \beta$ est un isomorphisme.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \iota_i^* Rj_* \Lambda_U & \xrightarrow{p_1} & (\iota_i)_s^* R\Psi_X \Lambda_U \\
 & & \parallel & & \downarrow \beta \\
 \iota_i^* Rj^{(i)*} \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_1} & \iota_i^* Rj^{(i)*} Rj_*^{(i)} \Lambda_U & & \\
 \downarrow b_1 \simeq & & \downarrow b_2 & & \\
 Rj'_{(i)*} \iota_i^* \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_2} & Rj'_{(i)*} \iota_i^* Rj_*^{(i)} \Lambda_U & \xrightarrow{p_2} & Rj'_{(i)*} R\Psi_{X-E} \Lambda_U \\
 & \searrow \sim & & \nearrow &
 \end{array}$$

où b_1, b_2 sont des changements de base, r_1, r_2 sont induits par l'adjonction $\Lambda_{X-E} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U$. La flèche b_1 est un isomorphisme en vertu de 3.7 (ii). Le composé $p_2 r_2$ est induit de l'isomorphisme $\Lambda_{D^*} \xrightarrow{\sim} R\Psi_{X-E} \Lambda_U$, donc est un isomorphisme. On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* Rj^{(i)*} \Lambda_{X-E} &= \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}, \\
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* Rj_* \Lambda_U &= \Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}},
 \end{aligned}$$

$\mathcal{H}^1 (\iota_i)_s^* R\Psi_X \Lambda_U$ est le quotient de $\Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}$ par Λ_{D_i} inclus diagonalement, $\mathcal{H}^1 r_1$ est l'inclusion dans le second membre, $\mathcal{H}^1 p_1$ est la projection. Donc $\mathcal{H}^1 (p_1 r_1)$ est un isomorphisme. Il s'en suit que $\mathcal{H}^1 \beta$ est un isomorphisme. D'où (a).

Dans le cas (b), on a $D_i = X_s$, $(\iota_i)_s = \text{Id}_{X_s}$, $H = D_j$ où j est l'élément de J . On pose $V = U_{(i)} = X - H$, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & V & \xleftarrow{i_v} & V_s \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow v_s \\
 X_\eta & \xrightarrow{\quad} & X & \xleftarrow{i} & X_s \\
 \nearrow & & \nearrow h & & \nearrow \\
 H_\eta & \xrightarrow{\quad} & H & \xleftarrow{\quad} & H_s
 \end{array}$$

On a le triangle distingué

$$i^* Rv_* \Lambda_V \xrightarrow{\beta'} R\Psi_X Rv_* \Lambda_U \rightarrow R\Phi_X Rv_* \Lambda_V \rightarrow .$$

On a

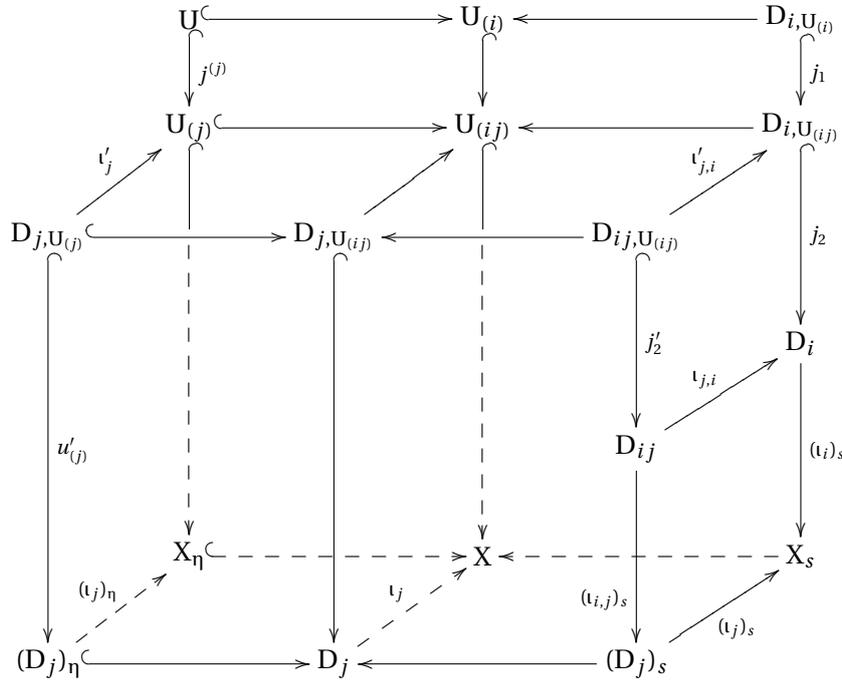
$$R^q v_* \Lambda_V = \begin{cases} \Lambda_X & \text{si } q = 0, \\ h_* \Lambda_H(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $R\Phi_X R^q \nu_* \Lambda_V = 0$, pour tout q . Donc $R\Phi_X R \nu_* \Lambda_V = 0$, β' est un isomorphisme. Par ailleurs, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} i^* R \nu_* \Lambda_V & \xrightarrow{\beta'} & R\Psi_X R u_* \Lambda_U \\ \text{3.7 (ii)} \downarrow \simeq & & \downarrow \beta \\ R \nu_{s*} i_V^* \Lambda_V & \xrightarrow{\sim} & R \nu_{s*} R\Psi_V \Lambda_U \end{array}$$

Donc β est un isomorphisme. D'où (b).

Pour le cas général, procédons par récurrence sur $\#J$. Le cas $\#J = 0$ est le cas (a) traité plus haut. Supposons $\#J \geq 1$. Prenons $j \in J$, d'où un diagramme commutatif



On a un diagramme commutatif dans $D_c^b(D_{ij} \times_s \eta, \Lambda)$

(†)

$$\begin{array}{ccccc} \iota_{j,i}^* (\iota_i)_s^* R\Psi_X R u_* \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_1} & \iota_{j,i}^* R j_{2*} R\Psi_{U^{(ij)}} R j_*^{(j)} \Lambda_U & \xrightarrow{\sim} & \iota_{j,i}^* R j_2 j_{1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\ \parallel & & \downarrow \text{chg}^t \text{ de base} & & \simeq \downarrow \text{3.7 (i)} \\ (\iota_{i,j})_s^* (\iota_j)_s^* R\Psi_X R u_* \Lambda_U & & R j_{2*} \iota'_{j,i}{}^* R\Psi_{U^{(ij)}} R j_*^{(j)} \Lambda_U & \xrightarrow{\sim} & R j_{2*} \iota'_{j,i}{}^* R j_{1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\ \simeq \downarrow \text{(i)} & & \simeq \downarrow \text{(i)} & & \\ (\iota_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} R u'_{(j)*} \iota'_j{}^* R j_*^{(j)} \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_2} & R j_{2*} R\Psi_{D_{j,U^{(ij)}}} \iota'_j{}^* R j_* \Lambda_U & & \end{array}$$

où $\beta|_{D_{ij}}$ est le composé des deux flèches de la première ligne de (†), β_1 est induit par une flèche de type (5.6.2) et β_2 est une flèche de type (5.6.2). La commutativité du carré

à droite est claire et celle du carré à gauche se voit en appliquant 5.7 au carré

$$\begin{array}{ccc} D_{j,U_{(ij)}} & \longrightarrow & U_{(ij)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_j & \longrightarrow & X \end{array}$$

La flèche β_2 est un isomorphisme en vertu de l'hypothèse de récurrence et du triangle distingué

$$\Lambda_{D_{j,U_{(j)}}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_{j,U_{(j)}}} \rightarrow \iota_j'^* Rj_* \Lambda_U \rightarrow .$$

Donc $\beta|_{D_{ij}}$ est un isomorphisme. Il reste à montrer que $\beta|(D_i - D_{ij})$ est un isomorphisme, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence. \square

Lemme 5.7. *Soient*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

un carré commutatif de S -schémas, Λ un anneau. Alors on a un diagramme commutatif de foncteurs $D^+(X_\eta, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_s \times_s \eta, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccc} & g_s^* Rf_{s*} R\Psi_X & \longrightarrow & Rf'_{s*} h_s^* R\Psi_X \\ & \nearrow & & \searrow \\ g_s^* R\Psi_Y Rf_{\eta*} & & & Rf'_{s*} R\Psi_{X'} h_{\eta}^* \\ & \searrow & & \nearrow \\ & R\Psi_{Y'} g_{\eta}^* Rf_{\eta*} & \longrightarrow & R\Psi_{Y'} Rf'_{\eta*} h_{\eta}^* \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des changements de base, les flèches montantes sont [SGA7, XIII (2.1.7.1)], les flèches descendantes sont [ibid., XIII (2.1.7.2)].

Démonstration. Soient $K = \kappa(\eta)$, \bar{K} une clôture séparable de K , $\bar{\eta} = \text{Spec } \bar{K}$, \bar{S} le normalisé de S dans $\bar{\eta}$. On ajoute une barre au-dessus pour le changement de base $\bar{S} \rightarrow S$. On note $i : \bar{s} \rightarrow \bar{S}$, $j : \bar{\eta} \rightarrow \bar{S}$. Il suffit de montrer la commutativité du diagramme de

foncteurs $D^+(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_{\bar{s}}, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_{\bar{s}}^* Rf_{\bar{s}*} i_X^* Rj_{X*} & \longrightarrow & Rf'_{\bar{s}*} h_{\bar{s}}^* i_X^* Rj_{X*} \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 & g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* \bar{h}^* Rj_{X*} \\
 & \sim & & & \sim \\
 g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & i_Y^* \bar{g}^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & \longrightarrow & i_Y^* Rf'_{\bar{s}*} \bar{h}^* Rj_{X*} & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* \\
 & \sim & & & \searrow & & \nearrow \\
 & i_{Y'}^* \bar{g}^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & & i_{Y'}^* Rf'_{\bar{s}*} Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* & & \\
 & \sim & & & \sim & & \\
 & & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} g_{\bar{\eta}}^* Rf_{\bar{\eta}*} & \longrightarrow & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} Rf'_{\bar{\eta}*} h_{\bar{\eta}}^* & &
 \end{array}$$

où toutes les flèches sont des changements de base. La commutativité de la cellule en haut (resp. en bas) résulte de [SGA4, XII 4.4 (i)] (resp. [SGA4, XII 4.4 (ii)]). Les commutativités des deux autres cellules sont triviales. \square

Proposition 5.8. Soient S comme dans 5.2, (X, Z) un couple semi-stable sur S , $U = X - Z$, $u : U \rightarrow X_{\bar{\eta}}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse, modérément ramifié sur X . Alors $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G}$ est I-entier (resp. I-entier inverse).

Démonstration. On peut supposer que (X, Z) est un couple strictement semi-stable sur S .

Traitons d'abord le cas particulier où Z est un diviseur régulier. Alors $Z = X_s$, $U = X_{\bar{\eta}}$, $u = \text{Id}$, X est lisse sur S . Soit $x \in |X_s|$. Quitte à faire un changement de traits étale, on peut supposer que $X \rightarrow S$ admet une section σ tel que $\sigma(s) = x$. D'après 5.6 (iii), $(R\Psi_X \mathcal{G})_x = \sigma_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \simeq R\Psi_S \sigma_{\bar{\eta}}^* \mathcal{G}$ est I-entier (resp. I-entier inverse), car $R\Psi_S$ s'identifie à l'identité.

Le cas général découle de 5.6 (ii), du cas spécial ci-dessus, et de la variante 5.2 de 3.8 (resp. 4.5) au-dessus de $s \times_s \eta$. \square

5.9. Pour la démonstration de 5.3, nous aurons besoin du lemme 5.10 ci-après, analogue de 4.1.

Soient S un trait hensélien excellent, X un S -schéma séparé de type fini, $U \subset X_{\bar{\eta}}$ une partie ouverte. Pour $f : S' \rightarrow S$ un morphisme fini de traits et $g : Y \rightarrow X_{S'}$ un morphisme propre de schémas, on considère la condition suivante :

5.9.1 On a $Y = Y_1 \amalg Y_2$, où Y_1 est strictement semi-stable sur S' , $g^{-1}(U) \subset Y_2$ et $(Y_2, Y_2 - g^{-1}(U))$ est un couple strictement semi-stable sur S' .

Lemme 5.10. (i) Il existe un morphisme fini de traits $S' \rightarrow S$ et un morphisme propre $r_0 : X'_0 \rightarrow X_{S'}$ de schémas vérifiant 5.9.1 (où $Y = X'_0$) et tels que $(r_0)_{\bar{\eta}}$ surjectif.

(ii) Pour $n \geq 0$, il existe un morphisme fini de traits $f : S' \rightarrow S$ et une augmentation de schéma simplicial n -tronqué s -scindé $r_{\bullet} : X'_{\bullet} \rightarrow X_{S'}$ tels que pour $0 \leq m \leq n$, f et r_m vérifient 5.9.1 (où $Y = X'_m$) et que $r_{\bullet, \bar{\eta}}$ soit un hyperrecouvrement propre n -tronqué.

Démonstration. (i) Cas X intègre et X_η géométriquement irréductible. Résulte de [dJ96, 6.5]. Notons que l'hypothèse dans [ibid.] que S soit complet peut être remplacée par l'excellence de S , voir II.3.8.

Cas général. On peut supposer que les composantes irréductibles de X_η sont géométriquement irréductibles. On fait une récurrence sur le nombre n de composantes irréductibles de X_η .

Si $n = 0$, alors X_η est vide. On prend $S' = S, X'_0 = \emptyset$. (i) est évident.

Pour $n \geq 1$, on prend une composante irréductible U_1 de X_η . Soit X_1 l'adhérence de U_1 dans X . C'est une composante irréductible de X . Soit X_2 la réunion des autres composantes irréductibles de X . On munit X_1 et X_2 des structures de schéma réduit induites. $(X_2)_\eta$ a $n - 1$ composantes irréductibles, qui sont géométriquement irréductibles. On a un morphisme fini surjectif $X_1 \amalg X_2 \rightarrow X$. On applique (i) à X_1 et obtient $S_1 \rightarrow S$ et $(X_1)'_0 \rightarrow (X_1)_{S_1}$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $(X_2)_{S_1}$.

(ii) On fait une récurrence sur n . Quand $n = 0$, (ii) dégénère en (i). Supposons donnés $S_n \rightarrow S$ et $r_\bullet^{(n)} : X_\bullet^{(n)} \rightarrow X_{S_n}$ vérifiant (ii). On applique (i) au schéma $(\text{cosq}_n(X_\bullet^{(n)}/X_{S_n}))_{n+1}$ sur S_n (avec U remplacé par son image inverse) et obtient un morphisme fini de traits $S' \rightarrow S_n$ et un morphisme $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n((X_\bullet^{(n)})_{S'}/X_{S'}))_{n+1}$ propre avec β_η surjectif vérifiant 5.9.1. Alors le $X_{S'}$ -schéma simplicial $(n + 1)$ -tronqué s -scindé $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{S'}$ associé au triplet $((X_\bullet^{(n)})_{S'}, N, \beta)$ vérifie les conditions de (ii) pour $n + 1$. \square

Démonstration de 5.3. La démonstration est parallèle à celle de (2.5.1).

On fait une récurrence sur $d = \dim X_\eta$. Le cas $d < 0$ est trivial.

Soit $d \geq 0$. Il faut montrer que pour $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), $R\Psi_X \mathcal{G}$ est entier (resp. I-entier inverse).

On peut supposer X_η réduit. On peut supposer X affine, donc séparé. Choisissons $j : U \hookrightarrow X_\eta$ ouvert régulier tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse et que son complémentaire $Z = X_\eta - U$ soit de dimension $< d$. Soient \overline{Z} l'adhérence de Z dans X , $i : \overline{Z} \hookrightarrow X$. On a le triangle distingué

$$R\Psi_X i_{\eta*} Ri_\eta^! \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Comme $R\Psi_X i_{\eta*} Ri_\eta^! \mathcal{G} \simeq i_{s*} R\Psi_Z Ri_Z^! \mathcal{G}$ est entier (resp. I-entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que $R\Psi_X Rj_* j^* \mathcal{G}$ est entier (resp. I-entier inverse).

Soit $\mathcal{H} = j^* \mathcal{G}$. $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{H}_\mathcal{O}$ lisse. Soit $p : U' \rightarrow U$ un revêtement étale surjectif qui trivialise $\mathcal{H}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O} . \mathcal{H} est facteur direct de $p_* p^* \mathcal{H}$, de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité (resp. la I-intégralité inverse) de $R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H}$. On factorise le composé $U' \xrightarrow{jp} X_\eta \hookrightarrow X$ en $U' \xrightarrow{j'} X' \xrightarrow{g} X$ où j' est une immersion ouverte et g propre.

$$R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H} \simeq Rg_* R\Psi_{X'} Rj'_{\eta*} p^* \mathcal{H}.$$

Donc il suffit de vérifier que pour X un schéma séparé de type fini sur S , $j : U \hookrightarrow X_\eta$ un ouvert et $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{G}_\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ constant, on a $R\Psi_X Rj_* \mathcal{G}$ entier (resp. I-entier inverse).

Soit $i \geq 0$. On applique 5.10 (ii) à j et $n = i + 1$. On obtient un morphisme fini de traits $f : S' \rightarrow S$ et un carré cartésien de schémas simpliciaux $(i + 1)$ -tronqués s -scindés

$$\begin{array}{ccc} U'_\bullet & \longrightarrow & X'_\bullet \\ \downarrow s_\bullet & & \downarrow r_\bullet \\ U_{S'} & \longrightarrow & X_{S'} \end{array}$$

où s_\bullet est un hyperrecouvrement propre $(i + 1)$ -tronqué et r_m vérifie 5.9.1, $0 \leq m \leq i + 1$. On note des changements de base de f encore par f .

$$f^* R\Psi_{X/S} Rj_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} f^* Rj_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} Rj_{S'}^* \mathcal{G}_{S'},$$

donc

$$\begin{aligned} \tau_{\leq i} f^* R\Psi_{X/S} Rj_* \mathcal{G} &\simeq \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} Rj_{S'}^* R s_{\bullet*} s_\bullet^* \mathcal{G}_{S'} \\ &= \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} R r_{\bullet*} R j'_{\bullet*} s_\bullet^* \mathcal{G}_{S'} \simeq \tau_{\leq i} R r_{\bullet*} R \Psi R j'_{\bullet*} s_\bullet^* \mathcal{G}_{S'}. \end{aligned}$$

Il suffit de voir que $R\Psi_{X'_m/S'} Rj'_{m*} s_m^* \mathcal{G}_{S'}$ est entier (resp. I-entier inverse), $0 \leq m \leq i$. Il suffit alors d'appliquer 5.8 (ce qui est licite, car les $s_m^* \mathcal{G}_{S'}$ sont modérés). \square

Variante 5.11. Soient S, η, s, l comme dans 5.2. Soient X un schéma de type fini sur S , $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour $r \in \mathbb{Q}$, \mathcal{F} est dit r -entier (resp. r -entier inverse) si \mathcal{F}_η et \mathcal{F}_s sont. De même pour les complexes. On prend $\delta(X) = \max\{\dim X_\eta + 1, \dim X_s\}$, $D_X = R\text{Hom}(-, R\alpha_X^1 \overline{\mathbb{Q}}_l(1)[2])$, où $\alpha_X : X \rightarrow S$. On a les analogues de 2.4 à 2.8, 4.8, 4.9, en remplaçant \dim par δ, d_r par

$$\max_{y \in |Y_\eta| \cup |Y_s|} \dim f^{-1}(y).$$

On a aussi un analogue de 3.8 en ajoutant l'hypothèse que (X, D) est un couple semi-stable sur S .

En effet, 2.4 pour S découle trivialement de 2.4 pour s et pour η . Pour l'analogue de 3.8, soit $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ lisse, entier, modérément ramifié sur X . D'après 3.8 pour η et 5.8, $Ru_* \mathcal{F}$ et $R\Psi_X Ru_* \mathcal{F}$ sont I-entiers, où $u : U \hookrightarrow X_\eta$. Soit $I = \text{Ker}(\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \rightarrow \text{Gal}(\bar{s}/s))$ le groupe d'inertie. C'est une extension de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$ par un pro- p -groupe P . La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q \Psi_X Ru_* \mathcal{F}) \Rightarrow i^* R^{p+q} j_* \mathcal{F},$$

où $i : X_s \rightarrow X$. Soit $R_t^q = (R^q \Psi_X Ru_* \mathcal{F})^P$. Si σ est un générateur de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$, on a

$$E_2^{0,q} = \text{Ker}(\sigma - 1, R_t^q), \quad E_2^{1,q} = \text{Coker}(\sigma - 1, R_t^q)(-1),$$

et $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. Donc $Rj_* \mathcal{F}$ est I-entier.

Les résultats (2.5.1) et (2.5.3) pour S découlent de ces résultats pour s et pour η et de 5.3, en imitant les arguments dans [SGA4½, Th. finitude, 3.11, 3.12] comme suit. Le cas spécial $f = j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$ résulte de 5.3 et de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q \Psi_Y -) \Rightarrow i_Y^* R^{p+q} j_{Y*} -,$$

où $i_Y : Y_s \rightarrow Y$. Traitons le cas général. Soit $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. I-entier inverse). Soient $i_X : X_s \rightarrow X$, $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$. On a les triangles distingués

$$\begin{aligned} i_{X*} R i_X^! L &\rightarrow L \rightarrow R j_{X*} j_X^* L \rightarrow, \\ R(f i_X)_* R i_X^! L &\rightarrow R f_* L \rightarrow R(f j_X)_* j_X^* L \rightarrow. \end{aligned}$$

D'après le cas spécial, $R j_{X*} j_X^* L$ est entier (resp. I-entier inverse), donc $R i_X^! L$ l'est aussi. Comme $f i_X = i_Y f_s$, $f j_X = j_Y f_\eta$, on conclut en appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) pour s et pour η et le cas spécial.

Une fois (2.5.1) et (2.5.3) établis pour S , on peut refaire 4.6 à 4.9 et 4.11, donnant la démonstration de 2.5 à 2.8, sauf (2.6.1) et (2.6.3). Les résultats (2.6.1) et (2.6.3) pour S découlent de leurs analogues pour s et pour η , en appliquant 4.6 pour S et (4.10.1) à $U = Y_\eta$, $W = Y_s$. Notons que (2.7.3) et (2.7.1) pour S peuvent aussi se déduire de leurs analogues pour s et pour η , en appliquant (4.7.1) à $U = X_\eta$, $V = X_s$.

Variante 5.12. On peut remplacer les faisceaux usuels partout par des faisceaux de Weil [Del80, 1.1.10]. Tous les résultats et les variantes qui précèdent restent valables.

Variante 5.13. Soit A un sous-anneau intégralement fermé de $\overline{\mathbb{Q}}_l$. On pose

$$A^{-1} = \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_l^\times \mid \alpha^{-1} \in A \right\}.$$

On fixe un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$. Avec les notation du § 1, pour $r \in \mathbb{Q}$, un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau \mathcal{F} sur un schéma X de type fini sur η est dit r - A -entier (resp. r - A -entier inverse) si pour tout $x \in |X|$, les valeurs propres de Φ_x sont dans $\iota(q^r)A$ (resp. $\iota(q^r)A^{-1}$), où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On dit que \mathcal{F} est A -entier (resp. A -entier inverse) s'il est 0- A -entier (resp. 0- A -entier inverse). On définit aussi la A -intégralité des complexes. Tous les résultats et les variantes restent valables pour ces notions.

Si A est de plus complètement intégralement clos [Bou85, V, § 1, n° 4, déf. 5] (en particulier si A est la fermeture intégrale d'un sous-anneau noethérien intégralement clos de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ [*ibid.*, exerc. 14]), alors d'après un lemme de Fatou [Ill06, 8.3], \mathcal{F} est r - A -entier si et seulement si pour tout $x \in |X|$ et tout entier $n \geq 1$, $\text{Tr}(\Phi_x^n, \mathcal{F}_x)$ appartient à $\iota(q^{nr})A$. Ce critère n'a pas d'analogue pour les faisceaux entiers inverses.

Si on prend pour A la fermeture intégrale de \mathbb{Z} dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on retrouve la notion d'intégralité dans ce qui précède.

Soit T un ensemble de nombres premiers. Si on prend pour A la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[1/t]_{t \in T}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on retrouve la notion de T -intégralité dans [SGA7, XXI 5] et [DE06].

6 Appendice : Intégralité sur les champs algébriques

Soient K un corps fini de caractéristique p ou un corps local de caractéristique résiduelle p , $\eta = \text{Spec} K$, l un nombre premier $\neq p$. Pour \mathcal{X} un η -champ algébrique

[LMB00, 4.1] de type fini, on note $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux constructibles sur le site lisse-étale de \mathcal{X} [*ibid.*, 12.1 (i)]. On dispose, par [LO08], d'une catégorie triangulée $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ munie d'une t -structure de cœur $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On écrira $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$ pour $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et $D_c(\mathcal{X})$ pour $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On dispose d'un formalisme de six opérations : pour $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de η -champs algébriques de type fini,

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{X}} : D_c(\mathcal{X})^{\text{op}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X}), \\ - \otimes - : D_c^-(\mathcal{X}) \times D_c^-(\mathcal{X}) &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X}), \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}}(-, -) : D_c^-(\mathcal{X})^{\text{op}} \times D_c^+(\mathcal{X}) &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X}), \\ Rf_* : D_c^+(\mathcal{X}) &\rightarrow D_c^+(\mathcal{Y}), \\ Rf! : D_c^-(\mathcal{X}) &\rightarrow D_c^-(\mathcal{Y}), \\ f^*, Rf^! : D_c(\mathcal{Y}) &\rightarrow D_c(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Si \mathcal{X} est un η -champ de Deligne-Mumford de type fini, $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$ s'identifie à la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux constructibles sur le site *étale* de \mathcal{X} [LMB00, 12.1 (ii)].

Définition 6.1. Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction. On dit que $L \in D_c(\mathcal{X})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si pour tout point $i : x \rightarrow \mathcal{X}$ avec $\kappa(x)$ une extension finie de K et tout $a \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^a(i^*L) \in \text{Mod}_c(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est $\epsilon(a)$ -entier (resp. $\epsilon(a)$ -entier inverse) (au sens de 2.1).

Si \mathcal{X} est un schéma de type fini sur η et $L \in D_c^b$, alors cette définition coïncide avec 2.2.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de η -champs algébriques de type fini. Si $M \in D_c(\mathcal{Y})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse), il en est de même de $f^*M \in D_c(\mathcal{X})$. La réciproque est vraie lorsque f est surjectif. Cela donne le critère suivant : $L \in D_c^b(\mathcal{X})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si pour tout (ou pour un) morphisme surjectif $g : X \rightarrow \mathcal{X}$ avec X un schéma de type fini sur η , g^*L est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) (au sens de 2.2). Pour $r \in \mathbb{Q}$, $- \otimes -$ induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}^{-1}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{r\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})$ avec \mathcal{F} lisse, si \mathcal{F} est entier inverse (resp. entier) et \mathcal{G} est entier (resp. entier inverse), on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}} \text{ (resp. } \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}).$$

On suppose dorénavant que \mathcal{X} est non vide. Rappelons qu'une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme surjectif lisse avec X un espace algébrique. On pose $c_{\mathcal{X}} = \min_P \dim P \in \mathbb{N}$, où P parcourt les présentations $P : X \rightarrow \mathcal{X}$, $\dim P = \sup_{x \in X} \dim_x P$ [LMB00, p. 98], $d_{\mathcal{X}} = \dim \mathcal{X} \in \mathbb{Z}$ [*ibid.*, (11.15)]. Par définition, $d_{\mathcal{X}} \geq -c_{\mathcal{X}}$. On a $c_{\mathcal{X}} = 0$ si et seulement si \mathcal{X} est un η -champs de Deligne-Mumford. On pose $c_r = \min \dim P \in \mathbb{N}$, où le minimum est pris sur tous les systèmes

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où P et Q sont des présentations et le carré est 2-cartésien, $d_r = \dim f = \max_{\xi} \dim \mathcal{X}_{\xi} \in \mathbb{Z}$, où ξ parcourt les points de \mathcal{Y} . On a $d_r \geq -c_r$. Rappelons que f est dit *relativement de Deligne-Mumford* [ibid., 7.3.3] si pour tout schéma affine Y et tout morphisme $Y \rightarrow \mathcal{Y}$, le produit fibré $Y \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ est un η -champ de Deligne-Mumford. On a $c_r = 0$ si et seulement si f est un morphisme relativement de Deligne-Mumford. On a $c_r \leq c_{\mathcal{X}} \leq c_{\mathcal{Y}} + c_r$, $d_r - c_{\mathcal{Y}} \leq d_{\mathcal{X}} \leq d_{\mathcal{Y}} + d_r$.

Proposition 6.2. *Le foncteur $D_{\mathcal{X}}$ induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\text{op}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}-\text{ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{\text{I-ent}^{-1}}^{\text{op}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(1-c_{\mathcal{X}})-\text{ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{\text{I-ent}}^{\text{op}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(1+d_{\mathcal{X}})-\text{ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\text{op}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{c_{\mathcal{X}}-\text{ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

De plus, pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X)_{\text{ent}^{-1}}$, $\mathcal{H}^a(D_{\mathcal{X}}\mathcal{F})$ est $(a - c_{\mathcal{X}} + 1)$ -entier, $a \leq c_{\mathcal{X}} - 1$.

Démonstration. On prend une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ purement de dimension $c_{\mathcal{X}}$ avec X un schéma de type fini sur η . On a $\dim X \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}}$. Pour $L \in D_c(\mathcal{X})$, $P^*D_{\mathcal{X}}L \simeq D_X R P^!L \simeq (D_X P^*L)(-c_{\mathcal{X}})[-2c_{\mathcal{X}}]$. Comme l'amplitude cohomologique de D_X est bornée, il suffit donc d'appliquer 2.7. \square

Proposition 6.3. *Le foncteur $Rf^!$ induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_r-\text{ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{\text{I-ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(1-d_{\mathcal{Y}}-c_{\mathcal{Y}}-c_r)-\text{ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{\text{I-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(1+d_r)-\text{ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{Y}}+c_{\mathcal{Y}}+c_r)-\text{ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Formons le diagramme à carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \xrightarrow{Q'} & \mathcal{X} \\ & & \downarrow f_Y & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où Q est une présentation purement de dimension $c_{\mathcal{Y}}$, P est une présentation purement de dimension c_r , Y est un schéma quasi-compact, X est un schéma affine (donc séparé sur Y). On a $\dim Y \leq d_{\mathcal{Y}} + c_{\mathcal{Y}}$, $\dim(f_Y \circ P) \leq d_r + c_r$. Pour $L \in D_c(\mathcal{Y})$,

$$(Q' \circ P)^* Rf^!L \simeq P^* Rf_Y^! Q^* L \simeq R(f_Y \circ P)^! Q^* L(-c_r)[-2c_r].$$

Il suffit alors d'appliquer 2.6. \square

Proposition 6.4. *Le foncteur Rf_* induit*

$$(6.4.1) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.2) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{I-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{\text{I-ent}^{-1}},$$

et $Rf_!$ induit

$$(6.4.3) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(6.4.4) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{d_r\text{-ent}^{-1}}.$$

Si f est relativement de Deligne-Mumford, Rf_* induit

$$(6.4.5) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}},$$

$$(6.4.6) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}^{-1}},$$

et $Rf_!$ induit

$$(6.4.7) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.8) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}}.$$

Démonstration. Soit $Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation avec Y est un schéma de type fini sur η . Pour (6.4.1) et (6.4.2), quitte à remplacer \mathcal{Y} par Y , on peut supposer que \mathcal{Y} est un schéma. On prend un hyperrecouvrement lisse $P_\bullet : X_\bullet \rightarrow \mathcal{X}$ où les X_n sont des schémas affines (donc séparés sur \mathcal{Y}). Pour $L \in D_c^+(\mathcal{X})$, $Rf_* \xrightarrow{\sim} Rf_* RP_\bullet * P_\bullet^* L$. Il suffit alors d'appliquer (2.5.1) et (2.5.3).

Pour les résultats concernant $Rf_!$, on peut supposer que \mathcal{Y} est le spectre d'un corps. On a $d_{\mathcal{X}} = d_r$. Alors (6.4.3) et (6.4.4) découlent du dernier alinéa et de 6.2 : $Rf_! = D_{\mathcal{Y}} Rf_* D_{\mathcal{X}}$ induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^+(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^+(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^-(\mathcal{Y})_{d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}. \end{aligned}$$

Pour (6.4.7) et (6.4.8), on est donc ramené au cas où \mathcal{X} est un η -champ de de Deligne-Mumford. On fait une récurrence sur $d_{\mathcal{X}}$. Il existe une immersion ouverte dominante $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ et un morphisme fini étale $\pi : U \rightarrow \mathcal{U}$, où U est un schéma affine [LMB00, 6.1.1]. Soient \mathcal{Z} le fermé complémentaire de \mathcal{U} dans \mathcal{X} , $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$. Pour $L \in D_c^-(\mathcal{X})$, le triangle distingué

$$j_! j^* L \rightarrow L \rightarrow i_* i^* L \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fj)_! j^* L \rightarrow Rf_! L \rightarrow R(fi)_! i^* L \rightarrow .$$

Comme $j^* L$ est facteur direct de $\pi_* \pi^* j^* L$, il suffit d'appliquer (2.4.1) et (2.4.3) à $R(fj\pi)_! (j\pi)^* L$ et l'hypothèse de récurrence à $R(fi)_! j^* L$.

Enfin, (6.4.5) et (6.4.6) résultent du dernier alinéa et de 6.2 : $Rf_* \simeq D_{\mathcal{Y}} Rf_! D_{\mathcal{X}}$ induit

$$\begin{aligned} D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}, \\ D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\text{op}} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.5. *L'assertion (2.5.2) est vraie sans hypothèse de séparation.*

Démonstration. C'est un cas particulier de (6.4.5). □

Remarque. (i) Le premier alinéa de la démonstration de 6.4 montre que Rf_* envoie $\text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}$ dans $D_c^+(\mathcal{Y})_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$, où

$$\epsilon(a) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}, \\ a - E\left(\frac{a - d_{\mathcal{X}} - c_{\mathcal{Y}}}{c_{\mathcal{X}} + 1}\right) & \text{si } a \geq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}. \end{cases}$$

Ici E est la fonction partie entière. Lorsque f n'est pas relativement de Deligne-Mumford, ceci légèrement améliore (6.4.2). On peut en déduire une légère amélioration de (6.4.3).

(ii) Si f est un morphisme séparé, représentable et quasi-fini [LMB00, 3.10.1] avec $d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}} \geq 1$, on a un analogue de 4.8 qui améliore (6.4.5) : Rf_* envoie $D_c^+(\mathcal{X})_{\text{I-ent}}$ dans $D_c^+(\mathcal{Y})_{(\text{I}+1-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}$.

Proposition 6.6. *Le foncteur $R\mathcal{H}om(-, -)$ induit*

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{I-ent}^{-1}}^{\text{op}} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{I-ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(\text{I}-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{I-ent}}^{\text{op}} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{I-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{\text{I-ent}^{-1}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\text{op}} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. On procède comme en 4.11. □

On peut aussi considérer l'intégralité sur les champs algébriques sur un trait excellent de corps résiduel fini, ce qui généralise 5.11. Les résultats sont similaires à ceux exposés dans ce §, avec des modifications appropriées des estimations de dimension.

Les variantes 5.12 et 5.13 restent toujours valables.

Bibliographie

- [BBD82] A. A. BEĪLISON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérisque, vol. 100, Soc. math. France, 1982, p. 5–171.
- [BO78] P. BERTHELOT & A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton Univ. Press, 1978.
- [Bou85] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, chapitres V à VII*, Éléments de mathématique, Masson, 1985.
- [DE06] P. DELIGNE & H. ESNAULT – « Appendix to “Deligne’s integrality theorem in unequal characteristic and rational points over finite fields” », *Ann. Math. (2)* **164** (2006), p. 726–730.

- [Del80] P. DELIGNE – « La conjecture de Weil : II », *Publ. math. IHÉS* **52** (1980), p. 137–252.
- [dJ96] A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. math. IHÉS* **83** (1996), p. 51–93.
- [Eke90] T. EKEDAHL – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 197–218.
- [Fuj02] K. FUJIWARA – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 153–183.
- [Gro57] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques points d’algèbre homologique », *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.
- [Ill02] L. ILLUSIE – « Sur la formule de Picard-Lefschetz », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 249–268.
- [Ill04] ———, « On semistable reduction and the calculation of nearby cycles », in *Geometric aspects of Dwork theory*, vol. II, Walter de Gruyter, 2004, p. 785–803.
- [Ill06] ———, « Miscellany on traces in l -adic cohomology: a survey », *Jpn. J. Math. (3)* **1** (2006), p. 107–136.
- [LMB00] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 39, Springer, 2000.
- [LO08] Y. LASZLO & M. OLSSON – « The six operations for sheaves on Artin stacks II: adic coefficients », *Publ. math. IHÉS* **107** (2008), p. 169–210.
- [Org03] F. ORGOGOZO – « Altérations et groupe fondamental premier à p », *Bull. Soc. math. France* **131** (2003), p. 123–147.
- [Ser98] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, 5^e éd., Hermann, 1998.
- [EGAIV] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas », *Publ. math. IHÉS* **20, 24, 28, 32** (1964–1967).
- [SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, dirigé par A. Grothendieck, Doc. math., vol. 3, Soc. math. France, 2003.
- [SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973.
- [SGA4½] P. DELIGNE – *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, 1977.
- [SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, I, dirigé par A. Grothendieck, II, par P. Deligne, N. Katz, Lecture Notes in Math., vol. 288, 340, Springer-Verlag, 1972–1973.

Partie II

Sur l'indépendance de l en cohomologie l -adique sur les corps locaux

Introduction

Dans les années 1980, Gabber a prouvé l'indépendance de l de la cohomologie d'intersection [Fuj02, Th. 1] : pour X un schéma propre sur un corps fini $k = \mathbb{F}_{p^f}$, équidimensionnel et $i \in \mathbb{Z}$, $\det(1 - tF_0^f, \mathrm{IH}^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l))$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$, indépendant de $l \neq p$. Ici \bar{k} est une clôture algébrique de k , $F_0 \in \mathrm{Aut}(\bar{k})$ est le Frobenius géométrique absolu qui envoie a sur $a^{1/p}$. Il déduit ce résultat d'un théorème général d'indépendance de l [ibid., Th. 2] : pour E une extension de \mathbb{Q} , il définit une notion de E -compatibilité pour les systèmes de complexes l -adiques ($l \neq p$) sur les schémas séparés de type fini sur k et établit la stabilité de cette E -compatibilité par les six opérations de Grothendieck.

L'objet de cet article est d'étudier l'indépendance de l sur un corps local K , par lequel on entend le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini. De façon précise, on définit une notion de E -compatibilité pour les systèmes de complexes l -adiques sur les schémas de type fini sur K . On prouve la stabilité de cette E -compatibilité par les opérations usuelles, notamment les six opérations et le foncteur des cycles proches $R\Psi$.

La E -compatibilité est sensible aux morphismes finis. Dans l'étude de la E -compatibilité, il est naturel d'utiliser les résultats de de Jong sur les altérations équivariantes [dJ97], ce qui amène à généraliser le problème au cas équivariant sous des actions de groupes finis.

Au § 1, après avoir fixé les notations, on définit la E -compatibilité pour les systèmes de complexes équivariants au-dessus d'un corps fini ou local et énonce la stabilité par les six opérations. La démonstration dans le cas d'un corps fini est donnée au § 2. En vue du théorème de Gabber de la stabilité de la E -compatibilité par les six opérations, il suffit d'appliquer une technique de Deligne-Lusztig qui permet de se débarrasser

des actions de groupes finis par descente galoisienne. Au § 3 on se réduit au cas des courbes. L'ingrédient essentiel est un raffinement [Vid04, 4.4], dû à Gabber, de résultats de de Jong, grâce auquel on se ramène au cas de Rj_*L_λ pour l'inclusion $j : U \rightarrow X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G -strict D dans un schéma régulier X et des complexes G -équivariants L_λ sur U à faisceaux de cohomologie lisses, modérément ramifiés le long de D . Dans le cas d'un corps fini, le cas des courbes étant déjà connu depuis Deligne [Del73, 9.8], on obtient une démonstration indépendante du théorème de Gabber. La fin de la démonstration des énoncés du § 1 dans le cas d'un corps local est donnée au § 4. On les déduit, à l'aide des résultats de de Jong, d'un cas particulier de la stabilité par $R\Psi$, que l'on traite en utilisant à nouveau la technique de Deligne-Lusztig. Le cas général de la stabilité par $R\Psi$ découle de ce cas particulier et encore une fois des résultats de de Jong.

Les schémas équivariants sont mieux compris dans le contexte de leurs champs quotients associés. Ce point est élucidé au § 5. On y donne aussi des généralisations des résultats d'indépendance de l aux champs algébriques.

Je remercie vivement L. Illusie, qui m'a donné d'innombrables conseils lors de la préparation de l'article. Je remercie aussi N. Katz pour sa suggestion d'utiliser la technique de Deligne-Lusztig. Je remercie enfin S. Morel et F. Orgogozo pour leurs longues listes de commentaires.

1 Indépendance de l et six opérations

1.1. Pour une catégorie \mathcal{C} , on note $\mathbf{Eq}(\mathcal{C})$ la catégorie des objets de \mathcal{C} munis d'une action d'un groupe fini à droite. Les objets sont les triplets (X, G, a) , où X est un objet de \mathcal{C} , G est un groupe fini, a est une action de G sur X à droite (i. e., $a : G^{\text{op}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ est un homomorphisme de groupes). On enlève a de la notation lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Un morphisme $(X_1, G_1) \rightarrow (X_2, G_2)$ est un couple (f, α) , où $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme de groupes, $f : X_1 \rightarrow X_2$ est un morphisme G_1 -équivalent de \mathcal{C} , l'action de G_1 sur X_2 étant induite par α . La condition de G_1 -équivalence signifie que pour tout $g \in G_1$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{a_g} & X_1 \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ X_2 & \xrightarrow{a_{\alpha(g)}} & X_2 \end{array}$$

est commutatif. Pour (X, G, a) un objet de $\mathbf{Eq}(\mathcal{C})$ et $g \in G$, $T_g = (a_g, h \mapsto g^{-1}hg)$ est un automorphisme de (X, G, a) . Ceci définit une action de G sur (X, G, a) à droite. Si les produits fibrés sont représentables dans \mathcal{C} , il en est de même dans $\mathbf{Eq}(\mathcal{C})$:

$$(X_1, G_1) \times_{(X, G)} (X_2, G_2) = (X_1 \times_X X_2, G_1 \times_G G_2).$$

On note $\mathbf{Gr.fini}$ la catégorie des groupes finis. Le foncteur projection $\mathbf{Eq}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Gr.fini}$ qui envoie (X, G) sur G est fibrant. On note $\mathbf{Eq}(\mathcal{C})_G$ sa fibre en G . Pour $\alpha : G \rightarrow H$

un homomorphisme de groupes finis,

$$\alpha^* : \mathbf{Eq}(\mathbf{C})_H \rightarrow \mathbf{Eq}(\mathbf{C})_G$$

est donné par $\alpha^*(Y, H, a) = (Y, G, a \circ \alpha^{\text{op}})$. Pour $\alpha : G \rightarrow H$ injectif, l'adjoint à gauche

$$\alpha_* : \mathbf{Eq}(\mathbf{C})_G \rightarrow \mathbf{Eq}(\mathbf{C})_H$$

de α^* existe dès que les sommes disjointes finies sont représentables dans \mathbf{C} . Pour l'expliciter, choisissons un système S de représentants de $\alpha(G) \setminus H$. Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{C})$, on a

$$(1.1.1) \quad \alpha_*(X, G) \simeq \left(\coprod_{s \in S} X_s, H \right),$$

où $X_s = X$ et l'action de $h \in H$ est donnée par $a_g : X_s \rightarrow X_t$, où $g \in G$ et $t \in S$ vérifient $sh = \alpha(g)t$. Rappelons qu'une flèche $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ dans $\mathbf{Eq}(\mathbf{C})$ est *cocartésienne* [SGA1, VI 10] si pour tout objet (Y', H) de $\mathbf{Eq}(\mathbf{C})_H$, l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_H((Y, H), (Y', H)) &\rightarrow \text{Hom}_\alpha((X, G), (Y', H)) \\ u &\mapsto u \circ (f, \alpha) \end{aligned}$$

est bijective.

1.1.2. Pour $(Y, H) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{C})$, si Y est la somme disjointe d'une famille finie d'objets $(X_j)_{j \in J}$ de \mathbf{C} , et s'il existe une action *transitive* de H sur J à droite telle que pour tout $h \in H$ et tout $j \in J$, $a_h|_{X_j} : X_j \rightarrow Y$ se factorise à travers l'inclusion $X_{jh} \hookrightarrow Y$, alors pour tout $j \in J$, l'inclusion $(X_j, G_j) \hookrightarrow (Y, H)$ est cocartésienne, où G_j est le stabilisateur de j dans H .

Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{C})$. On appelle *quotient* de X par G un objet Y de \mathbf{C} muni d'un morphisme $p : X \rightarrow Y$ invariant par G tel que $(X, G) \rightarrow (Y, \{1\})$ soit cocartésien, *i. e.*, tel que pour tout objet Z de \mathbf{C} , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Y, Z) &\rightarrow \text{Hom}(X, Z)^G \\ f &\mapsto f \circ p \end{aligned}$$

soit bijective. Pour $\alpha : G \rightarrow H$ un homomorphisme surjectif, si le quotient Y de X par $\text{Ker} \alpha$ existe, alors l'action de G sur X induit une action de H sur Y , et la flèche $(X, G) \rightarrow (Y, H)$ est cocartésienne. De plus, le quotient de X par $\text{Ker} \alpha$ existe si et seulement s'il existe une flèche cocartésienne de source (X, G) au-dessus de α . Cela est vrai pour $\alpha : G \rightarrow H$ un homomorphisme quelconque si les sommes disjointes finies sont représentables dans \mathbf{C} .

1.1.3. Soit $F : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$ un foncteur. Pour (X, G) un objet de $\mathbf{Eq}(\mathbf{C})$, on note $F_{(X, G)}$ la catégorie fibre de $\mathbf{Eq}(F) : \mathbf{Eq}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{Eq}(\mathbf{C})$ en (X, G) . Pour $(\mathcal{F}, G), (\mathcal{G}, G)$ deux objets de $F_{(X, G)}$,

G agit à gauche sur $\mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: pour $c \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $g \in G$, $gc \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow[\sim]{a_g} & \mathcal{F} \\ \downarrow gc & & \downarrow c \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[\sim]{a_g} & \mathcal{G} \end{array}$$

On a une bijection $\mathrm{Hom}_{F_{(X,G)}}((\mathcal{F}, G), (\mathcal{G}, G)) \simeq \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^G$.

1.2. Soit S un schéma noethérien. On note \mathbf{C}_S la catégorie des S -schémas de type fini et on pose $\mathbf{Eq}/S = \mathbf{Eq}(\mathbf{C}_S)$.

Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$. Rappelons que l'action de G est dite *admissible* [SGA1, V 1.7] si le quotient de X par G existe dans \mathbf{C}_S , ou, ce qui revient au même, si toute trajectoire de G dans X soit contenue dans un ouvert affine [ibid., 1.8]. Dans ce cas, le morphisme $X \rightarrow X/G$ est fini [ibid., 1.5].

Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$. Pour une partie Z de X . On note $G_d(Z)$ le stabilisateur de Z . Si x est un point de X , on appelle $G_d(x)$ *groupe de décomposition*. Ce groupe opère canoniquement à gauche sur le corps résiduel $\kappa(x)$, et le fixateur de $\kappa(x)$ est appelé *groupe d'inertie*, noté $G_i(x)$. [ibid., 2] On dit que l'action de G est *libre* si elle est admissible et si $G_i(x)$ est trivial pour tout $x \in X$. Dans ce cas, l'action de G fait de X un G -torseur sur X/G .

Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$. Si G agit transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X , alors pour tout $Y \in \pi_0(X)$, l'inclusion $(Y, G_d(Y)) \rightarrow (X, G)$ est cocartésienne.

1.3 Formalisme l -adique équivariant

Supposons que S soit régulier de dimension ≤ 1 . Soit l un nombre premier inversible sur S . On a un formalisme de faisceaux l -adiques sur les S -schémas séparés de type fini [Eke90, § 6]. Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. (Voir [LO08] pour un formalisme sans hypothèse de séparation.) Le formalisme l -adique dans [Eke90] marche aussi dans le cadre équivariant. On va le rappeler brièvement.

On choisit $F : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}_S$ un foncteur bifibré avec $F_X \simeq (X_{\text{ét}}^\sim)^{\mathrm{op}}$. Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, on définit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur (X, G) par $(X, G)^\sim = F_{(X,G)}^{\mathrm{op}}$ (1.1.3), qui est un topos. Un faisceau sur (X, G) est donc un faisceau \mathcal{F} sur X muni d'une action de G à gauche, compatible à l'action de G sur X . En d'autres termes, \mathcal{F} est muni d'une famille d'isomorphismes $(b_g : \mathcal{F} \rightarrow a_{g*} \mathcal{F})_{g \in G}$ telle que pour tous $g, h \in G$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{b_h} & a_{h*} \mathcal{F} & \xrightarrow{a_{h*} b_g} & a_{h*} a_{g*} \mathcal{F} \\ & \searrow & & & \parallel \\ & & & & (a_{gh})_* \mathcal{F} \end{array}$$

soit commutatif. Un morphisme $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de faisceaux sur (X, G) est un morphisme $c : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de faisceaux sur X , G -équivariant, i. e., tel que, pour tout $g \in G$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{b_g} & a_{g*} \mathcal{F}_1 \\ c \downarrow & & \downarrow a_{g*} c \\ \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{b_g} & a_{g*} \mathcal{F}_2 \end{array}$$

soit commutatif.

Soit Λ un anneau local artinien annihilé par une puissance de l . On note $\text{Mod}(X, G, \Lambda)$ la catégorie des faisceaux de Λ -modules sur $(X, G)^\sim$. Un Λ -module sur (X, G) est *constructible* si le Λ -module sur X sous-jacent est constructible. On note $\text{Mod}_c(X, G, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(X, G, \Lambda)$ formée des Λ -modules constructibles sur (X, G) . On note $D(X, G, \Lambda)$ la catégorie dérivée de $\text{Mod}(X, G, \Lambda)$, $D_c(X, G, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes à faisceaux de cohomologie dans $\text{Mod}_c(X, G, \Lambda)$.

Soient E un corps extension finie de \mathbb{Q}_l , \mathcal{O} son anneau des entiers, \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O} . On considère le système projectif $\mathcal{O}_\bullet = (\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose

$$\text{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}) = 2\text{-}\varprojlim_n \text{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n),$$

qui s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ des systèmes projectifs $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $M_n \in \text{Mod}(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ et $M_n \rightarrow M_m$ est une flèche dans $\text{Mod}(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ pour $n \geq m$. On note $D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ la catégorie dérivée de $\text{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$. Un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ est *essentiellement nul* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que la flèche $\mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ soit nulle. Un complexe $K \in D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ est *essentiellement nul* si $\mathcal{H}^i K$ est essentiellement nul pour tout $i \in \mathbb{Z}$; K est *essentiellement constant* s'il existe un complexe C de faisceaux de \mathcal{O} -modules de torsion sur $(X, G)^\sim$ et des flèches $L \rightarrow K$, $L \rightarrow (C \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ à cônes essentiellement nuls. On considère le foncteur

$$\begin{aligned} D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet) &\rightarrow D^-(X, G, \mathcal{O}_\bullet) \\ K &\mapsto (\mathcal{O}/\mathfrak{m})_{n \in \mathbb{N}} \otimes_{\mathcal{O}}^L K. \end{aligned}$$

On note $D^b(X, G, \mathcal{O})$ le quotient de la sous-catégorie pleine de $D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$, image inverse des complexes essentiellement constants, par la sous-catégorie épaisse, image inverse des complexes essentiellement nuls. Le foncteur

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{O}}^L \text{R}\varprojlim - : D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet) \rightarrow D^+(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m})$$

induit un foncteur conservatif [Eke90, 2.6, 2.7]

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{O}}^L - : D^b(X, G, \mathcal{O}) \rightarrow D^b(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}).$$

On note $D_c^b(X, G, \mathcal{O})$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X, G, \mathcal{O})$, image inverse de $D_c^b(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m})$. Elle est munie d'une t -structure canonique $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$, dont le cœur est $\text{Mod}_c(X, G, \mathcal{O})$ [Eke90, 3.5].

On pose $\text{Mod}_c(X, G, E) = \text{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} E$, $D_c^b(X, G, E) = D_c^b(X, G, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} E$. Enfin on pose $\text{Mod}_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) = 2\text{-}\varinjlim_E \text{Mod}_c(X, G, E)$, $D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) = 2\text{-}\varinjlim_E D_c^b(X, G, E)$, où E parcourt les extensions finies de \mathbb{Q}_l contenues dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de \mathbb{Q}_l . On note $K(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ le groupe de Grothendieck de $\text{Mod}_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, qui est aussi le groupe de Grothendieck de $D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Soit $R = \Lambda, \mathcal{O}, E$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_l$ comme plus haut. On choisit $F : F \rightarrow C_S$ un foncteur bi-fibré avec $F_X \simeq \text{Mod}_c(X, R)^{\text{op}}$ (resp. $F_X \simeq D_c^b(X, R)^{\text{op}}$). Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, on pose $\text{Mod}_c(X, G, R)_{\text{naïf}} = F_{(X, G)}^{\text{op}}$ (resp. $D_c^b(X, G, R)_{\text{naïf}} = F_{(X, G)}^{\text{op}}$) (1.1.3). On a une équivalence de catégories

$$\text{Mod}_c(X, G, R) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_c(X, G, R)_{\text{naïf}}$$

(resp. un foncteur

$$(1.3.1) \quad D_c^b(X, G, R) \rightarrow D_c^b(X, G, R)_{\text{naïf}}$$

t -exact pour les t -structures canoniques.)

Proposition 1.4. *Le foncteur (1.3.1) est une équivalence de catégories si $R = E$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_l$.*

Démonstration. Soient $K, L \in D_c^b(X, G, R)$. On note $f : (\text{pt}, G) \rightarrow (\text{pt}, \{1\})$. Le foncteur $\text{RHom}_{D_c^b(X, G, R)}(K, -)$ s'identifie au composé

$$D_c^b(X, G, R) \xrightarrow{\text{RHom}_{D_c^b(X, R)}(K, -)} D_c^b(\text{pt}, G, R) \xrightarrow{f_*} D_c^b(\text{pt}, R).$$

La suite spectrale de foncteur composé appliquée à L s'écrit

$$E_2^{pq} = H^p(G, \text{Hom}_{D_c^b(X, R)}(K, L[q])) \Rightarrow \text{Hom}_{D_c^b(X, G, R)}(K, L[p+q]).$$

Comme $H^p(G, M) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout R -espace vectoriel M , on a

$$\text{Hom}_{D_c^b(X, G, R)}(K, L) \simeq \text{Hom}_{D_c^b(X, R)}(K, L)^G.$$

Donc (1.3.1) est pleinement fidèle. Pour $K \in D^{[a, b]}(X, G, R)_{\text{naïf}}$, montrons par récurrence sur $b - a$ que K est dans l'image essentielle de (1.3.1). Pour $b - a \leq 0$, $K = \mathcal{F}[-a]$ pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, G, R)_{\text{naïf}}$. Pour $b - a \geq 1$, K est le cône de $(\tau_{\geq b} K)[-1] \rightarrow \tau_{\leq b-1} K$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tau_{\geq b} K \in D^{[b, b]}$ et à $\tau_{\leq b-1} K \in D^{[a, b-1]}$. \square

On renvoie à 5.2 pour une interprétation de $D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ (et des six opérations qu'on va définir) en termes du champ de Deligne-Mumford $[X/G]$.

1.5. Pour $K, L \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, G agit sur $K \otimes L$ et $\text{R}\mathcal{H}om(K, L)$ par

$$\begin{aligned} a_g^*(K \otimes L) &\xrightarrow{\sim} a_g^* K \otimes a_g^* L \xrightarrow{b_g \otimes b_g} K \otimes L, \\ a_g^* \text{R}\mathcal{H}om(K, L) &\xrightarrow{\sim} \text{R}\mathcal{H}om(a_g^* K, a_g^* L) \xrightarrow{\text{R}\mathcal{H}om(b_g^{-1}, b_g)} \text{R}\mathcal{H}om(K, L), \quad g \in G. \end{aligned}$$

Cela définit des foncteurs bi-exacts

$$\begin{aligned} - \otimes - &: D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \times D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l), \\ R\mathcal{H}om(-, -) &: D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)^{\text{op}} \times D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l). \end{aligned}$$

Soit $(f, \alpha) : (X_1, G_1) \rightarrow (X_2, G_2)$ un morphisme dans \mathbf{Eq}/S (resp. un morphisme dans \mathbf{Eq}/S avec f séparé). Pour $L \in D_c^b(X_2, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, G_1 agit sur f^*L (resp. $Rf^!L$) par

$$\begin{aligned} a_g^* f^* L &\simeq f^* a_{\alpha(g)}^* L \xrightarrow{f^* b_g} L \\ (\text{resp. } a_g^* Rf^! L &\simeq Rf^! a_{\alpha(g)}^* L \xrightarrow{Rf^! b_g} L), \quad g \in G_1. \end{aligned}$$

Cela définit un foncteur exact

$$(f, \alpha)^* \text{ (resp. } R(f, \alpha)^!) : D_c^b(X_2, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_1, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Si $(g, \beta) : (X_2, G_2) \rightarrow (X_3, G_3)$ est un deuxième morphisme dans \mathbf{Eq}/S (resp. un deuxième morphisme dans \mathbf{Eq}/S avec g séparé), alors $(gf, \beta\alpha)^* \simeq (f, \alpha)^* (g, \beta)^*$ (resp. $R(gf, \beta\alpha)^! \simeq R(f, \alpha)^! R(g, \beta)^!$).

On va définir un foncteur exact

$$R(f, \alpha)_* \text{ (resp. } R(f, \alpha)_!) : D_c^b(X_1, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_2, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l),$$

adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f, \alpha)^*$ (resp. $R(f, \alpha)^!$). Traitons d'abord trois cas spéciaux.

(i) Cas $G_1 = G_2 = G$, $\alpha = \text{Id}_G$. Pour $K \in D_c^b(X_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on pose $R(f, \text{Id}_G)_* K = Rf_* K$ (resp. $R(f, \text{Id}_G)_! K = Rf_! K$), sur lequel G agit par

$$\begin{aligned} Rf_* K &\xrightarrow{Rf_* b_g} Rf_* a_{g^*} K = a_{g^*} Rf_* K \\ (\text{resp. } Rf_! K &\xrightarrow{Rf_! b_g} Rf_! a_{g^*} K \simeq a_{g^*} Rf_! K), \quad g \in G. \end{aligned}$$

Le foncteur $R(f, \text{Id}_G)_*$ (resp. $R(f, \text{Id}_G)_!$) ainsi défini est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f, \text{Id}_G)^*$ (resp. $R(f, \text{Id}_G)^!$).

(ii) Cas $X_1 = X_2 = X$, $f = \text{Id}_X$, α surjectif. Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X, G_1, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$, on définit $(\text{Id}_X, \alpha)_* \mathcal{F}$ (resp. $(\text{Id}_X, \alpha)_! \mathcal{F}$) comme le sous-faisceau de \mathcal{F} des invariants (resp. le faisceau quotient de \mathcal{F} des coinvariants) par $\text{Ker } \alpha$. Il est muni d'une action de G_2 induite par l'action de G_1 sur \mathcal{F} . Le foncteur $(\text{Id}_X, \alpha)_*$ (resp. $(\text{Id}_X, \alpha)_!$) : $\text{Mod}(X, G_1, \mathcal{O}_\bullet) \rightarrow \text{Mod}(X, G_2, \mathcal{O}_\bullet)$ ainsi obtenu est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(\text{Id}_X, \alpha)^*$, donc est exact à gauche (resp. à droite) et se dérive en $R(\text{Id}_X, \alpha)_* : D^+(X, G_1, \mathcal{O}_\bullet) \rightarrow D^+(X, G_2, \mathcal{O}_\bullet)$ (resp. $L(\text{Id}_X, \alpha)_! : D^-(X, G_1, \mathcal{O}_\bullet) \rightarrow D^-(X, G_2, \mathcal{O}_\bullet)$). Cela induit un foncteur $(\text{Id}_X, \alpha)_*$ (resp. $(\text{Id}_X, \alpha)_!$) : $D_c^b(X, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ adjoint à droite (à gauche) de $(\text{Id}_X, \alpha)^*$. La flèche canonique $\mathcal{F}^{\text{Ker } \alpha} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Ker } \alpha}$ induit un isomorphisme de foncteurs $(\text{Id}_X, \alpha)_* \xrightarrow{\sim} (\text{Id}_X, \alpha)_! : D_c^b(X, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, donc ces foncteurs sont t -exactes pour les t -structures canoniques.

(iii) Cas $X_1 = X_2 = X$, $f = \text{Id}_X$, α injectif. On choisit un système S de représentants de $G_2/\alpha(G_1)$. Pour $K \in D_c^b(X, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on considère $L = \bigoplus_{s \in S} a_s^* K$. Soit $g \in G_2$. Pour $s \in S$, on pose $gs = t_s \alpha(h_s)$, $t_s \in S$, $h_s \in G_1$. Alors g agit sur L par

$$a_g^* \bigoplus_{s \in S} a_s^* K \simeq \bigoplus_{s \in S} a_{t_s}^* a_{h_s}^* K \xrightarrow{\bigoplus_{s \in S} a_{t_s}^* b_{h_s}} \bigoplus_{s \in S} a_{t_s}^* K.$$

On pose $(\text{Id}_X, \alpha)_* K = (\text{Id}_X, \alpha)_! K = L$. Cette définition ne dépend pas du choix de S à isomorphisme près. Le foncteur t -exact

$$(\text{Id}_X, \alpha)_* = (\text{Id}_X, \alpha)_! : D_c^b(X, G_1, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, G_2, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

ainsi défini est à la fois un adjoint à droite et un adjoint à gauche de $(\text{Id}_X, \alpha)^*$.

Dans le cas général, on décompose (f, α) en

$$(X_1, G_1) \xrightarrow{(f, \text{Id}_{G_1})} (X_2, G_1) \xrightarrow{(\text{Id}_{X_2}, \alpha)} (X_2, G_2)$$

et α en $G_1 \xrightarrow{\alpha_1} \text{Im } \alpha \xrightarrow{\alpha_2} G_2$. On pose $R(f, \alpha)_* = (\text{Id}_{X_2}, \alpha_2)_* (\text{Id}_{X_2}, \alpha_1)_* R(f, \text{Id}_{G_1})_*$ (resp. $R(f, \alpha)_! = (\text{Id}_{X_2}, \alpha_2)_! (\text{Id}_{X_2}, \alpha_1)_! R(f, \text{Id}_{G_1})_!$). Le foncteur $R(f, \alpha)_*$ (resp. $R(f, \alpha)_!$) ainsi défini est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f, \alpha)^*$ (resp. $R(f, \alpha)^!$). Il s'en suit que $R(gf, \beta\alpha)_* \simeq R(g, \beta)_* R(f, \alpha)_*$ (resp. $R(gf, \beta\alpha)_! \simeq R(g, \beta)_! R(f, \alpha)_!$). Voir aussi [SGA4, XVII 3.3.2].

On enlève α de la notation lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Les six opérations sur D_c^b induisent les opérations correspondantes sur les groupes de Grothendieck.

Soit $a_X : (X, G) \rightarrow (S, \{1\})$. On vérifie que $Ra_X^! \mathbb{Q}_l$ est globalement défini (le cas général découle du cas séparé par [BBD82, 3.2.4]). On pose $D_X = R\mathcal{H}om_X(-, Ra_X^! \mathbb{Q}_l)$. On a $D_X D_X \simeq \text{Id}$. Pour $K, L \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on a $D_X R\mathcal{H}om_X(K, L) = K \otimes D_X L$. Si $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ est un morphisme dans \mathbf{Eq}/S avec f séparé, alors $D_X f^* \simeq Rf^! D_Y$ et $D_Y R(f, \alpha)_* \simeq R(f, \alpha)_! D_X$. En effet, tous les énoncés sauf le dernier résultent facilement des analogues sans actions de groupe. Pour le dernier énoncé, on remarque que pour tout $K \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et tout $L \in D_c^b(Y, H, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_Y(D_Y Rf_* K, L) &\simeq \text{Hom}_Y(D_Y L, Rf_* K) \simeq \text{Hom}_X(f^* D_Y L, K) \simeq \text{Hom}_X(D_X Rf^! L, K) \\ &\simeq \text{Hom}_X(D_X K, Rf^! L) \simeq \text{Hom}_Y(Rf_! D_X K, L). \end{aligned}$$

Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, $K \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et $g \in G$, b_g induit un isomorphisme $K \xrightarrow{\sim} T_g^* K$, où $T_g = (a_g, h \mapsto g^{-1}hg)$ comme dans 1.1.

1.5.1. Si $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ est cocartésien avec α injectif, alors $(f, \alpha)_*$ est une équivalence de catégories. Cela résulte de (1.1.1) et de la définition de $(f, \alpha)_*$.

Proposition 1.6. Soient $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$, $(g, \beta) : (Y', H') \rightarrow (Y, H)$ deux morphismes de même but dans \mathbf{Eq}/S avec f séparé. Pour $r \in H$, formons le carré cartésien

$$(1.6.1) \quad \begin{array}{ccc} (X', G')_r & \xrightarrow{(h, \gamma)_r} & (X, G) \\ \downarrow (f', \alpha')_r & & \downarrow (f, \alpha) \\ (Y', H') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (Y, H) \xrightarrow{T_r} (Y, H) \end{array}$$

où T_r est comme plus haut. Le foncteur $R(f', \alpha')_{r!}(h, \gamma)_r^*$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la double classe $(\text{Im}\beta)r(\text{Im}\alpha) \subset H$ et on a

$$(g, \beta)^* R(f, \alpha)_! \simeq \bigoplus_r R(f', \alpha')_{r!}(h, \gamma)_r^*,$$

où r parcourt un système de représentants de $\text{Im}\beta \backslash H / \text{Im}\alpha$. En particulier, $R(f, \alpha)_!$ commute à tout changement de base (g, β) dans \mathbf{Eq}/S vérifiant $\#(\text{Im}\beta \backslash H / \text{Im}\alpha) = 1$.

Le cas où $f = g = \text{Id}_Y$ avec Y le spectre d'un corps séparablement clos est une version de la formule de Mackey [Ser98, 7.3].

On renvoie à 5.4 pour une interprétation en termes de champs.

Démonstration. On remarque d'abord que $R(f, \alpha)_!$ commute au changement de base (g, β) dans chacun des trois cas suivants : (i) $\alpha = \text{Id}$; (ii) $f = \text{Id}$ et α surjectif; (iii) $f = \text{Id}$, α injectif et β surjectif. Cela résulte du théorème de changement de base usuel [SGA4, XVII 5.2.6] dans le cas (i), et de la définition de $(\text{Id}, \alpha)_!$ dans les cas (ii) et (iii).

On factorise α en $G \xrightarrow{\alpha_1} \text{Im}\alpha \xrightarrow{\alpha_2} H$, β en $H' \xrightarrow{\beta_1} \text{Im}\beta \xrightarrow{\beta_2} H$, et (1.6.1) en un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} (X', G')_r & \xrightarrow{(h, \gamma)_r} & & \xrightarrow{} & (X, G) \\ \downarrow & & & & \downarrow (f, \alpha_1) \\ (Y', I'_r) & \xrightarrow{(g, \sigma_r)} & (Y, I_r) & \xrightarrow{(a_r, \tau_r)} & (Y, \text{Im}\alpha) \\ \downarrow (\text{Id}_{Y'}, \alpha'_{2,r}) & & \downarrow (\text{Id}_Y, \rho_r) & & \downarrow (\text{Id}_Y, \alpha_2) \\ (Y', H') & \xrightarrow{(g, \beta_1)} & (Y, \text{Im}\beta) & \xrightarrow{(\text{Id}_Y, \beta_2)} & (Y, H) \xrightarrow{T_r} (Y, H) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} R(f', \alpha')_{r!}(h, \gamma)_r^* &\simeq (\text{Id}_{Y'}, \alpha'_{2,r})_!(g, \sigma_r)^* (a_r, \tau_r)^* R(f, \alpha_1)_! && \text{d'après (i) et (ii)} \\ &\simeq (g, \beta_1)^* (\text{Id}_Y, \rho_r)_!(a_r, \tau_r)^* R(f, \alpha_1)_! && \text{d'après (iii)}. \end{aligned}$$

Donc pour montrer la proposition, on peut supposer que $f = g = \text{Id}_Y$ et que α et β sont des inclusions. On peut prendre pour (1.6.1) le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (Y, H' \cap rGr^{-1}) & \xrightarrow{(a_r, \gamma_r)} & (Y, G) \\ \downarrow (\text{Id}, \alpha'_r) & & \downarrow (\text{Id}, \alpha) \\ (Y, H') & \xrightarrow{(\text{Id}, \beta)} & (Y, H) \xrightarrow{T_r} (Y, H) \end{array}$$

où α'_r est l'inclusion, γ_r est donné par $g \mapsto r^{-1}gr$. Soit $K \in D_c^b(Y, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Soit R un système de représentants de $H' \backslash H / G$. Pour $r \in R$, soit S_r un système de représentants de $H' / (H' \cap rGr^{-1})$. Posons $L_r = \bigoplus_{s \in S_r} a_s^* a_r^* K \simeq (\text{Id}, \alpha'_r)_!(a_r, \gamma_r)^* K$. Comme $\bigcup_{r \in R} S_r r$ est un système de représentants de H / G , on a

$$(1.6.2) \quad \bigoplus_{r \in R} L_r \simeq \bigoplus_{r \in R} \bigoplus_{s \in S_r} a_{sr}^* K \xrightarrow{\sim} (\text{Id}, \beta)^* (\text{Id}, \alpha)_! K.$$

Pour $h \in H'$, si on pose $hs = t_s h_s$, $t_s \in S_r$, $h_s \in H' \cap rGr^{-1}$, alors h agit sur L_r par

$$a_h^* \bigoplus_{s \in S_r} a_s^* a_r^* K \simeq \bigoplus_{s \in S_r} a_{t_s}^* a_{h_s}^* a_r^* K \xrightarrow{\bigoplus_{s \in S_r} a_{t_s}^* b_{a_r^* K, h_s}} \bigoplus_{s \in S_r} a_{t_s}^* a_r^* K,$$

où $b_{a_r^* K, h_s}$ est donné par

$$a_{h_s}^* a_r^* K \simeq a_r^* a_{\gamma_r(h_s)}^* K \xrightarrow{a_r^* b_{\gamma_r(h_s)}} a_r^* K.$$

Comme $hsr = t_s r r^{-1} h_s r$, $t_s r \in S_r r$, $r^{-1} h_s r \in G$, h agit sur $(\text{Id}, \beta)^* (\text{Id}, \alpha)_! K$ par

$$a_h^* \bigoplus_{r \in R} \bigoplus_{s \in S_r} a_s^* K \simeq \bigoplus_{r \in R} \bigoplus_{s \in S_r} a_{t_s r}^* a_{r^{-1} h_s r}^* K \xrightarrow{a_{t_s r}^* (b_{r^{-1} h_s r})} \bigoplus_{r \in R} \bigoplus_{s \in S_r} a_{t_s r}^* K.$$

Donc l'isomorphisme (1.6.2) est H' -équivariant. L'image de L_r ne dépend que de la double classe $H' r G$. \square

Proposition 1.7. Soit $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme dans \mathbf{Eq}/S .

(a) Supposons que $\alpha : G \rightarrow H$ soit surjectif et que f fasse de Y un quotient de X par $\text{Ker} \alpha$. Alors pour tout $K \in D_c^b(Y, H, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, la flèche d'adjonction $K \rightarrow (f, \alpha)_* (f, \alpha)^* K$ est un isomorphisme.

(b) Si de plus $\text{Ker} \alpha$ opère librement sur X , de sorte que X est un $(\text{Ker} \alpha)$ -torseur sur Y , alors pour tout $L \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, la flèche d'adjonction $(f, \alpha)^* (f, \alpha)_* L \rightarrow L$ est un isomorphisme.

On renvoie à 5.3 pour une interprétation en termes de champs dans le cas (b).

Démonstration. (a) Pour tout point géométrique \bar{y} de Y à valeur dans un corps algébriquement clos, \bar{y} est le quotient de $X_{\bar{y}}^{\text{red}}$ par $\text{Ker} \alpha$ (ceci découle de [SGA1, V 1.1 (iii)]). Quitte à changer S , on peut supposer $H = \{e\}$, $Y = y = \text{Spec } k$ avec k un corps algébriquement clos et X réduit. Alors il existe un sous-groupe G_1 de G tel que $X = \coprod_{h \in G_1 \backslash G} x_h$, où $x_h = \text{Spec } k$ et l'action de G est donnée par $a_g(x_h) = x_{hg}$. Soit $K \in D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Alors $((f, \alpha)^* K)_{x_h} = K$, et $g \in G$ agit par

$$a_g^* (f, \alpha)^* K \simeq (f, \alpha)^* K \xrightarrow{\text{Id}} (f, \alpha)^* K.$$

Donc $(f, \text{Id})_* (f, \alpha)^* K \simeq \bigoplus_{h \in G/G_1} K_h$, où $K_h = K$, et $g \in G$ agit par

$$\bigoplus_{h \in G/G_1} (K_h \xrightarrow{\text{Id}} K_{gh}).$$

Donc la diagonale induit un isomorphisme $K \rightarrow (\bigoplus_{h \in G/G_1} K_h)^G \simeq (f, \alpha)_* (f, \alpha)^* K$.

(b) Si $\text{Ker} \alpha$ opère librement sur X , alors pour tout point géométrique $\bar{y} \rightarrow Y$, $X_{\bar{y}}$ est un $\text{Ker} \alpha$ -torseur sur \bar{y} . On fait le même dévissage qu'en (a). Dans notre cas $G_1 = \{1\}$. Soit (g, β) une section de (f, α) (par exemple $(y, 1) \mapsto (x_1, 1)$). Alors (g, β) est cocartésien, donc $(g, \beta)_*$ est une équivalence de catégories. Il en résulte que $(f, \alpha)_*$ l'est aussi, d'où le résultat. \square

Remarque. Soient k/k_0 une extension finie galoisienne, k' une extension finie de k tel que k' soit galoisien sur k_0 . Alors $(\text{Spec } k', \text{Gal}(k'/k_0)) \rightarrow (\text{Spec } k, \text{Gal}(k/k_0))$ vérifie les hypothèses de (b).

1.8 Traces locales

Soit G un groupe fini agissant sur $x = \text{Spec } \kappa(x)$. Le corps $\kappa(x)$ est muni d'une action de G à gauche. Soit \bar{x} un point géométrique algébrique au-dessus de x , i. e., le spectre d'un corps $\kappa(\bar{x})$, clôture séparable de $\kappa(x)$. On pose

$$G_{\bar{x}} = G \times_{\text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G)} \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G).$$

Soit l un nombre premier inversible sur x . On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \text{Mod}_c(x, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) &\rightarrow \text{Rep}(G_{\bar{x}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ L &\mapsto L_{\bar{x}}, \end{aligned}$$

où $\text{Rep}(G_{\bar{x}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations continues de $G_{\bar{x}}$. Pour $L \in \text{Mod}_c(x, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, $(DL)_{\bar{x}}$ s'identifie à la représentation contragrédiente de $L_{\bar{x}}$.

Soient H un groupe fini agissant sur $y = \text{Spec } \kappa(y)$ et $(f, \alpha) : (x, G) \rightarrow (y, H)$ un morphisme avec f fini. Prenons \bar{y} un point géométrique algébrique au-dessus de y s'insérant dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & x \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \bar{y} & \longrightarrow & y \end{array}$$

À l'aide de f , on identifie $\kappa(y)$ à un sous-corps de $\kappa(x)$. On a $\kappa(y)^H \subset \kappa(y)^G \subset \kappa(x)^G$, d'où un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & \text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G) & \longleftarrow & \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & \text{Gal}(\kappa(y)/\kappa(y)^H) & \longleftarrow & \text{Gal}(\kappa(\bar{y})/\kappa(y)^H) \end{array}$$

qui induit un homomorphisme $\alpha_{\bar{x}} = (f, \alpha)_{\bar{x}} : G_{\bar{x}} \rightarrow H_{\bar{y}}$. Soit $L \in \text{Mod}_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On a $((f, \alpha)_* L)_{\bar{y}} \simeq (\alpha_{\bar{x}})_* L_{\bar{x}}$ comme $H_{\bar{y}}$ -représentations. Ici $(\alpha_{\bar{x}})_*$ est la co-induction. (Si on note $(\alpha_{\bar{x}})_!$ l'induction, on a un isomorphisme canonique $(\alpha_{\bar{x}})_* \xrightarrow{\sim} (\alpha_{\bar{x}})_!$. Cf. 1.5 (ii) et (iii).) Le caractère de la représentation $(\alpha_{\bar{x}})_*$ peut se calculer en utilisant le lemme suivant.

Lemme 1.9. Soient F un corps, $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme de groupes (abstrait) avec $N = \text{Ker } \alpha$ d'ordre fini et $I = \text{Im } \alpha$ d'indice fini dans G_2 , L un F -espace vectoriel de dimension finie, $\rho : G_1 \rightarrow \text{GL}_F(L)$ une représentation linéaire. On note $\alpha_* L$ le module co-induit, i. e., $\alpha_* L = \text{Hom}_{F[I]}(F[G_2], L^N)$ avec l'action de G_2 induite par multiplication à droite sur $F[G_2]$. Alors pour tout $g \in G_2$,

$$(1.9.1) \quad \#N \cdot \text{Tr}(g, \alpha_* L) = \sum_s \sum_{\substack{t \in G_1 \\ \alpha(t) = s^{-1}gs}} \text{Tr}(t, L),$$

où s parcourt un système de représentants de G_2/I .

Démonstration. Il suffit de traiter les deux cas spéciaux suivants.

(i) Cas $N = \{1\}$. La formule est immédiate (voir, par exemple, [Ser98, 3.3]).

(ii) Cas $I = G_2$. Soit $\bar{g} = \sum_{\substack{t \in G_1 \\ \alpha(t)=g}} \rho(t) \in \text{End}_{\mathbb{F}}(L)$. Alors $\bar{g}(L) \subset L^N$. Le membre de droite de (1.9.1) est

$$\text{Tr}(\bar{g}, L) = \text{Tr}(\bar{g}, L^N) + \text{Tr}(\bar{g}, L/L^N) = \#N \cdot \text{Tr}(g, L^N).$$

□

1.10. Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$. Pour tout point $x \in X$, $\kappa(x)$ est muni d'une action à gauche du groupe de décomposition à

$$G_d(x) = \{g \in G \mid a_g(x) = x\}.$$

On désigne le schéma $\text{Spec } \kappa(x)$ encore par x et on note i_x le morphisme $(x, G_d(x)) \rightarrow (X, G)$. Soit \bar{x} un point géométrique algébrique au-dessus de x . On pose

$$(1.10.1) \quad G_d(x, \bar{x}) = G_d(x)_{\bar{x}} = G_d(x) \times_{\text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})} \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}).$$

En d'autres termes, un élément de $G_d(x, \bar{x})$ est un couple (g, ϕ) où $g \in G_d(x)$ et $\phi \in \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ induisent le même automorphisme sur $\kappa(x)$.

Soient $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme dans \mathbf{Eq}/S , $x \in X$, $y = f(x)$, $\bar{x} \rightarrow x$ au-dessus de $\bar{y} \rightarrow y$. Alors (f, α) induit $(f_x, \alpha_x) : (x, G_d(x)) \rightarrow (y, H_d(y))$ et $\alpha_{\bar{x}} = (f, \alpha)_{\bar{x}} : G_d(x, \bar{x}) \rightarrow H_d(y, \bar{y})$.

Soit $L \in D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On pose $L_x = i_x^* L \in D_c^b(x, G_d(x), \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour $g \in G$, b_g induit $L_{a_g x} \simeq (T_{g,x})_* L_x$, où $T_g = (a_g, h \mapsto g^{-1}hg)$ comme dans 1.1.

Soit $f : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme fini. Soit $y \in Y$. Notons O_y l'orbite de y sous H . On choisit un système S de représentants des orbites dans X sous G au-dessus de O_y . Pour $x \in S$, notons O_x l'orbite de x sous G , $f_{O_x} : O_x \rightarrow O_y$ la restriction de f à O_x , et $z = f(x)$. Choisissons $h_x \in H$ tel que $a_{h_x}(y) = z$. Alors $((f, \alpha)_* L)|_{O_y} \simeq \bigoplus_{s \in S} (f_{O_x}, \alpha)_*(L|_{O_x})$. Donc

$$((f, \alpha)_* L)_y \simeq \bigoplus_{x \in S} ((f_{O_x}, \alpha)_*(L|_{O_x}))_y \simeq \bigoplus_{x \in S} T_{h_x, y}^* ((f_{O_x}, \alpha)_*(L|_{O_x}))_z \simeq \bigoplus_{x \in S} T_{h_x, y}^* (f_x, \alpha_x)_* L_x.$$

Prenons $\bar{x} \rightarrow x$ et $\bar{z} \rightarrow z$ au-dessus de $\bar{y} \rightarrow y$. Alors pour tout $h \in H_d(y, \bar{y})$,

$$(1.10.2) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(h, ((f, \alpha)_* L)_{\bar{y}}) &= \sum_{x \in S} \text{Tr}(T_{h_x, \bar{y}}(h), (\alpha_{\bar{x}})_* L_{\bar{x}}) \\ &= \sum_{x \in S} \frac{1}{\#N_x} \sum_{s \in H_d(z, \bar{z})/I_x} \sum_{\substack{t \in G_d(x, \bar{x}) \\ \alpha_{\bar{x}}(t) = s^{-1} T_{h_x, \bar{y}}(h) s}} \text{Tr}(t, L_{\bar{x}}), \quad \text{d'après (1.9.1)} \end{aligned}$$

où $N_x = \text{Ker } \alpha_{\bar{x}}$, $I_x = \text{Im } \alpha_{\bar{x}}$.

Proposition 1.11. *On utilise les notations de 1.7. Soient $x \in X$, $y = f(x)$, $\bar{y} \rightarrow y$ au-dessus de $\bar{x} \rightarrow x$. Dans le cas (a) (resp. (b)) de 1.7, l'homomorphisme $\alpha_{\bar{x}} : G_d(x, \bar{x}) \rightarrow H_d(y, \bar{y})$ est surjectif (resp. un isomorphisme).*

Démonstration. D'après [SGA1, V 1.1 (iii)], $\kappa(x)$ est une extension quasi-galoisienne de $\kappa(y)$ et l'homomorphisme $\text{Ker } \alpha_x \rightarrow \text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(y))$ est surjectif. Donc $\kappa(x)^{G_d(x)}$ est une extension radicielle de $\kappa(y)^{H_d(y)}$, d'où un carré cartésien de groupes

$$\begin{array}{ccc} G_d(x, \bar{x}) & \xrightarrow{\alpha_{\bar{x}}} & H_d(y, \bar{y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_d(x) & \longrightarrow & H_d(y) \times_{\text{Gal}(\kappa(y)/\kappa(y)^{H_d(y)})} \text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)}) \end{array}$$

Donc $\alpha_{\bar{x}}$ est surjectif.

Dans le cas (b), l'homomorphisme $\text{Ker } \alpha_x \rightarrow \text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(y))$ est un isomorphisme. Donc $\alpha_{\bar{x}}$ est un isomorphisme. \square

Corollaire 1.12. Soient K un corps, K' une extension finie galoisienne, $\eta = \text{Spec } K$, $\eta' = \text{Spec } K'$, $(X, G) \in \mathbf{Eq}/\eta$. Considérons $(\text{pr}_1, \text{Id}) : (X_{\eta'}, G) \rightarrow (X, G)$. Soient $x \in X$, $y \in X_{\eta'}$ au-dessus de x , $\bar{y} \rightarrow y$ au-dessus de $\bar{x} \rightarrow x$. Alors l'image de $\text{Id}_{\bar{y}} : G_d(y, \bar{y}) \rightarrow G_d(x, \bar{x})$ est

$$G' = G_d(x) \times_{\text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})} \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \cdot K'.$$

Démonstration. Il est clair que $\text{Im } \text{Id}_{\bar{y}} \subset G'$. Soit $(g, \phi) \in G'$. Notons $H = \text{Gal}(K'/K)$. Formons le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & & (\text{pr}_1, \text{Id}) & & \\ & \searrow & \xrightarrow{\quad} & \searrow & \\ (X_{\eta'}, G) & \longrightarrow & (X_{\eta'}, G \times H) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & (X, G) \\ & & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \\ & & (\eta', H) & \longrightarrow & (\eta, \{1\}) \end{array}$$

D'après 1.11 (b), l'homomorphisme $(\text{pr}_1)_{\bar{y}} : (G \times H)_d(y, \bar{y}) \rightarrow G_d(x, \bar{x})$ est un isomorphisme. Soit (g, h, ψ) l'image inverse de (g, ϕ) . Alors $\psi|_{K'} = \text{Id}_{K'}$. En appliquant $(\text{pr}_2)_{\bar{y}}$, on obtient $(h, \psi) \in H_d(\eta', \bar{\eta})$, donc $h = 1$, i. e., $(g, \phi) = \text{Id}_{\bar{y}}(g, \psi)$. \square

1.13 E-compatibilité

Soient p un nombre premier, E un corps de caractéristique 0, I un ensemble, γ une application

$$I \rightarrow \left\{ (l, \iota) \mid l \text{ un nombre premier } \neq p, \iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l \text{ un plongement de corps} \right\},$$

où, pour chaque l , $\overline{\mathbb{Q}}_l$ est une clôture algébrique de \mathbb{Q}_l . Pour $\lambda \in I$, on écrit $\gamma(\lambda) = (l_\lambda, \iota_\lambda)$.

Soient $K = \mathbb{F}_{p^f}$ un corps fini (resp. un corps local de corps résiduel $k = \mathbb{F}_{p^f}$, i. e., le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent R de corps résiduel k), $\eta = \text{Spec } K$. Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/\eta$. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X . Pour $x \in |X|$, $\kappa(x)$ est une extension finie de K . Soit \bar{x} un point géométrique algébrique au-dessus de x . On note $F_0 \in \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ le Frobenius géométrique (absolu)

qui envoie a sur $a^{1/p}$ (resp. R_x l'anneau des entiers de $\kappa(x)$, $R_{\bar{x}}$ le normalisé de R_x dans $\kappa(\bar{x})$, x_0 le point fermé de $\text{Spec } R_x$, \bar{x}_0 le point fermé de $\text{Spec } R_{\bar{x}}$, $F_0 \in \text{Aut}(\kappa(\bar{x}_0))$ le Frobenius géométrique). On note ρ l'inclusion $\text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ (resp. l'homomorphisme composé $\text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \rightarrow \text{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \text{Aut}(\kappa(\bar{x}_0))$).

Définition 1.14. (i) On dit qu'un système $(t_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda}$ est (E, I, γ) -compatible (ou E -compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) s'il existe $c \in E$ tel que $t_\lambda = \iota_\lambda(c)$ pour tout $\lambda \in I$.

(ii) On dit qu'un système de complexes $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ est (E, I, γ) -compatible (ou E -compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \rightarrow x$ et tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ (1.10.1) avec $\rho(\phi)$ une puissance entière de F_0^f , le système $(\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est (E, I, γ) -compatible.

Les systèmes E -compatibles sur (X, G) forment une sous-catégorie triangulée de la catégorie produit $\prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$, notée $D_c^b(X, G, E)$. Lorsque $G = \{1\}$, on écrit simplement $D_c^b(X, E)$. La E -compatibilité de $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ ne dépend que de $([L_\lambda])_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} K(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ (1.3).

Proposition 1.15. Soient $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$, $x \in |X|$, $\bar{x} \rightarrow x$, $N \in \mathbb{Z}$. Supposons que pour tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \geq N$, le système $(\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est E -compatible. Alors $([L_\lambda]_x)_{\lambda \in I}$ est E -compatible.

Démonstration. On peut supposer $X = x$ et $\#I = 2$. On peut supposer $[L_\lambda] = [\mathcal{F}_\lambda] - [\mathcal{G}_\lambda]$ avec $\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda \in \text{Mod}_c(x, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ semi-simples, $\lambda \in I$. Il suffit de montrer que le système $(\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est E -compatible pour tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{f(N-1)}$. On pose $Z = \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ (resp. $Z = \text{Aut}(\kappa(\bar{x}_0))$). On note τ l'homomorphisme composé

$$G_d(x, \bar{x}) \xrightarrow{\text{Pr}_2} \text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)}) \xrightarrow{\rho} Z \xrightarrow{r} \hat{Z},$$

où r est l'isomorphisme qui envoie F_0 sur 1. Dans le cas fini, on pose $W = \tau^{-1}(Z)$; dans le cas local, il existe un sous-groupe ouvert I_1 de $\tau^{-1}(0)$ agissant trivialement sur les $(\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{x}}$ et $(\mathcal{G}_\lambda)_{\bar{x}}$, $\lambda \in I$ en vertu du théorème de monodromie locale de Grothendieck, et on pose $W = \tau^{-1}(Z)/I_1$. Dans les deux cas, τ induit un homomorphisme surjectif $v : W \rightarrow f'Z$ de noyau fini avec $f \mid f'$. Le groupe infini W agit par conjugaison sur l'ensemble fini $v^{-1}(f')$. Le centre $Z(W)$ de W , qui est le fixateur de $v^{-1}(f')$, est d'indice fini. Soit $h \in \tau^{-1}(Z)$ tel que $\tau(h) \geq f$ et que l'image de h dans W appartienne à $Z(W)$. Alors pour tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\tau(g) = f(N-1)$, gh et hg définissent le même automorphisme sur $(\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{x}}$. Il en est de même sur $(\mathcal{G}_\lambda)_{\bar{x}}$. On conclut en appliquant [III06, 8.1]. \square

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

Théorème 1.16. Sur un corps fini ou local comme dans 1.13, les six opérations préservent la E -compatibilité. Plus précisément, pour $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ dans $\mathbf{Eq}l\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I}, (M_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$, $(N_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(Y, H, E)$, on a

$$\begin{aligned} (L_\lambda \otimes M_\lambda)_{\lambda \in I}, (R\mathcal{H}om(L_\lambda, M_\lambda))_{\lambda \in I}, ((f, \alpha)^* N_\lambda)_{\lambda \in I} &\in D_c^b(X, G, E), \\ (R(f, \alpha)_* L_\lambda)_{\lambda \in I} &\in D_c^b(Y, H, E), \end{aligned}$$

et, lorsque f est séparé,

$$(R(f, \alpha)^! N_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E), \quad (R(f, \alpha)! L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(Y, H, E).$$

Corollaire 1.17. *La dualité préserve la E-compatibilité. Plus précisément, pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$, on a $(D_{(X, G)} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$.*

Démonstration. Pour montrer que $(D_X L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, on s'intéresse aux traces en un point $x \in |X|$. Soit V un voisinage ouvert séparé de x dans X . Quitte à remplacer (X, G) par $(\bigcap_{g \in G_d(x)} a_g(V), G_d(x))$, on peut supposer X séparé. Ce cas découle de 1.16. \square

En fait, 1.16 et 1.17 seront démontrés en même temps (voir 2.5 et 3.9).

Remarque 1.18. (i) On retrouve le théorème de Gabber [Fuj02, Th. 2] pour $G = \{1\}$ et K fini.

(i') Dans le cas K local, soient η_1 une extension finie de η , $\overline{\eta_1} \rightarrow \eta_1$, $X \rightarrow \eta_1$ un morphisme séparé de type fini muni d'une action d'un groupe fini G . Si $(g, \phi) \in G_d(\eta_1, \overline{\eta_1})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \in \mathbb{Z}$, alors 1.16 combiné avec (I.2.4.1) et (I.2.4.4) implique que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{Tr}((g, \phi), H_c^i(X_{\overline{\eta_1}}, \mathbb{Q}_l)) \in p^{f d \min\{0, n\}} \mathbb{Z}$$

est indépendant de l , où $d = \dim X$. On retrouve ainsi [Och99, Th. B], le cas $s = \mathrm{Spec} \overline{F}_p$ de [Vid04, 4.2] et le cas (très particulier) de [Sai03, 0.1] où Γ est la classe du graphe de a_g .

(ii) 1.16 équivaut à l'énoncé pour $\#I = 2$.

(iii) On peut remplacer E par une extension algébrique quelconque E' . En effet, pour tout $\lambda \in I$, notons J_λ l'ensemble des plongements $\mu : E' \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}$ qui prolongent ι_λ . Soit I' une partie de $\prod_{\lambda \in I} J_\lambda$, qui contient au moins un élément de chaque J_λ , $\lambda \in I$, et au moins un J_λ , $\lambda \in I$, au cas où I est non vide. On note $\gamma' : I' \rightarrow \{(l, \iota)\}$ l'application qui envoie $\mu \in J_\lambda$ sur (l_λ, μ) . Alors un système $(t_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}$ est (E, I, γ) -compatible si et seulement si $(t'_\mu)_{\mu \in I'} \in \prod_{\mu \in I'} \overline{\mathbb{Q}_{l_\mu}}$ est (E', I', γ') -compatible, où $t'_\mu = t_\lambda$ pour $\mu \in J_\lambda$. Le foncteur

$$M : \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}) \rightarrow \prod_{\mu \in I'} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\mu}})$$

$$(L_\lambda)_{\lambda \in I} \mapsto (L'_\mu)_{\mu \in I'}, \quad \text{où } L'_\mu = L_\lambda \text{ pour } \mu \in J_\lambda,$$

commute aux six opérations et à la dualité. Un système $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est E-compatible si et seulement si $M((L_\lambda)_{\lambda \in I})$ est E' -compatible.

(iv) Les énoncés pour $(f, \alpha)^*$ et \otimes sont triviaux. L'énoncé pour $(f, \alpha)_*$ avec f fini résulte de (1.10.2). L'énoncé pour D dans le cas où X est régulier et où les L_λ sont à faisceaux de cohomologie lisses découle du théorème de pureté : pour $x \in |X|$, $(D_X L_\lambda)_x \simeq (D_x(L_\lambda)_x)(d_x)[2d_x]$, où $d_x = \dim_x X$, et évidemment D_x préserve la E-compatibilité.

(v) On verra en 4.8 que $R\Psi$ préserve aussi la E-compatibilité.

2 Descente galoisienne et indépendance de l sur un corps fini

2.1. Une technique de Deligne-Lusztig [DL76, démonstration de 3.3] permet de se débarrasser de l'action de groupe dans certaines circonstances.

Soit S un schéma noethérien. On désigne par $\mathbf{Eq}^{\text{adm}}/S$ la sous-catégorie pleine de \mathbf{Eq}/S formée des couples (X, G) où G agit sur X de façon admissible (1.2).

Lemme 2.2. Soient G un groupe fini, $f : S' \rightarrow S$ un G -torseur. Le foncteur

$$\begin{aligned} \epsilon_f : \mathbf{C}_S &\xrightarrow{\sim} (\mathbf{Eq}^{\text{adm}}/S)_G / (S', G) \\ X &\mapsto (X \times_S S', G), \end{aligned}$$

où G agit sur $X \times_S S'$ via son action sur S' , est une équivalence de catégories.

Démonstration. C'est un cas particulier de la descente galoisienne (voir [SGA1, VIII 7.6] et [BLR90, 6.2.B]). Un quasi-inverse de ϵ_f est donné par $(Y, G) \mapsto Y/G$. \square

Notons $e_{f,X} : (X \times_S S', G) \rightarrow (X, \{1\})$ la projection.

2.3. Soit

$$\left((S_m, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_{m \geq 1}, ((f_{m,n}, \alpha_{m,n}) : (S_{mn}, \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \rightarrow (S_m, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))_{m,n \geq 1} \right)$$

un système projectif, où $S_1 = S$, $\alpha_{m,n} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne l'homomorphisme qui envoie $\bar{1}$ sur $\bar{1}$, tel que $f_{m,n}$ soit un $\text{Ker } \alpha_{m,n}$ -torseur, $m, n \geq 1$. Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}^{\text{adm}}/S$. Soient $m \geq 1$, $g \in G$. Notons n_g l'ordre de g . On considère l'action diagonale de $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}$ sur $X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}$, celle sur X_{S_m} étant donnée par l'homomorphisme $i_g : \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \rightarrow G$ qui envoie $\bar{1}$ sur g et celle sur $S_{n_g m}$ donnée par l'homomorphisme $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_g m\mathbb{Z}$ qui envoie $\bar{1}$ sur \bar{m} . On définit un foncteur

$$\begin{aligned} (\mathbf{Eq}^{\text{adm}}/S)_G &\rightarrow \mathbf{C}_{S_m} \\ (X, G) &\mapsto X^{(m,g)} = \epsilon_{f_{m,n_g}}^{-1} (X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Posons

$$d_{(X,G),m,g} = (\text{pr}_1, i_g) : (X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \rightarrow (X, G).$$

Rappelons

$$e_{f_{m,n_g}, X^{(m,g)}} : (X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \rightarrow (X^{(m,g)}, \{1\}).$$

Supposons que S soit régulier de dimension ≤ 1 . Posons

$$C_{(X,G),m,g} = e_{f_{m,n_g}, X^{(m,g)}}^* d_{(X,G),m,g}^* : D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X^{(m,g)}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

La définition de $C_{m,g}$ commute aux six opérations et à la dualité. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} C_{(X,G),m,g} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{(X,G)}(-, -) &\simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om_{X^{(m,g)}}(C_{(X,G),m,g}^-, C_{(X,G),m,g}^-), \\ C_{(X,G),m,g}(- \otimes -) &\simeq C_{(X,G),m,g}^- \otimes C_{(X,G),m,g}^-, C_{(X,G),m,g} \mathbf{D}_{(X,G)} \simeq \mathbf{D}_{X^{(m,g)}} C_{(X,G),m,g}, \end{aligned}$$

et, pour $(f, \text{Id}) : (X, G) \rightarrow (Y, G)$ dans $\mathbf{Eq}^{\text{adm}}/S$,

$$C_{(X,G),m,g}(f, \text{Id})^* \simeq (f^{(m,g)})^* C_{(Y,G),m,g}, C_{(Y,G),m,g} R(f, \alpha)_* \simeq R(f^{(m,g)})_* C_{(X,G),m,g},$$

et, lorsque f est séparé,

$$C_{(X,G),m,g} R(f, \text{Id})^! \simeq R(f^{(m,g)})^! C_{(Y,G),m,g}, C_{(Y,G),m,g} R(f, \alpha)! \simeq R(f^{(m,g)})! C_{(X,G),m,g}.$$

Reprenons les notations de 1.13. En particulier, $K = \mathbb{F}_{p^f}$ (resp. K est un corps local de corps résiduel \mathbb{F}_{p^f}). Pour $m \geq 1$, soient $K_m = \mathbb{F}_{p^{fm}}$ (resp. K_m une extension non ramifiée de K de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^{fm}}$), $\eta_m = \text{Spec } K_m$. Pour $m \geq 1$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit sur η_m via l'isomorphisme de groupes

$$(2.3.1) \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \text{Gal}(K_m/K)$$

où l'image ϕ de $\bar{1}$ est donné par $\phi = F_0^f |K_m$ (resp. $\bar{\phi} = F_0^f | \mathbb{F}_{p^{fm}}$, où $\bar{\phi}$ est la réduction de ϕ). Appliquons 2.3 au système projectif $(\eta_m)_{m \geq 1}$.

Proposition 2.4. *Soient $(X, G) \in \mathbf{Eq}^{\text{adm}}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$. Pour que $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ soit E-compatible, il faut et il suffit que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$,*

$$(C_{(X,G),m,g} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X^{(m,g)}, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$$

soit E-compatible.

Démonstration. La nécessité est claire. Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ tel que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$, $(C_{m,g} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ soit E-compatible. Comme $e_{f_m, n_g}^* e_{f_m, n_g} \simeq \text{Id}$ (1.7 (b)), on a $(d_{m,g}^* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}, E)$. D'après 1.15, il suffit de montrer que pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \rightarrow x$ et tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, $m \geq 1$, $(\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est E-compatible. Soient $y \in |X_{\eta_m}|$ au-dessus de x , $\bar{y} \rightarrow y$ au-dessus de $\bar{x} \rightarrow x$. D'après 1.12, on a $(g, \phi) \in G_d(y, \bar{y})$, correspondant à $(\bar{1}, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(y, \bar{y})$. On prend le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\text{Id}, \Delta)} & (X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) \longrightarrow (X_{\eta_m}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & & (\eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) \longrightarrow (\eta_m, \{1\}) \end{array}$$

Soient $z \in |X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}|$ au-dessus de y , $\bar{z} \rightarrow z$ au-dessus de $\bar{y} \rightarrow y$. D'après 1.11 (b), l'homomorphisme

$$(\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(y, \bar{y})$$

est un isomorphisme. Soit $(\bar{1}, b, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(z, \bar{z})$ l'image inverse de $(\bar{1}, \phi)$. Alors $(b, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(\eta_{n_g m}, \bar{\eta})$, donc $b = \bar{1}$. Bref, $(d_{m,g})_{\bar{z}} : (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \rightarrow G_d(x, \bar{x})$ envoie $(\bar{1}, \phi)$ sur (g, ϕ) . Donc les

$$\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}) = \text{Tr}((\bar{1}, \phi), (d_{m,g}^* L_\lambda)_{\bar{z}})$$

forment un système E-compatible. □

Scholie. Avec les notations de la démonstration, si on note w l'image de z par $e_{f_{m,ng}}$, on choisit $\bar{w} \rightarrow w$ au-dessous de $\bar{z} \rightarrow z$ et on désigne encore par ϕ l'image de $(\bar{1}, \phi)$ par

$$(e_{f_{m,ng}})_{\bar{z}} : (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \rightarrow \{1\}_d(w, \bar{w}) = \text{Gal}(\kappa(\bar{w})/\kappa(w)),$$

alors

$$\text{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}) = \text{Tr}(\phi, (C_{(X,G),m,g}L_\lambda)_{\bar{w}}).$$

2.5. Démonstration de 1.16 dans le cas d'un corps fini. On sait que $(f, \alpha)^*$ et \otimes préservent la E-compatibilité. Pour montrer 1.16, il suffit d'établir la stabilité par D et $R(f, \alpha)_*$. La stabilité par $R(f, \alpha)_!$, $R(f, \alpha)^!$ et $R\mathcal{H}om$ s'obtiendront par dualité. Comme $R(f, \alpha)_* = (\text{Id}, \alpha)_* R(f, \text{Id})_*$, on peut supposer $\alpha = \text{Id}$. D'après 2.4 et le théorème de Gabber, D et $R(f, \text{Id})_*$ préservent la E-compatibilité lorsque les actions de groupe sont admissibles.

Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$. Pour montrer que $(D_X L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, on s'intéresse aux traces en un point $x \in |X|$. Soient V un voisinage ouvert séparé de x dans X , U un voisinage ouvert affine de x dans $\bigcap_{g \in G_d(x)} a_g(V)$. Quitte à remplacer (X, G) par $(\bigcap_{g \in G_d(x)} a_g(U), G_d(x))$, on peut supposer X affine. Ce cas est déjà connu.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme G -équivariant. Pour montrer que Rf_* préserve la E-compatibilité, on fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d < 0$ est trivial. Pour $d \geq 0$, on prend un ouvert dense affine G -stable U de X et on note $j : U \hookrightarrow X$. Pour $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$, comme $[L_\lambda] - [Rj_* j^* L_\lambda]$ est à support de dimension $\leq d - 1$, il suffit de montrer que $(Rj_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(fj)_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles. Donc on peut supposer X affine. Comme le problème est local sur Y , un argument similaire à celui dans l'alinéa précédent permet de supposer en plus Y affine. Ce cas est déjà connu. \square

2.6. Rappelons le théorème de Gabber de stabilité de la E-compatibilité par extension intermédiaire [Fuj02, Th. 3] : pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte de schémas séparés de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_{p^f}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(U, E)$ un système E-compatible de faisceaux pervers purs de poids $w \in \mathbb{Z}$, $(j_{!*} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible.

Rappelons que $K(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est un groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphie de faisceaux pervers simples. Pour $a \in \mathbb{Z}$, notons $K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ (resp. $K_{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, resp. $K_{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, resp. $K_a(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux pervers mixtes (resp. de poids $\leq a$, resp. de poids $\geq a$, resp. purs de poids a).

Proposition 2.7. *Les projections canoniques*

$$p_{\leq a} : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow K_{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \text{ et } p_{\geq a} : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow K_{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

préservent la E-compatibilité. Plus précisément, pour $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ un système E-compatible, les systèmes $(p_{\leq a} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(p_{\geq a} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles.

Démonstration. Il suffit de montrer que la projection canonique $p_w : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow K_w(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ préserve la E-compatibilité pour tout $w \in \mathbb{Z}$, car $p_{\leq a} = \sum_{w \leq a} p_w$, $p_{\geq a} = \sum_{w \geq a} p_w$. On peut supposer $\#I = 2$. Soient $L_\lambda = \sum_{w \in \mathbb{Z}} L_{\lambda, w}$, $L_{\lambda, w} = [M_{\lambda, w, 0}] - [M_{\lambda, w, 1}]$, où $M_{\lambda, w, 0}$ et $M_{\lambda, w, 1}$ sont des faisceaux pervers purs de poids w .

(a) Cas où X est lisse sur k et $\mathcal{H}^e(M_{\lambda,w,\alpha})$ lisse sur X pour $\lambda \in I$, $w \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0, 1$, $e \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $x \in |X|$, le facteur L local $L_x(L_{\lambda,w}, t)$ peut être extrait de $L_x(L_{\lambda,w}, t)$ comme la partie de poids $w - \dim_x X$. Donc les $L_{\lambda,w}$ forment un système E-compatible.

(b) Cas général. On fait une récurrence sur $d = \dim X$, simultanément pour tout $w \in \mathbb{Z}$. Le cas $d < 0$ est trivial. Pour $d \geq 0$, on peut supposer X réduit. Prenons un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ lisse sur k tel que $\mathcal{H}^e(j^* M_{\lambda,w,\alpha})$ soit lisse sur U , pour $\lambda \in I$, $w \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0, 1$, $e \in \mathbb{Z}$. Notons $i : Y \rightarrow X$ le fermé complémentaire. D'après (a), $(j^* L_{\lambda,w})_{\lambda \in I}$ est E-compatible, donc $(j_* j^* L_{\lambda,w})_{\lambda \in I}$ l'est aussi en vertu de la démonstration du théorème de Gabber rappelé en 2.6. D'après [BBD82, 5.3.11], pour tout $w \in \mathbb{Z}$, il existe $L'_{\lambda,w} \in K_w(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ tel que

$$(2.7.1) \quad L_{\lambda,w} = j_* j^* L_{\lambda,w} + i_* L'_{\lambda,w}.$$

En sommant pour tout $w \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$L_{\lambda} = \sum_{w \in \mathbb{Z}} j_* j^* L_{\lambda,w} + i_* \sum_{w \in \mathbb{Z}} L'_{\lambda,w},$$

d'où la E-compatibilité de $(\sum_{w \in \mathbb{Z}} L'_{\lambda,w})_{\lambda \in I}$. Par conséquent, pour tout $w \in \mathbb{Z}$, $(L'_{\lambda,w})_{\lambda \in I}$ est E-compatible en vertu de l'hypothèse de récurrence. La E-compatibilité de $(L_{\lambda,w})_{\lambda \in I}$ résulte alors de (2.7.1). \square

Notons $D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la sous-catégorie triangulée de X formée des complexes mixtes. Pour $a \in \mathbb{Z}$, notons ${}^w D^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ (resp. ${}^w D^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$) la sous-catégorie triangulée de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ formée des complexes mixtes K tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^p \mathcal{H}^i K$ soit de poids $\leq a$ (resp. $\geq a$). S. Morel [Mor08, 3.1.1] a défini un foncteur exact troncature par le poids

$$w_{\leq a} : D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow {}^w D^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \quad (\text{resp. } w_{\geq a} : D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow {}^w D^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)),$$

adjoint à gauche (resp. à droite) de l'inclusion

$${}^w D^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \subset D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \quad (\text{resp. } {}^w D^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \subset D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)),$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ob}({}^w D^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)) & \xleftarrow{\text{Ob}(w_{\leq a})} & \text{Ob}(D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)) & \xrightarrow{\text{Ob}(w_{\geq a})} & \text{Ob}({}^w D^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) & \xleftarrow{p_{\leq a}} & K_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) & \xrightarrow{p_{\geq a}} & K_{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \end{array}$$

Pour $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert et L un faisceau pervers pur de poids $a \in \mathbb{Z}$, la flèche canonique $w_{\geq a} j_* L \rightarrow j_* L$ est un isomorphisme [Mor08, 3.1.4]. En vue de cela, la stabilité par la troncature par le poids (2.7) généralise le théorème de Gabber (2.6).

3 Altérations galoisiennes et réduction au cas des courbes

On reprend les notations de 1.13. En particulier, K est un corps fini ou local.

Soit X un schéma de type fini sur $\eta = \text{Spec } K$. On considère la condition suivante portant sur $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$:

3.0.1 Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe une extension finie F de \mathbb{Q}_l et un \mathcal{O} -faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$, tels que $\mathcal{H}^i L \simeq (\mathcal{F}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} F) \otimes_F \overline{\mathbb{Q}}_l$ et que $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ soit constant sur toute composante connexe de X , où \mathcal{O} est l'anneau des entiers de F , \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O} .

Cette condition est stable par image inverse et \otimes . Si $X \hookrightarrow Y$ est un ouvert de complémentaire un diviseur à croisements normaux, alors 3.0.1 implique que L est à faisceaux de cohomologie lisses sur X , modérément ramifiés sur Y .

Le résultat principal de ce § est la proposition suivante.

Proposition 3.1. *On fait les hypothèses suivantes :*

(A) Soient K_1 une extension finie de K , $\eta_1 = \text{Spec } K_1$, $a_X : X \rightarrow \eta_1$ une courbe lisse affine, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1. Alors $(Ra_{X!} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible.

(B) Soient X une courbe sur η , normale, $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(U, E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1. Alors $(Rj_* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible.

Alors la conclusion de 1.16 est vraie.

Dans le cas d'un corps local, (A) et (B) seront démontrés en 4.11.

3.2. Dans le cas d'un corps fini, (A) est une conséquence de la formule des traces de Grothendieck, tandis que (B) est une variante de [Del73, 9.8]. Prouvons (B) dans une plus grande généralité, avec la condition 3.0.1 remplacée par ce que les L_λ sont à faisceaux de cohomologie lisses. On peut supposer X irréductible. Quitte à remplacer η par le corps de définition de X , on peut supposer X géométriquement irréductible. On peut supposer X projective. D'après 1.18 (iii), on peut supposer que E contient les racines p -ièmes de l'unité. D'après 1.18 (ii), on peut supposer $\#I = 2$. Notons $D = X - U$. Pour $x \in D$, posons $n = \max_{\lambda \in I, i \in \mathbb{Z}, y \in D - \{x\}} \text{Swan}_y(\mathcal{H}^i L_\lambda)$. D'après [Kat83, Construction, p. 217], il existe un système E -compatible $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in I}$ de faisceaux lisses de rang 1 sur $X - (D - \{x\})$ tel que pour tout $y \in D - \{x\}$, $\text{Swan}_y(\mathcal{F}_\lambda) > n$. Alors $Rj_*(L_\lambda \otimes \mathcal{F}_\lambda)_y = 0$, pour $y \in D - \{x\}$ [ibid., Prop., p. 216], et $Rj_*(L_\lambda \otimes \mathcal{F}_\lambda)_x \simeq (Rj_* L_\lambda)_x \otimes (\mathcal{F}_\lambda)_x$. Donc, d'après la formule des traces, pour $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(F_0^{r,m}, (Ra_{U*} L_\lambda)_{\bar{\eta}}) \\ &= \sum_{y \in U(\mathbb{F}_{p^r m})} \text{Tr}(F_0^{r,m}, (L_\lambda)_{\bar{y}}) \text{Tr}(F_0^{r,m}, (\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{y}}) + \frac{r}{f} \text{Tr}(F_0^{r,m}, (Rj_* L_\lambda)_{\bar{x}}) \text{Tr}(F_0^{r,m}, (\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{x}}), \end{aligned}$$

où $a_U : U \rightarrow \eta$, r et f sont tels que $\kappa(x) = \mathbb{F}_{p^r}$, $\kappa(\eta) = \mathbb{F}_{p^f}$. D'après 1.18 (iv) et la formule des traces, $(Ra_{U*} L_\lambda)_{\lambda \in I} \simeq (D_\eta Ra_{U!} D_U L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible, donc $((Rj_* L_\lambda)_x)_{\lambda \in I}$ est E -compatible. D'où (B).

Cette démonstration, jointe à 3.1, donne une démonstration de 1.16 dans le cas d'un corps fini indépendante du théorème de Gabber.

3.3. Si K est un corps local, E est un corps de nombres, pour λ_1, λ_2 deux places finies de E ne divisant pas p , ρ_1, ρ_2 des représentations λ_1 - et λ_2 -adiques de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$, Deligne a défini une notion de compatibilité entre ρ_1 et ρ_2 [Del73, 8.8]. Prenons pour \mathcal{F}_i le E_{λ_i} -faisceau sur $\eta = \text{Spec} K$ correspondant à ρ_i , choisissons un plongement $E_{\lambda_i} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{l_i}$, $i \in I = \{1, 2\}$, et posons

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \{(l, \iota)\} \\ i &\mapsto (l_i, E \hookrightarrow E_{\lambda_i} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{l_i}). \end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est (E, I, γ) -compatible au sens de 1.14 si et seulement si les semi-simplifiées de ρ_1 et ρ_2 sont compatibles au sens de Deligne.

En vue de cette interprétation, la proposition suivante généralise [Del73, 9.8].

Proposition 3.4. *Soient S une courbe lisse sur $k = \mathbb{F}_{p^f}$, $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$. Soit s un point fermé de S . Notons $S_{(s)}$ le hensélisé de S en s , η_s son point générique. Alors le système $(L_\lambda|_{X_{\eta_s}})_{\lambda \in I}$ est E -compatible (au sens de 1.14 pour les schémas de type fini sur un corps local).*

Démonstration. Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer $\kappa(s) = k$. Le problème étant local sur X , on peut supposer X affine. Pour $m \geq 1$, $g \in G$, on applique 2.3 à (X, G) sur \mathbb{F}_{p^f} et à (X_{η_s}, G) sur η_s . On obtient

$$\begin{array}{ccc} & & X^{(m,g)} \\ & & \downarrow \\ s_m = S_{\mathbb{F}_{p^f m}} & \longrightarrow & S_{\mathbb{F}_{p^f m}} \end{array}$$

Notons η_{s_m} le point générique du hensélisé de $S_{\mathbb{F}_{p^f m}}$ en s_m . On a $(X^{(m,g)})_{\eta_{s_m}} \simeq (X_{\eta_s})^{(m,g)}$ et $(C_{m,g} L_\lambda)|_{(X_{\eta_s})^{(m,g)}} \simeq C_{m,g} (L_\lambda|_{X_{\eta_s}})$. Quitte à remplacer X par $X^{(m,g)}$ (2.4), on peut supposer $G = \{1\}$.

Soit y un point fermé de X_{η_s} . Alors il existe un morphisme étale de type fini $S' \rightarrow S$, une section $s \rightarrow S'$, et un sous-schéma fermé Y de $X_{S' - \{s\}}$, fini sur $S' - \{s\}$, tels que $Y_{\eta_s} \simeq y$, d'où le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} y & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_{\eta_s} & \longrightarrow & X_{S' - \{s\}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \eta_s & \longrightarrow & S' - \{s\} & \longrightarrow & S \end{array}$$

Quitte à remplacer S par S' , X par Y , on peut supposer que X est quasi-fini séparé sur S . Prenons un S -plongement $j : X \rightarrow \bar{X}$ où \bar{X} est un S -schéma fini. Quitte à remplacer X par \bar{X} , L_λ par $j_! L_\lambda$, on peut supposer que X est fini sur S . Quitte à remplacer X par une

composante du normalisé de X^{red} , on peut supposer de plus X lisse sur k . Quitte à remplacer S par X , on peut supposer $X = S$.

Ce cas de la proposition est essentiellement [Del73, 9.8]. Rappelons comment le déduire du cas d'un corps fini de 1.16. On peut supposer $\#I = 2$. On pose $[L_\lambda] = [\mathcal{F}_\lambda] - [\mathcal{G}_\lambda]$, où \mathcal{F}_λ et \mathcal{G}_λ sont des faisceaux sur S , semi-simples sur η_s , $\lambda \in I$. Soit I_1 un sous-groupe ouvert de $I(\bar{K}/K)$ agissant trivialement sur les $(\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{\eta}_s}$ et $(\mathcal{G}_\lambda)_{\bar{\eta}_s}$, où $K = \kappa(\eta_s)$, \bar{K} est une clôture séparable de K . Soit $\phi \in G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, $m \geq 1$. Notons K_1 l'extension finie séparable de K correspondant au sous-groupe fermé de G_K topologiquement engendré par I_1 et ϕ . Alors $I(\bar{K}/K_1) = I_1$. Prenons S_1 une courbe lisse sur k , $f : S_1 \rightarrow S$ un morphisme quasi-fini et s_1 un point de S_1 au-dessus de s tels que le point générique η_{s_1} du hensélisé de S_1 en s_1 vérifie $\eta_{s_1} = \text{Spec } K_1$. Formons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(S - \{s\}) \hookrightarrow & \xrightarrow{j} & S' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S - \{s\} \hookrightarrow & \longrightarrow & S \end{array}$$

Alors $f'^* \mathcal{F}_\lambda$ et $f'^* \mathcal{G}_\lambda$ se prolongent en des faisceaux \mathcal{F}'_λ et \mathcal{G}'_λ sur S_1 , lisses dans un voisinage de s_1 . Posons $L'_\lambda = \mathcal{F}'_\lambda \oplus \mathcal{G}'_\lambda[1]$. Alors $[(Rj_* f'^* L_\lambda)_{s_1}] \simeq [(L'_\lambda)_{s_1}] - [(L'_\lambda)_{s_1}(-1)]$, d'où

$$\text{Tr}(\phi, (L_\lambda)_{\bar{\eta}_s}) = \text{Tr}(F_0^{fm}, (L'_\lambda)_{\bar{s}_1}) = \frac{1}{1 - p^{fm}} \text{Tr}(F_0^{fm}, (Rj_* (f')^* L_\lambda)_{\bar{s}_1}),$$

où $\bar{\eta}_s \rightarrow \eta_s$, $\bar{s}_1 \rightarrow s_1$. Ces traces sont E-compatibles, car $(Rj_* (f')^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ l'est d'après le cas d'un corps fini de 1.16. (En fait la démonstration de (B) donnée en 3.2 suffit : on n'a pas besoin d'invoquer 3.1.) \square

Les lemmes 3.5, 3.7 et 3.8 seront utilisés dans la démonstration de 3.1.

Lemme 3.5. *Soient X un schéma noethérien intègre muni d'une action d'un groupe fini G , $Y \rightarrow X$ un morphisme étale de schémas. Alors il existe un ouvert affine dense G -stable U de X , un morphisme $(f, \alpha) : (Z, G') \rightarrow (U, G)$ avec α surjectif faisant de Z un $(\text{Ker } \alpha)$ -torseur sur U , et une factorisation*

$$\begin{array}{ccccc} Z & \dashrightarrow & Y \times_X U & \hookrightarrow & Y \\ & \searrow f & \downarrow & & \downarrow \\ & & U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Démonstration. Quitte à remplacer X par un ouvert affine dense G -stable de X , on peut supposer X affine. Notons η le point générique de X , $G_0 = G_\eta(\eta)$. Alors G_0 agit trivialement sur X , l'action de G sur X se factorise donc par $Q = G/G_0$. Comme $X \rightarrow X/G$ est étale en η , il existe un ouvert U affine dense G -stable de X tel que $Y \times_X U \rightarrow U$ et $U \rightarrow U/G$ soient des revêtements étales. On peut supposer que $G_0 = \{1\}$. En effet, une fois ce cas établi, on peut l'appliquer, dans le cas général, à l'action de Q sur U . On obtient $(f, \beta) : (Z, Q') \rightarrow (U, Q)$. Il suffit alors de prendre $G' = G \times_Q Q'$, qui agit sur Z à travers sa projection sur Q' , et prendre pour α la projection $G' \rightarrow G$.

Soit x un point géométrique de U/G . On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} F : \{\text{revêtements étales de } U/G\} &\rightarrow \{\pi_1\text{-ensembles finis à gauche}\} \\ T &\mapsto T_x, \end{aligned}$$

où $\pi_1 = \pi_1(U/G, x)$. Alors $F(U) \simeq \pi_1/A$, où A est un sous-groupe ouvert distingué tel que $\pi_1/A \simeq G^{\text{op}}$, et $F(Y \times_X U) \simeq \prod_{i=1}^n \pi_1/B_i$, où les B_i , $1 \leq i \leq n$, sont des sous-groupes ouverts de A . Soit $C \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$ un sous-groupe ouvert distingué de π_1 . On prend $G' = (\pi_1/C)^{\text{op}} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et Z un revêtement étale de U/G tel que $F(Z) = (\pi_1/C) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'action de G' sur Z étant donnée par la translation à droite de G' sur $F(Z)$. On prend $g : Z \rightarrow Y \times_X U$ tel que $F(g)$ soit donné par

$$\begin{aligned} (\pi_1/C) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\rightarrow \prod_{i=1}^n \pi_1/B_i \\ (\sigma, \bar{i}) &\mapsto \bar{\sigma} \in \pi_1/B_i. \end{aligned}$$

Notons f le composé de g et de la projection $Y \times_X U \rightarrow U$, α le composé $G' \xrightarrow{\text{pr}_1} (\pi_1/C)^{\text{op}} \rightarrow (\pi_1/A)^{\text{op}} \simeq G$. Alors $F(f)$ s'identifie à α , donc f est G' -équivariant et fait de Z un $(\text{Ker } \alpha)$ -torseur sur U . \square

3.6. Soient $u : X \rightarrow Z$ un morphisme de schémas muni d'une action d'un groupe fini G , $X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z$ une factorisation de u dans la catégorie des schémas. Rappelons la construction d'une factorisation équivariante [dJ96, 7.6]. Pour $g \in G$, notons Y_g le Z -schéma défini par la composition $Y \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{a_g} Z$. Posons $G = \{g_1, \dots, g_n\}$,

$$(Y/Z)^G = Y_{g_1} \times_Z \dots \times_Z Y_{g_n}$$

sur lequel G opère par $(y_{g_1}, \dots, y_{g_n})g = (y_{gg_1}, \dots, y_{gg_n})$. Alors f a la factorisation G -équivariante $X \xrightarrow{v'} (Y/Z)^G \rightarrow Z$, où v' envoie x sur $(v(xg_1), \dots, v(xg_n))$.

Lemme 3.7. Soient $f : X \rightarrow Z$ un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens, G un groupe fini agissant sur f . Alors on peut factoriser f en $X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{g} Z$ de façon G -équivariante, où g est propre et j est une immersion.

Démonstration. D'après le théorème de compactification de Nagata [Con97, 4.1], f se factorise en $X \xrightarrow{j_0} Y_0 \xrightarrow{g_0} Z$, où g_0 est propre et j_0 est une immersion. Il suffit alors d'appliquer 3.6. \square

Le lemme clef suivant découle de raffinements, dus à Gabber, de résultats de de Jong ([dJ97], [Vid04, 4.4]) sur les altérations équivariantes.

On appelle *altération galoisienne* [Vid04, 4.4.1] un morphisme $(f, \alpha) : (S', G') \rightarrow (S, G)$ où α est surjectif, f est un morphisme propre dominant génériquement fini de schémas noethériens intègres, tel que $K(S')^H$ soit une extension radicielle de $K(S)$, où $H = \text{Ker } \alpha$, $K(S')$ (resp. $K(S)$) est le corps des fonctions de S' (resp. S). Alors il existe un ouvert affine dense G -stable U de S tel que $f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(U)/H$ soit un revêtement

étales galoisiens de groupe H/H_0 , où $H_0 = H \cap \text{Ker}(G' \rightarrow \text{Aut}(K(S')))$, et que $f^{-1}(U)/H \rightarrow U$ soit un homéomorphisme universel fini et plat. La composition de deux altérations galoisiennes est une altération galoisienne.

Soit G un groupe fini. Soit X un schéma noethérien régulier muni d'une action de G . Rappelons qu'un diviseur à croisements normaux G -stable D de X est dit G -strict s'il est strict et si pour toute composante irréductible D_i de D et tout $g \in G$ tel que $D_i g \neq D_i$, D_i et $D_i g$ ne se coupent pas. Soit $S = \text{Spec } R$ un trait de point fermé s . Rappelons qu'un couple semi-stable (I.5.5) est un couple (X, Z) , où X est un S -schéma de type fini et Z est une partie fermée de X contenant X_s , qui est, localement pour la topologie étale, de la forme

$$(\text{Spec } R[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \cdots t_a - \pi), Z),$$

où π est une uniformisante de R , Z est défini par l'idéal $(t_1 \cdots t_b)$, $1 \leq a \leq b \leq n$. Alors Z est un diviseur à croisements normaux de X . Si $X \rightarrow S$ est muni d'une action de G sous laquelle Z est stable, on dit que le couple semi-stable (X, Z) est G -strict si Z est un diviseur à croisements normaux G -strict de X .

Soit S un schéma noethérien. On dit qu'une courbe nodale G -équivariante $X \rightarrow S$ est G -scindée si elle est scindée et si pour tout $s \in S$, toute composante irréductible C de X_s et tout $g \in G_d(s)$ tel que $Cg \neq C$, C et Cg ne se coupent pas (condition $(*)$ dans [Vid04, 4.4.1]). On appelle *fibration plurinodale G -scindée* (cf. [dJ97, 5.8]) un système $(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0, \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$, où

- $f_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ est une courbe projective, nodale et G -scindée,
- $\sigma_{ij} : X_{i-1} \rightarrow X_i$, $j = 1, \dots, n_i$, sont des sections disjointes de f_i dans le lieu lisse de f_i , permutées par G (i. e., pour tout j , il existe j' tel que $a_g \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ij'} \circ a_g$),
- $Z_0 \subsetneq X_0$ est un fermé G -stable,

tel que f_i soit lisse sur $X_{i-1} - Z_{i-1}$, où on a posé $Z_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \sigma_{ij}(X_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$, $1 \leq i \leq d$. Ici on dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *projectif* si f admet une factorisation $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$, où i est une immersion fermée. Dans la définition d'une courbe plurinodale G -scindée, $X_d \rightarrow X_0$ est projectif et plat.

Lemme 3.8. Soient G un groupe fini, $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini G -équivariant de schémas noethériens intègres, U un ouvert dense G -stable de X . Supposons que la fibre générique X_η de f soit géométriquement irréductible. On fait aussi les hypothèses suivantes :

- (i) S est excellent.
- (ii) pour toute altération galoisienne $(S_1, G_1) \rightarrow (S, G)$ et toute partie fermée $F_1 \subsetneq S_1$, il existe une altération galoisienne $(S_2, G_2) \rightarrow (S_1, G_1)$ telle que S_2 soit régulier et que l'image inverse de F_1 dans S_2 soit contenue dans un diviseur à croisements normaux G_2 -strict.

Alors il existe un groupe fini G' , un homomorphisme de groupes $\alpha : G' \rightarrow G$, un dia-

gramme commutatif G' -équivariant

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j} & X_d & \xrightarrow{g} & S' \\ \downarrow v & & & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{f} & & & S \end{array}$$

où (u, α) , (v, α) sont des altérations galoisiennes, j est une immersion ouverte dominante, et une fibration plurinodale G' -scindée de g

$$(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = S', \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$$

telle que X_i soit régulier, Z_i soit un diviseur à croisements normaux G' -strict de X_i pour $0 \leq i \leq d$ et que Z_d contienne $X_d - v^{-1}(U)$.

On appliquera le lemme uniquement quand S est le spectre d'un corps (3.9) ou un trait excellent (4.11, 4.12). Dans ces cas, les hypothèses (i) et (ii) sont automatiquement satisfaites. Lorsque S est un trait excellent, u est nécessairement un changement de traits fini, et (X_d, Z_d) est un couple semi-stable G' -strict sur S' .

Démonstration. D'après 3.7, on peut supposer f propre. Si $\dim X_\eta = 0$, alors (f, Id_G) est une altération galoisienne, donc il suffit d'y appliquer l'hypothèse (ii) et de prendre $g = \text{Id}$. Si $\dim X_\eta \geq 1$, on applique [Vid04, 4.4.3]. On obtient un groupe fini G' , un homomorphisme de groupes $\alpha : G' \rightarrow G$, un diagramme G' -équivariant

$$\begin{array}{ccc} X_d & \xrightarrow{g} & S' \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

où (u, α) , (v, α) sont des altérations galoisiennes, et une fibration plurinodale G' -scindée de g

$$(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = S', \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$$

telle que Z_d contienne $X_d - v^{-1}(U)$. En appliquant (ii), on se ramène au cas où X_0 est régulier et Z_0 est un diviseur à croisements normaux G' -strict. Appliquant alors [Vid04, 4.4.4] successivement à f_1, \dots, f_d , on modifie X_i de sorte que X_i devient régulier et Z_i devient un diviseur à croisements normaux G' -strict, $1 \leq i \leq d$. \square

3.9. Démonstration de 3.1. On sait que f^* et \otimes préservent la E-compatibilité. Prouvons d'abord l'énoncé suivant :

(A') Pour $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme de \mathbf{Eq}/η avec f séparé, $R(f, \alpha)$ préserve la E-compatibilité.

Comme $R(f, \alpha)_! = (\text{Id}, \alpha)_! R(f, \text{Id})_!$ et $(\text{Id}, \alpha)_!$ préserve la E -compatibilité (1.18 (iv)), on peut supposer $\alpha = \text{Id}$. D'après le théorème de changement de base, on peut supposer que $Y = \eta_1$ est le spectre d'une extension finie de K . On peut supposer $\#I = 2$.

(a) *Cas* $X = \mathbb{A}_{\eta_1}^1$. Choisissons $w : W \rightarrow X$ étale dominant tel que les $w^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. On applique 3.5 à w pour trouver un ouvert affine dense G -stable $j : U \hookrightarrow X$ et un morphisme $(f, \alpha) : (U', G') \rightarrow (U, G)$ avec α surjectif faisant de U' un $(\text{Ker } \alpha)$ -torseur sur U tels que les $(f, \alpha)^* j^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. Soit $i : Z = X - U \rightarrow X$. On a le triangle distingué

$$Ra_{U!} j^* L_\lambda \rightarrow Ra_{X!} L_\lambda \rightarrow a_{Z!} i^* L_\lambda \rightarrow .$$

Ici les $Ra_{U!} j^* L_\lambda \simeq R(a_{U'}, \alpha)_! (f, \alpha)^* j^* L_\lambda$ (1.7 (a), 5.3) forment un système E -compatible en vertu de (A) et de 2.4, $(a_{Z!} i^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible car a_Z est fini. Donc $(Ra_{X!} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ l'est aussi.

(b) *Cas général*. On fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d \leq 0$ est trivial. Si $d \geq 1$, on prend un ouvert affine dense G -stable U . Soit $i : Z = X - U \rightarrow X$. On a le triangle distingué

$$Ra_{U!} j^* L_\lambda \rightarrow Ra_{X!} L_\lambda \rightarrow Ra_{Z!} i^* L_\lambda \rightarrow .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $(Ra_{Z!} i^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible. Donc il suffit de voir que $(Ra_{U!} j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible. D'après le lemme de normalisation, il existe un morphisme $U/G \rightarrow \mathbb{A}_{\eta_1}^1$ à fibres de dimension $\leq d - 1$. Ceci induit un η_1 -morphisme G -équivariant $f : U \rightarrow \mathbb{A}_{\eta_1}^1$. On a $Ra_{U!} \simeq Ra_{\mathbb{A}_{\eta_1}^1!} Rf_!$. Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence et (a).

Pour prouver 1.16, il suffit de prouver les énoncés suivants pour tout $d \in \mathbb{N}$:

(C_d) Pour (X, G) sur η avec $\dim X \leq d$, D_X préserve la E -compatibilité.

(D_d) Pour $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme de $\mathbf{Eq}l/\eta$ (où f est éventuellement non séparé) avec $\dim X \leq d$, $R(f, \alpha)_*$ la préserve aussi.

On peut supposer $\#I = 2$. On fait une récurrence sur d . Le cas $d = 0$ est trivial (1.18 (iv)). Pour $d \geq 1$, supposons (C_{d-1}) et (D_{d-1}) établis.

Prouvons (C_d). On peut supposer X réduit. Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ un système E -compatible sur X . On prend un ouvert dense régulier G -stable $j : U \hookrightarrow X$ tel que les $L_\lambda|_U$ soient à faisceaux de cohomologie lisses. On pose $i : Z = X - U \rightarrow X$. Le triangle distingué

$$i_* Ri^! D_X L_\lambda \rightarrow D_X L_\lambda \rightarrow Rj_* j^* D_X L_\lambda \rightarrow$$

se récrit

$$i_* D_Z(i^* L_\lambda) \rightarrow D_X L_\lambda \rightarrow Rj_* D_U j^* L_\lambda \rightarrow .$$

D'après (C_{d-1}), $(D_Z(i^* L_\lambda))_{\lambda \in I}$ est E -compatible. D'après 1.18 (iv), $(D_U j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible. Donc la preuve de (C_d) se ramène à celle de (D_d).

Prouvons (D_d). On prend $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_C^b(X, G, E)$.

3.9.1. Supposons qu'il existe $(L'_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_C^b(X, G, E)$ tel que pour tout $\lambda \in I$, $[L_\lambda] - [L'_\lambda]$ soit à support de dimension $\leq d - 1$, *i. e.*, il existe $i : Z_\lambda \rightarrow X$ sous-schéma fermé G -stable de dimension $\leq d - 1$ et $L''_\lambda \in K(Z_\lambda, G, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ tels que $[L_\lambda] - [L'_\lambda] = i_* L''_\lambda$. En appliquant (D_{d-1}), on voit qu'il suffit de vérifier $(Rf_* L'_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_C^b(Y, G, E)$.

On peut supposer X réduit. Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense normal G -stable. On considère $L_\lambda \rightarrow Rj_* j^* L_\lambda$. D'après 3.9.1, il suffit de montrer que $(Rj_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(fj)_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E -compatibles. Donc on peut supposer X normal. On peut supposer de plus que G agit transitivement sur $\pi_0(X)$. Si C est une composante connexe de X , alors $(C, G_d(C)) \rightarrow (X, G)$ est cocartésien (1.1.2). Quitte à remplacer X par une composante connexe (1.5.1), on peut supposer X intègre.

Choisissons $w : W \rightarrow X$ étale dominant tel que les $w^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. On applique 3.5 à w pour trouver un ouvert dense G -stable U de X , et $(g, \beta) : (Z, G') \rightarrow (U, G)$ avec β surjectif faisant de Z un $(\text{Ker } \beta)$ -torseur sur U , tels que les $L_\lambda|_Z$ vérifient 3.0.1. D'après 3.9.1, il suffit de montrer que $(Rj_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(fj)_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E -compatibles, où $j : U \hookrightarrow X$. D'après 1.7 (a), $j^* L_\lambda \simeq (g, \beta)_* (g, \beta)^* j^* L_\lambda$. Donc, quitte à remplacer X par Z , on peut supposer

(a) les L_λ vérifient 3.0.1.

D'après 3.7, $(f, \alpha) = (p, \alpha)(j, \text{Id})$, où j est une immersion ouverte et p est propre. D'après (A'), $R(p, \alpha)_*$ préserve la E -compatibilité. Donc on peut supposer (a) et

(b) f est une immersion ouverte et $\alpha = \text{Id}$.

Ces hypothèses seront toujours conservées.

Le cas $d = 1$ résulte alors de (B). En effet, on s'intéresse aux traces situées en un point $y \in Y - X$. Quitte à remplacer G par $G_d(y)$ et Y par un voisinage affine $G_d(y)$ -stable de y , on peut supposer de plus Y affine. En vertu de 2.4, on peut supposer $G = \{1\}$. Soit $g : Y' \rightarrow Y$ le normalisé de Y_{red} . Formons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow g_X & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Le morphisme $L_\lambda \rightarrow g_{X*} g_X^* L_\lambda$ est un isomorphisme sur le lieu de normalité de X_{red} , qui est un ouvert dense. D'après 3.9.1, il suffit donc de voir que les $Rf_* g_{X*} g_X^* L_\lambda = g_* Rf'_* g_X^* L_\lambda$ forment un système E -compatible. Quitte à remplacer f par f' , on peut supposer de plus Y normal. En appliquant (B), on achève la démonstration de (D₁).

Dans la suite, $d \geq 2$. Soit K_1 une extension galoisienne de K telle que les composantes irréductibles de $Y \times_\eta \eta_1$ soient géométriquement irréductibles [EGAIV, 4.5.10], où $\eta_1 = \text{Spec } K_1$. Quitte à faire le changement de base $\eta_1 \rightarrow \eta$ et remplacer G par $G \times \text{Gal}(K_1/K)$, on peut supposer qu'on a un morphisme G -équivariant $Y \rightarrow \eta_1$ et que les composantes irréductibles de Y sont géométriquement irréductibles sur η_1 . Comme dans l'alinéa précédent, on peut supposer de plus Y normal. Quitte à remplacer Y par une composante connexe, on peut supposer Y intègre, donc géométriquement irréductible sur η_1 . On peut supposer $\dim Y = d$ et X non vide.

On applique 3.8 à $Y \rightarrow \eta$ et l'ouvert X de Y . On obtient une altération galoisienne $(\nu, \beta) : (Y', G') \rightarrow (Y, G)$ avec Y' régulier et un diviseur à croisements normaux G' -strict D

de Y' contenant $Y' - v^{-1}(X)$. Soit $U = Y' - D$ et formons le diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (U, G') \xrightarrow{(j, \text{Id}_{G'})} (v^{-1}(X), G') \xrightarrow{(f', \text{Id}_{G'})} (Y', G') \\ \downarrow (v_X, \beta) \qquad \qquad \downarrow (v, \beta) \\ (X, G) \xrightarrow{(f, \text{Id}_G)} (Y, G) \end{array}$$

Le morphisme $L_\lambda \rightarrow R(v_X, \beta)_* v_X^* L_\lambda$ est un isomorphisme sur un ouvert dense de X (1.7 (a)). D'après 3.9.1 et (A'), il suffit donc de voir que les $Rf_* R(v_X, \beta)_* v_X^* L_\lambda = R(v, \beta)_* Rf'_* v_X^* L_\lambda$ forment un système E-compatible. Par (A'), il suffit alors de voir que $(Rf'_* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible. Comme $\dim(v^{-1}(X) - U) \leq d - 1$, il suffit, d'après 3.9.1, de voir que $(Rj_* j^* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(f'j)_* j^* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles. Donc on peut supposer

(c) Y est régulier irréductible de dimension d .

et X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G -strict de Y .

Posons $Y - X = \sum_{i \in J} D_i$. Pour $i \in J$, notons $X_{(i)} = Y - \bigcup_{j \in J - \{i\}} D_j$, et formons le diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_i^\circ \xrightarrow{j'_{(i)}} D_i \\ \downarrow \iota'_i \qquad \qquad \downarrow \iota_i \\ X \xrightarrow{j^{(i)}} X_{(i)} \xrightarrow{\quad} Y \end{array}$$

D'après (a), L_λ est à faisceaux de cohomologie lisses sur X , modérément ramifiés sur Y . D'après (I.3.7.1), le morphisme de changement de base

$$\iota_i^* Rf_* L_\lambda \rightarrow R(j'_{(i)})_* (\iota'_i)^* Rj_*^{(i)} L_\lambda$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme est $G_d(D_i)$ -équivariant. En appliquant (D_{d-1}) à $j'_{(i)}$, il suffit de prouver la E-compatibilité de $(Rj_*^{(i)} L_\lambda)_{\lambda \in I}$. On est ramené à prouver la stabilité par Rf_* sous les hypothèses additionnelles (c) et

(d) X est le complémentaire d'un diviseur régulier D de Y .

Refaisant un dévissage comme dans la démonstration de (D_1) , on peut supposer de plus

(e) Y affine.

En vertu de 2.4, on peut supposer $G = \{1\}$. Pour $y \in |D|$, on prend un sous-schéma régulier C de Y de dimension 1 tel que $C \cap D = \{y\}$. Alors d'après (I.3.7 (ii)), $(Rf_* L_\lambda)|_C \simeq Rf'_*(L_\lambda|_{C \cap X})$, où $f' : C \cap X \hookrightarrow C$. Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse (B). Ceci achève la démonstration de (D_d) . \square

La démonstration de (D_d) , $d \geq 2$ peut aussi être achevée par la méthode de la démonstration de [SGA4 $^{1/2}$, Th. finitude, 2.4]. Sous les hypothèses (a) à (e), on plonge Y/G

dans un espace affine \mathbb{A}_η^n . On note $g : Y \rightarrow \mathbb{A}_\eta^n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $p_i : \mathbb{A}_\eta^n \rightarrow \mathbb{A}_\eta^1$ la i -ième projection et on considère

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow p_i g \\ & & \mathbb{A}_\eta^1 \end{array}$$

D'après le théorème de changement de base générique ([*ibid.*, 1.9 (ii)] pour le cas des coefficients de torsion ; le cas l -adique résulte de ce cas par l'argument usuel : passer aux gradués pour la filtration l -adique sur un modèle entier), il existe un ouvert dense U_i de \mathbb{A}_η^1 tel que Rf_* commute à tout changement de base $S' \rightarrow U_i$. Quitte à rétrécir U_i , on peut supposer que les fibres de $(p_i g)^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ sont de dimension $\leq d - 1$. Alors (D_{d-1}) implique que

$$(Rf_* L_\lambda | (p_i g)^{-1}(U_i))_{\lambda \in I}$$

est E -compatible, pour tout i . Notons que $E = Y - \bigcup_{i=1}^n (p_i g)^{-1}(U_i)$ est un ensemble fini, donc $E \cap (Y - X)$ est rare dans $Y - X$, car $Y - X$ est purement de dimension $d - 1 \geq 1$. Comme les $Rf_* L_\lambda | Y - X$ sont à faisceaux de cohomologie lisses (I.3.7 (i)), $(Rf_* L_\lambda | Y - X)_{\lambda \in I}$ est E -compatible en vertu de la proposition suivante (où $m = d - 1$).

Proposition 3.10. *Soit $m \geq 0$. Faisons l'hypothèse (D_m) . Soient (X, G) de type fini sur η avec X régulier, de dimension $\leq m$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \mathbb{Q}_{l_\lambda})$ à faisceaux de cohomologie lisses. Supposons qu'il existe $U \subset X$ un ouvert dense G -stable tel que $(L_\lambda | U)_{\lambda \in I} \in D_c^b(U, G, E)$. Alors $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible.*

Rappelons que l'hypothèse (D_m) sera satisfaite (une fois (A) et (B) établis).

Démonstration. On a une filtration de X par des ouverts G -stables

$$U = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_m = X$$

telle que $U_i - U_{i-1}$ soit régulier et purement de codimension i dans U_i . On montre $(L_\lambda | U_i)_{\lambda \in I} \in D_c^b(U_i, G, E)$ par récurrence sur i . Le cas $i = 0$ est une hypothèse de la proposition et le cas $i = m$ permet de conclure. Supposons cela vrai pour un i vérifiant $0 \leq i \leq m - 1$. Soit $j_i : U_i \hookrightarrow U_{i+1}$. On a la formule de projection

$$L_\lambda | U_{i+1} \otimes Rj_{i*} \mathbb{Q}_{l_\lambda} \xrightarrow{\sim} Rj_{i*} (L_\lambda | U_i).$$

D'après l'hypothèse de récurrence et (D_m) , $Rj_{i*} (L_\lambda | U_i) \in D_c^b(U_{i+1}, G, E)$. On a un isomorphisme G -équivariant

$$R^q j_{i*} \mathbb{Q}_l = \begin{cases} \mathbb{Q}_{l, U_{i+1}} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Q}_{l, U_{i+1} - U_i}(-i - 1) & \text{si } q = 2i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in |U_{i+1} - U_i|$, tout $\bar{x} \rightarrow x$ et tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^n$, $n > 0$ un entier (on a utilisé les notations de 1.13), on a

$$\mathrm{Tr}((g, \phi), (Rj_{i*}\mathbb{Q}_l)_{\bar{x}}) = 1 - p^{n(i+1)}.$$

Donc on a $(L_\lambda|_{U_{i+1}})_{\lambda \in I} \in D_c^b(U_{i+1}, G, E)$. \square

4 Indépendance de l des cycles proches et fin de la démonstration de 1.16

4.1. Soient S un trait hensélien, l un nombre premier inversible sur S . Soit \mathbf{D}_S la catégorie des couples (X, S_1) où S_1 est un trait fini sur S et X est un schéma de type fini sur S_1 . Un morphisme $(X_1, S_1) \rightarrow (X_2, S_2)$ dans \mathbf{D}_S est un couple (f, g) de flèches s'insérant dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & S_1 \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ X_2 & \longrightarrow & S_2 \end{array}$$

On note par s le point fermé de S et par η le point générique de S . Soit $\mathbf{D}_{s,S}$ la sous-catégorie pleine de \mathbf{D}_S formée des couples (X, S_1) avec $X_\eta = \emptyset$.

À un objet (X, S_1) de $\mathbf{D}_{s,S}$, on associe le topos $X \times_{s_1} \eta_1$ [SGA7, XIII 1.2.4], où s_1 est le point fermé de S_1 , η_1 est le point générique de S_1 . Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{s,S})$, on définit comme dans 1.3 les catégories $\mathrm{Mod}_c(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, $D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, les six opérations et la dualité. Soit $\bar{s}_1 \rightarrow s_1$ un point géométrique algébrique. Un faisceau d'ensembles \mathcal{F} sur $(X \times_{s_1} \eta_1, G)$ est un faisceau sur $X_{\bar{s}_1}$, muni d'une action continue ([SGA7, XIII 1.1.2]) de

$$G_{\bar{s}_1, \eta_1} = G \times_{\mathrm{Gal}(k_1/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{K}_1/K_1^G),$$

compatible à l'action de $G_{\bar{s}_1, \eta_1}$ sur $X_{\bar{s}_1}$ (via $G_{\bar{s}_1, \eta_1} \rightarrow G_{\bar{s}_1} = G \times_{\mathrm{Gal}(k_1/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{k}_1/k_1^G)$). Ici $k_1 = \kappa(s_1)$, $\overline{k}_1 = \kappa(\bar{s}_1)$, $K_1 = \kappa(\eta_1)$, \overline{K}_1 est une clôture séparable de K_1 .

Pour $(x, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{s,S})$ avec $x = \mathrm{Spec} \kappa(x)$, et \bar{x} un point géométrique algébrique au-dessus de x , on pose

$$G_{\bar{x}, \eta_1} = G \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G)} \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G) \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{K}_1/K_1^G).$$

En d'autres termes, un élément de $G_{\bar{x}, \eta_1}$ est un triplet (g, ϕ, ψ) où $g \in G$, $\phi \in \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x}), \kappa(x)^G)$, $\psi \in \mathrm{Gal}(\overline{K}_1, K_1^G)$ tel que ϕ soit la réduction de ψ et que ϕ et g induisent le même automorphisme sur $\kappa(x)$. On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_c(x \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) &\rightarrow \mathrm{Rep}(G_{\bar{x}, \eta_1}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ L &\mapsto L_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{s,S})$, x un point fermé de X , on pose

$$G_d(x, \bar{x}, \eta_1) = G_d(x)_{\bar{x}, \eta_1}.$$

Pour $L \in D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on pose $L_x = i_x^* L$, où $i_x : (x, S_1, G_d(x)) \rightarrow (X, S_1, G)$.

On a la variante suivante de 1.12.

Proposition 4.2. Soient $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{S,S})$, S' un trait fini étale sur S d'extension résiduelle galoisienne, T une composante de $S_1 \times_S S'$. Notons t le point fermé de T , η_T le point générique de T , $H = G_d(T)$, $Y = X \times_{S_1} t$. Considérons $(Y, T, H) \rightarrow (X, S_1, G)$. Soient y un point fermé de Y au-dessus d'un point fermé x de X , $\bar{y} \rightarrow y$ au-dessus de $\bar{x} \rightarrow x$. Alors l'image de l'homomorphisme induit $i : H_d(y, \bar{y}, \eta_T) \rightarrow G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ est

$$G' = G_d(x) \times_{\text{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})} \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \times_{\text{Gal}(\kappa(\bar{x})/k_1^{G_d(x)})} \text{Gal}(\overline{K_1}/K_1^{G_d(x)} \cdot K')$$

où K' est le corps des fractions de S' .

Démonstration. Il est évident que $\text{Im } i \subset G'$. Soit $(g, \phi, \psi) \in G'$. Posons $\Gamma = \text{Gal}(K'/K)$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc} (Y, H) & \longrightarrow & (Y, (G \times \Gamma)_d(T)) & \longrightarrow & (X \times_S S', G \times \Gamma) & \longrightarrow & (X, G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (t, H) & \longrightarrow & (t, (G \times \Gamma)_d(T)) & \longrightarrow & (s_1 \times_S S', G \times \Gamma) & \longrightarrow & (s_1, G) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & (s', \Gamma) & \longrightarrow & (s, \{1\}) \end{array}$$

D'après une variante de 1.11 (b), l'homomorphisme $(G \times \Gamma)_d(y, \bar{y}, \eta_T) \rightarrow G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ est un isomorphisme. Soit $(g, \gamma, \phi', \psi') \in (G \times \Gamma)_d(y, \bar{y}, \eta_T)$ l'image inverse de (g, ϕ, ψ) . Alors $\phi'|k' = \text{Id}_{k'}$. Comme $(\gamma, \phi') \in G_d(s', \bar{s})$, on a $\gamma = 1$, i. e., $(g, \phi, \psi) = i(g, \phi', \psi')$. \square

4.3. Soit $(S_{(m)})_{m \geq 1}$ un système comme dans 2.3. On désigne par $\mathbf{Eq}^{\text{adm}}(\mathbf{D}_{S,S})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{S,S})$ formée des triples (X, S_1, G) où G agit sur X de façon admissible. Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}^{\text{adm}}(\mathbf{D}_{S,S})$, on applique 2.3 à $(X, G) \rightarrow (S_1, G)$ au-dessus de S . Pour $m \geq 1$, $g \in G$, choisissons une composante $T_{m,g}$ de $S_1^{(m,g)}$ et posons $Y_{m,g} = X^{(m,g)} \times_{S_1^{(m,g)}} T_{m,g}$. On va définir un foncteur

$$C_{m,g} : D_c^b(X \times_{S_1} \eta_1, G, \overline{Q_l}) \rightarrow D_c^b(Y_{m,g} \times_{T_{m,g}} \eta_{T_{m,g}}, \overline{Q_l}),$$

analogue du $C_{m,g}$ de 2.3. Le groupe $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}$ agit diagonalement sur $S_1 \times_S S_{(n_g m)}$. Choisissons S' une composante de $S_1 \times_S S_{(n_g m)}$ au-dessus de $T_{m,g}$, $X' = X \times_{S_1} S'$. On note

$$(X, S_1, G) \xleftarrow{d} (X', S', (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \xrightarrow{e} (Y_{m,g}, T_{m,g}, \{1\}).$$

On pose $C_{m,g} = e_* d^*$, qui ne dépend pas du choix de S' .

4.4. Supposons dorénavant, sauf en 4.7, que le corps résiduel k de S soit \mathbb{F}_{p^f} . Alors $G_d(x, \bar{x}, \eta_1) = G_d(x) \times_{\text{Gal}(\kappa(x)/k)} \text{Gal}(\overline{K_1}/K_1^{G_d(x)})$. Soient E, I, γ comme dans 1.13. Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{S,S})$, on dit que $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X \times_{S_1} \eta_1, G, \overline{Q_{l_\lambda}})$ est (E, I, γ) -compatible (ou E -compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout $x \in |X|$, tout

$\bar{x} \rightarrow x$ et tout $(g, \phi, \psi) \in G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ avec $\rho(\phi)$ une puissance entière de F_0^f , le système $(\text{Tr}((g, \phi, \psi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est (E, I, γ) -compatible. Ici $\rho : \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ est l'inclusion, $F_0 \in \text{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ désigne le Frobenius géométrique absolu $a \mapsto a^{1/p}$.

Comme en 1.15, la définition ne changera pas si on se restreint aux triplets $(g, \phi, \psi) \in G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, où m est un entier $\geq N(x)$, $N(x)$ est une constante qui ne dépend que de x .

Proposition 4.5. *La E-compatibilité ainsi définie est stable par les six opérations et la dualité.*

Démonstration. Cela découle du cas fini de 1.16 et 1.17. À titre d'exemple, prouvons la stabilité par D . Soient $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_{s,S})$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, E)$. Il suffit de montrer que pour $x \in |X|$, $\bar{x} \rightarrow x$, $(g, \phi, \psi) \in G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{mf}$, $m \geq 1$, $(\text{Tr}((g, \phi, \psi), (DL_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est E -compatible. Soient $s' = \text{Spec } \mathbb{F}_{p^f m}$, S' un trait étale sur S de point fermé s' . Appliquons 4.2. On a $(g, \phi, \psi) \in H_d(y, \bar{y}, \eta_T)$. L'unique homomorphisme continu $\text{Gal}(\kappa(\bar{t})/\kappa(t)^H) \rightarrow \text{Gal}(\kappa(\bar{\eta}_T)/\kappa(\eta_T)^H)$ qui envoie ϕ sur ψ définit un foncteur $F : D_c^b(Y \times_t \eta_T, H, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(Y, H, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de sorte que

$$\text{Tr}((g, \phi, \psi), (DL_\lambda)_{\bar{x}}) = \text{Tr}((g, \phi), (F(DL_\lambda)_t)_{\bar{y}}).$$

Comme $F(DL_\lambda)_t \simeq DF(L_\lambda)_t$, il suffit d'appliquer le cas fini de 1.17. \square

Pour $m \geq 1$, soit $S_{(m)}$ un trait étale sur S de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^f m}$. L'isomorphisme (2.3.1) induit une action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur $S_{(m)}$. Appliquons 4.3 au système $(S_{(m)})_{m \geq 1}$.

Proposition 4.6. *Soient $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}^{\text{adm}}(\mathbf{D}_{s,S})$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour que $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ soit E -compatible, il faut et il suffit que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$,*

$$(C_{m,g} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(Y_{m,g} \times_{t_{m,g}} \eta_{T_{m,g}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

soit E-compatible.

Démonstration. La nécessité est claire. Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ tel que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$, $(C_{m,g} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ soit E -compatible. Comme $e^* e_* = \text{Id}$ (variante de 1.7 (b)), on a $(d^* L_\lambda) \in D_c^b(X' \times_{s'} \eta', \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}, E)$. Il suffit de montrer que pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \rightarrow x$ et tout $(g, \phi, \psi) \in G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, $m \geq 1$, $(\text{Tr}((g, \phi, \psi), (L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda \in I}$ est E -compatible. Notons T la composante de $S_1 \times_S S_{(m)}$ dominée par S' , $H = G_d(T)$, $Y = X \times_{s_1} t$. Soient $y \in |Y|$ au-dessus de x , $\bar{y} \rightarrow y$ au-dessus de $\bar{x} \rightarrow x$. D'après 4.2, on a $(g, \phi, \psi) \in H_d(y, \bar{y}, \eta_T)$, correspondant à $(\bar{1}, \phi, \psi) \in (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(y, \bar{y}, \eta_T)$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc} (X', (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(S')) & \xrightarrow{(\text{Id}, \Delta)} & (X', (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(S')) & \rightarrow & (Y \times_{s_{(m)}} s_{(n_g m)}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) & \rightarrow & (Y, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (S', (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(S')) & \xrightarrow{(\text{Id}, \Delta)} & (S', (\mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z})_d(S')) & \rightarrow & (t \times_{s_{(m)}} s_{(n_g m)}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) & \rightarrow & (t, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & (s_{(n_g m)}, \mathbb{Z}/n_g \mathbb{Z}) & \longrightarrow & (s_{(m)}, \{1\}) \end{array}$$

Soient $x' \in |X'|$ au-dessus de y , $\bar{x}' \rightarrow x'$ au-dessus de $\bar{y} \rightarrow y$. D'après une variante de 1.11 (b), l'homomorphisme $(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x', \bar{x}', \eta') \rightarrow (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(y, \bar{y}, \eta_T)$ est un isomorphisme. Soit $(\bar{1}, b, \phi, \psi) \in (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x', \bar{x}', \eta')$ l'image inverse de $(\bar{1}, \phi, \psi)$. Alors $(b, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(\eta_{n_g m}, \bar{\eta})$, donc $b = \bar{1}$. Bref, $d_{\bar{x}', \eta'} : (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x', \bar{x}', \eta') \rightarrow G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ envoie $(\bar{1}, \phi, \psi)$ sur (g, ϕ, ψ) . Donc les

$$\mathrm{Tr}((g, \phi, \psi), (L_\lambda)_{\bar{x}}) = \mathrm{Tr}((\bar{1}, \phi, \psi), (d^* L_\lambda)_{\bar{x}'})$$

forment un système E-compatible. \square

4.7. Soit $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_S)$. On a le foncteur des cycles proches

$$R\Psi_{X/S_1} : D_c^b(X_{\eta_1}, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_{s_1} \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Un morphisme dans $\mathbf{Eq}(\mathbf{D}_S)$ de la forme $(f, \mathrm{Id}, \alpha) : (X, S_1, G) \rightarrow (Y, S_1, H)$ induit un morphisme $R\Psi_{Y/S_1} R(f_{\eta_1}, \alpha)_* \rightarrow R(f_{s_1}, \alpha)_* R\Psi_{X/S_1}$, qui est un isomorphisme lorsque f est propre.

Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_S)$, $L \in D_c^b(X_{\eta_1}, G, \mathbb{Q}_l)$, on a, avec les notations de 2.3 et 4.3,

$$(4.7.1) \quad C_{m,g} R\Psi_{X/S_1} L \simeq R\Psi_{Y_{m,g}/\Gamma_{m,g}} (C_{(X_{\eta_1}, G), m, g} L)_{\eta_{\Gamma_{m,g}}}.$$

Le résultat principal de ce § est le suivant.

Théorème 4.8. Soient S_1 un trait fini sur S , X un schéma de type fini sur S_1 , G un groupe fini agissant sur $X \rightarrow S_1$ par des S -automorphismes. Alors $R\Psi_{X/S_1}$ préserve la E-compatibilité.

Pour S d'égale caractéristique (ou du moins, pour S le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur \mathbb{F}_{p^f}), le résultat était connu de Gabber, mais non publié.

Pour $(g, \phi, \psi) \in G_{\bar{s}_1, \eta_1}$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \in \mathbb{Z}$, 4.8 combiné avec I.2.4 et I.5.3 implique que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{Tr}((g, \phi, \psi), H_c^i(X_{\bar{s}}, (R\Psi_{X/S_1} \mathbb{Q}_l)_{\bar{s}})) \in p^{f d \min\{0, n\}} \mathbb{Z}$$

est indépendant de l , où $d = \dim X_{\eta_1}$. On retrouve ainsi le cas (très particulier) de [Mie07, 6.1.3] où Γ est le graphe transposé de a_g .

La démonstration de 4.8 sera donnée en 4.12. Commençons par les deux cas particuliers suivants.

Lemme 4.9. Supposons de plus X quasi-fini sur S_1 . Alors $R\Psi_{X/S_1}$ préserve la E-compatibilité.

Lemme 4.10. Soient G un groupe fini agissant sur un trait S_1 fini sur S , (X, Z) un couple semi-stable G -strict sur S_1 , $u : X - Z \hookrightarrow X_{\eta_1}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X - Z, G, E)$ avec L_λ vérifiant 3.0.1. Alors on a

$$(R\Psi_{X/S_1} R u_* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X_{s_1} \times_{s_1} \eta_1, G, E).$$

Pour la notion de couple semi-stable G -strict, on renvoie aux définitions qui précèdent 3.8.

Démonstration de 4.9. On peut supposer X réduit. Soit $f : X' \rightarrow X$ le normalisé de X . Alors $f_\eta = \text{Id}$ et $R\Psi_{X/S_1} \simeq Rf_{s*} R\Psi_{X'/S_1}$. Donc on peut supposer X normal de sorte que X est somme disjointe de spectres d'extensions finies de s_1 , de spectres d'extensions finie de η_1 et de traits finis sur S_1 . On peut supposer que $X = S_3$ est un trait fini sur S_1 . Soient K_2 une sous-extension maximale non ramifiée de K_3/K_1 , S_2 le normalisé de S_1 dans K_2 , $g : S_3 \rightarrow S_2$. Alors $R\Psi_{S_3/S_1} \simeq R\Psi_{S_2/S_1} Rg_{\eta_1*}$. Comme $R\Psi_{S_2/S_1} : D_c^b(\eta_2, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(s_2 \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ s'identifie à l'identité, il résulte de 1.18 (iv) que $R\Psi_{S_3/S_1}$ préserve la E-compatibilité. \square

Démonstration de 4.10. Soit D une composante de X_s . On note par $Z^{(D)}$ la réunion des autres composantes de Z . Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{Z} & X - Z^{(D)} & \longleftarrow & D^\circ \\ \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow j \\ & & & & D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_\eta & \xrightarrow{\subset} & X & \longleftarrow & X_s \end{array}$$

Comme L_λ est modérément ramifié sur X , on a un isomorphisme (I.5.6.2)

$$(R\Psi_{X/S_1} Ru_* L_\lambda)|_D \simeq Rj_* R\Psi_{(X-Z^{(D)})/S_1} L_\lambda.$$

Cet isomorphisme est $G_d(D)$ -équivariant. Appliquant 1.16 dans le cas fini (variante 4.5) à Rj_* , on est ramené à prouver la proposition au cas où $Z = X_s$ est un diviseur régulier. Alors $X \rightarrow S_1$ est lisse. D'après 4.6 et (4.7.1), on peut supposer $G = \{1\}$. Soit $x \in |X_s|$. Il existe un sous-schéma fermé Y de X qui est un trait fini étale sur S' de point fermé x . D'après I.5.6 (iii), $(R\Psi_{X/S_1} L_\lambda)_x \simeq R\Psi_{Y/S_1} (L_\lambda)_{\eta_Y}$. Il suffit donc d'appliquer 4.9 à $Y \rightarrow S_1$. \square

4.11. Fin de la démonstration de 1.16. Pour finir la démonstration, il reste à traiter le cas des courbes. Plus précisément, il reste à prouver les énoncés (A) et (B) de 3.1 pour K un corps local.

Prouvons d'abord (B). On peut supposer X géométriquement irréductible. On applique 3.8 à $G = \{1\}$ et $X \rightarrow S$ et on obtient un groupe fini G' et un diagramme commutatif G' -équivariant

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xrightarrow{j_1} & Y & \xrightarrow{g} & S' \\ \downarrow v_U & \square & \downarrow v & & & & \downarrow u \\ U & \xrightarrow{j} & X & \longrightarrow & & & S \end{array}$$

avec $(Y, Y - U')$ un couple semi-stable G' -strict sur S' , $Y - U' = Y_{S'} \cup H$, où H est la réunion d'un nombre fini de sections de g . Quitte à rétrécir Y , on peut supposer que $X' = Y_{\eta'}$. Notons que v est fini. Le cône de $L_\lambda \rightarrow (\nu_U, \alpha)_* \nu_U^* L_\lambda$ est à support de dimension 0 (1.7 (a)), où $\alpha : G' \rightarrow \{1\}$. D'après 1.18 (iv), $((\nu_U, \alpha)_* \nu_U^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, donc

il suffit de vérifier que les $Rj_*(\nu_U, \alpha)_* \nu_U^* L_\lambda = (\nu, \alpha)_* Rj'_* \nu_U^* L_\lambda$ forment un système E-compatible. Comme $(\nu, \alpha)_*$ préserve la E-compatibilité, il suffit donc de vérifier que $(Rj'_* L'_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, où $L'_\lambda = \nu_U^* L_\lambda$. D'après 1.5.6 (i), on a $i_{s'}^* R\Psi_{Y/S'} Rj'_* L'_\lambda \simeq R\Psi_{H/S'} i_{\eta'}^* Rj'_* L'_\lambda$, où $i_{s'} : H \cap Y_{s'} \rightarrow Y_{s'}$, $i_{\eta'} : H \cap Y_{\eta'} \rightarrow Y_{\eta'}$. Cet isomorphisme est G' -équivariant. Comme $R\Psi_{H/S'} : D_c^b(H_{\eta'}, G', \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(H_{s'} \times_{s'} \eta', G', \overline{\mathbb{Q}}_l)$ s'identifie à l'identité, il suffit alors d'appliquer 4.10.

Prouvons (A). Plus généralement, prouvons que si G est un groupe fini agissant sur a_X comme dans (A) par des η -automorphismes, et $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1, alors $(Ra_{X!} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(\eta_1, G, E)$. On peut supposer X géométriquement irréductible sur η_1 . Soit S_1 le normalisé de S dans K_1 . L'action de G sur η_1 se prolonge en une action sur S_1 . On applique 3.8 à $X \rightarrow S_1$ et obtient un homomorphisme surjectif $\alpha : G' \rightarrow G$ et un diagramme commutatif G' -équivariant

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xhookrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{g} & S' \\ \downarrow v & & & & \downarrow u \\ X & \longrightarrow & & & S_1 \end{array}$$

avec $(Y, Y - X')$ un couple semi-stable G' -strict sur S' et g propre. Le cône de $L_\lambda \rightarrow (\nu, \alpha)_* \nu^* L_\lambda$ est à support de dimension 0. Donc il suffit de vérifier que $(Ra_{X!}(\nu, \alpha)_* \nu^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ appartient à $D_c^b(\eta_1, G, E)$. Soit $L'_\lambda = \nu^* L_\lambda$. On a $Ra_{X!}(\nu, \alpha)_* \nu^* L_\lambda = (u_{\eta_1}, \alpha)_* Rg_{\eta'}^* Rj_{\eta'}^* L'_\lambda$,

$$R\Psi_{S'/S'} Rg_{\eta'}^* Rj_{\eta'}^* L'_\lambda \simeq Rg_{s'}^* R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'}^* L'_\lambda.$$

Comme $R\Psi_{S'/S'} : D_c^b(\eta', G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(s' \times_{s'} \eta', G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ s'identifie à l'identité, il suffit de vérifier que $(R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'}^* L'_\lambda)_{\lambda \in I}$ appartient à $D_c^b(Y_{s'}, G, E)$. On a le triangle distingué

$$R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'}^* L'_\lambda \rightarrow R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'}^* L'_\lambda \rightarrow R\Psi_{Y/S'} i_* i^* Rj_{\eta'}^* L'_\lambda \rightarrow,$$

où $i : Y_{\eta'} - X' \rightarrow Y_{\eta'}$. Pour le deuxième terme, on applique 4.10. Pour le troisième, on applique (B), 2.4 et 4.9. On a achevé la démonstration de 1.16. \square

4.12. Démonstration de 4.8. Supposons $\#I = 2$. Il suffit de montrer pour tout $d \in \mathbb{N}$:

(* $_d$) Pour tout $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_S)$ et toute famille E-compatible $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sur X_{η_1} , de support de dimension $\leq d$, la famille $(R\Psi_{X/S_1} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible.

On montre (* $_d$) par récurrence sur d . On peut supposer $\dim X_\eta \leq d$ et X réduit. Si $d = 0$, alors X est quasi-fini sur S_1 . Ce cas est déjà traité en 4.9. Soit $d \geq 1$ tel que (* $_{d-1}$) soit vrai. Prouvons (* $_d$). Soit $w : U \hookrightarrow X_\eta$ un ouvert dense G -stable affine et normal. Comme $(Rw_* w^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible (le cas local de 1.16) et le cône M_λ de $L_\lambda \rightarrow Rw_* w^* L_\lambda$ est à support dans $Y_\eta - U$ de dimension $\leq d - 1$, $(R\Psi_{X/S_1} M_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible en vertu de l'hypothèse de récurrence (* $_{d-1}$). Donc il suffit de montrer que $(R\Psi_{X/S_1} Rw_* w^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible. Quitte à remplacer U par un sous-schéma ouvert fermé G -stable de U , on peut supposer que G agit transitivement sur $\pi_0(U)$. Soit C une composante connexe de U . Alors $(C, G_d(C)) \rightarrow (U, G)$ est cocartésien (1.1.2).

D'après 1.5.1, quitte à remplacer U par C , X par l'adhérence de C et G par $G_d(C)$, on peut supposer X irréductible. En appliquant 3.5, quitte à rétrécir U , on peut supposer qu'il existe $(f, \alpha) : (Z, G') \rightarrow (U, G)$ faisant de Z un $(\text{Ker } \alpha)$ -torseur sur U et tel que les f^*L_λ vérifient 3.0.1. On applique 3.7 au morphisme composé $Z \xrightarrow{f} U \rightarrow X$ et trouve un diagramme commutatif G' -équivariant

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

où g est propre et j est une immersion ouverte. Notons $L'_\lambda = w^*L_\lambda$. On a $L'_\lambda \simeq R(f, \alpha)_* f^*L'_\lambda$ (1.7 (a)), donc

$$\begin{aligned} R\Psi_{X/S_1} R w_* L'_\lambda &\simeq R\Psi_{X/S_1} R w_* R(f, \alpha)_* f^* L'_\lambda = R\Psi_{X/S_1} R(g_{\eta_1}, \alpha)_* R j_{\eta_1 *} f^* L'_\lambda \\ &\simeq R(g_{S_1}, \alpha)_* R\Psi_{Y/S_1} R j_{\eta_1 *} f^* L'_\lambda. \end{aligned}$$

Quitte à changer les notations, il suffit de montrer l'assertion suivante

(† $_d$) Soient $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathbf{D}_S)$ tel que $\dim X_{\eta_1} \leq d$, $w : U \rightarrow X_{\eta_1}$ ouvert G -équivariant, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(U, G, E)$ tel que les L_λ vérifient 3.0.1. On a $(R\Psi_{X/S_1} R w_* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X_{S_1}, G, E)$.

Soit K' une extension finie galoisienne de K_1^G contenant K_1 telle que les composantes irréductibles de $U \otimes_{K_1} K'$ soient géométriquement irréductibles. Soient $u : S' \rightarrow S_1$ le normalisé de S_1 dans K' , $X' = X \times_{S_1} S'$, $w' = w \times_{S_1} S'$, $G' = G \times_{\text{Gal}(K_1/K_1^G)} \text{Gal}(K'/K_1^G)$, $\alpha : G' \rightarrow G$ la projection. Alors $R\Psi_{X/S_1} R w_* \simeq (u_{X_{S_1}}, \alpha)_* u_{X_{S_1}}^* R\Psi_{X/S_1} R w_* \simeq (u_{X_{S_1}}, \alpha)_* R\Psi_{X'/S'} R w'_* u_U^*$. Donc on peut supposer que les composantes irréductibles de U sont géométriquement irréductibles. Comme au début de la démonstration, quitte à remplacer X par X_{red} et à rétrécir U , on peut supposer en plus U normal. Quitte à remplacer U par une composante connexe C , X par l'adhérence de C , et G par $G_d(C)$ (1.1.2, 1.5.1), on peut supposer X intègre et X_{η_1} géométriquement irréductible. Le problème étant local, on peut supposer en plus X séparé (voire affine). Comme $d \geq 1$, on applique 3.8 et obtient $\beta : G' \rightarrow G$ et un diagramme commutatif G' -équivariant

$$\begin{array}{ccccccc} V^C & \xrightarrow{j} & U'^C & \xrightarrow{w'} & X'_\eta{}^C & \xrightarrow{\quad} & X' \\ & \searrow v_U & \downarrow v_{1U} & & \downarrow & \searrow v & \downarrow v_1 \\ & & U \times_{\eta_1} \eta'^C & \xrightarrow{w_{S'}} & X_\eta \times_{\eta_1} \eta'^C & \xrightarrow{\quad} & X \times_{S_1} S' \longrightarrow S' \\ & & \downarrow u_U & & \downarrow & \searrow & \downarrow u_X \\ & & U & \xrightarrow{\quad} & X_\eta{}^C & \xrightarrow{\quad} & X \longrightarrow X \\ & & & & & & \downarrow u \\ & & & & & & S_1 \end{array}$$

à carrés cartésiens tels que (u, β) et (v, β) soient des altérations galoisiennes, et que $(X', X' - V)$ soit un couple semi-stable G' -strict sur S' . Le V du diagramme est le $X' - Z_d$ de 3.8. Soit $G_{S'} = G' / \text{Ker } \beta \cap \text{Ker}(G' \rightarrow \text{Aut}(S'))$. Alors β se factorise en $G' \xrightarrow{\beta_1} G_{S'} \xrightarrow{\alpha} G$, $G_{S'}$

agit sur S' et le morphisme $((\nu_{1U})_{\text{red}}, \beta_1) : (U', G') \rightarrow ((U \times_{\eta_1} \eta')_{\text{red}}, G_{S'})$ est une altération galoisienne. D'après 1.7 (a),

$$R\Psi_{X/S_1} R w_* L_\lambda \simeq (u_{X_s}, \alpha)_* (u_{X_s}, \alpha)^* R\Psi_{X/S_1} R w_* L_\lambda \simeq (u_{X_s}, \alpha)_* R\Psi_{X \times_{S_1} S'/S'} R w_{S'}^* (u_U, \alpha)^* L_\lambda,$$

où u_{X_s} est le changement de base de u_X par $X_s \rightarrow X$, et le cône de

$$(u_U, \alpha)^* L_\lambda \rightarrow R(\nu_{1U}, \beta_1)_* (\nu_{1U}, \beta_1)^* (u_U, \alpha)^* L_\lambda$$

est à support de dimension $\leq d - 1$. Grâce au cas local de 1.16 (variante 4.5) et l'hypothèse de récurrence $(*_d)$, il suffit donc de voir que les

$$\begin{aligned} (u_{X_s}, \alpha)_* R\Psi_{X \times_{S_1} S'/S'} R w_{S'}^* R(\nu_{1U}, \beta_1)_* (\nu_{1U}, \beta_1)^* (u_U, \alpha)^* L_\lambda \\ \simeq R(u_{X_s}, \beta)_* R\Psi_{X'/S'} R w'^* (u_U, \beta)^* L_\lambda \end{aligned}$$

forment un système E-compatible. Ici ν_{X_s} est le changement de base de ν par $X_s \rightarrow X$. Quitte à remplacer $\nu_U^* L_\lambda$ par $Rj_* j^* \nu_U^* L_\lambda$, on est donc ramené à montrer (\dagger_d) dans le cas où $(X, X - U)$ est un couple semi-stable G-strict. Ceci est déjà fait en 4.10. \square

La définition suivante généralise 1.14.

Définition 4.13. Soit $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$. Un système $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$ est E-compatible si $(j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(i^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles, où $j : X_\eta \hookrightarrow X$, $i : X_s \rightarrow X$.

Pour $(X, S_1, G) \in \mathbf{Eq}(\mathcal{D}_S)$, le foncteur des cycles évanescents

$$R\Phi_{X/S_1} : D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_{S_1} \times_{S_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

préserve la E-compatibilité. C'est une conséquence immédiate de 4.8.

Exemple 4.14. Soient T et T' deux traits henséliens d'égale caractéristique, à corps résiduel $k = \mathbb{F}_{p^f}$, munis d'uniformisantes. Soit (E, I, γ) comme plus haut avec E contenant les racines p -ièmes de l'unité. Soit $\psi : \mathbb{F}_p \rightarrow E^\times$ un caractère. Pour $\lambda \in I$, on note $\psi_\lambda = \iota_\lambda \circ \psi : \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\lambda^\times$. Alors les transformations de Fourier locales [Lau87, 2.3.2.4]

$$\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}, \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}, \mathcal{F}_\psi^{(\infty, \infty')} : \text{Mod}_c(\eta_T, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow \text{Mod}_c(\eta_{T'}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

préservent la E-compatibilité. Plus précisément, pour $(V_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} \text{Mod}_c(\eta_T, \overline{\mathbb{Q}}_\lambda)$, E-compatible, les systèmes

$$(\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(0, \infty')} V_\lambda)_{\lambda \in I}, (\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(\infty, 0')} V_\lambda)_{\lambda \in I}, (\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(\infty, \infty')} V_\lambda)_{\lambda \in I}$$

sont E-compatibles. Cela résulte de [ibid., 2.4.2.1], de la stabilité de la E-compatibilité par $R\Phi$, et de 3.4.

La proposition suivante généralise 1.16 et 1.17.

Proposition 4.15. La E-compatibilité sur S est stable par les six opérations et la dualité.

Démonstration. La stabilité par \otimes et $(f, \alpha)^*$ est triviale. Il suffit de prouver la stabilité par $R(f, \alpha)_*$ et D .

On montre d'abord que pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/S$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X_\eta, G, E)$, on a $(Rj_* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$, où $j : X_\eta \hookrightarrow X$. La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{pq} = H^p(I_\eta, R^q \Psi_{X/S} L_\lambda) \Rightarrow i^* R^{p+q} j_* L_\lambda,$$

où $I_\eta = \text{Ker}(\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \rightarrow \text{Gal}(\bar{s}/s))$, $i : X_s \rightarrow X$. Comme $(R\Psi_{X/S} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible (4.8), il suffit de montrer que pour $(Y, G) \in \mathbf{Eq}/s$, $(M_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(Y \times_s \eta, G, E)$, on a $(R\Gamma(I_\eta, M_\lambda))_{\lambda \in I} \in D_c^b(Y, G, E)$. Pour cela, on peut supposer que Y est fini sur s , $\#I = 2$, $[M_\lambda] = [\mathcal{F}_\lambda] - [\mathcal{G}_\lambda]$, $[\mathcal{F}_\lambda], [\mathcal{G}_\lambda] \in \text{Mod}_c(Y \times_s \eta, G, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et I_η agit sur \mathcal{F}_λ et \mathcal{G}_λ par un quotient fini Q . Alors

$$([R\Gamma(I_\eta, M_\lambda)])_{\lambda \in I} = \left([\mathcal{F}_\lambda^Q] - [\mathcal{F}_\lambda^Q(-1)] - [\mathcal{G}_\lambda^Q] + [\mathcal{G}_\lambda^Q(-1)] \right)_{\lambda \in I} \in K(Y, G, E).$$

Prouvons la stabilité par $R(f, \alpha)_*$, où $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ est un morphisme dans \mathbf{Eq}/S . Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$. On a les triangles distingués

$$\begin{aligned} i_* Ri^! L_\lambda &\rightarrow L_\lambda \rightarrow Rj_* j^* L_\lambda \rightarrow, \\ R(f, \alpha)_* Ri^! L_\lambda &\rightarrow R(f, \alpha)_* L_\lambda \rightarrow R(f, \alpha)_* j^* L_\lambda \rightarrow. \end{aligned}$$

Comme $(Rj_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible, $(Ri^! L_\lambda)_{\lambda \in I}$ l'est aussi. Il suffit donc d'appliquer 1.16 pour $R(f, \alpha)_*$ et $R(f, \alpha)_*$.

Prouvons la stabilité par D . Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$. On a le triangle distingué

$$i_* D_{(X, G)}(i^* L_\lambda) \rightarrow D_{(X, G)} L_\lambda \rightarrow Rj_* D_{(X_\eta, G)} j^* L_\lambda \rightarrow.$$

Il suffit donc d'appliquer 1.17 pour $D_{(X, G)}$ et $D_{(X_\eta, G)}$. \square

Remarque 4.16. Si on remplace les faisceaux usuels par les faisceaux de Weil [Del80, 1.1.10], on peut définir la E -compatibilité de la même manière. Tous les résultats concernant la E -compatibilité (notamment 4.15, 4.8, 3.10, 3.4) restent valables.

5 Appendice : Indépendance de l sur les champs algébriques

Soient K un corps fini de caractéristique p ou un corps local de caractéristique résiduelle p (1.13), $\eta = \text{Spec} K$. On note \mathbf{Ch}/η la catégorie des η -champs algébriques [LMB00, 4.1] de type fini. Soit l un nombre premier $\neq p$. Pour $\mathcal{X} \in \mathbf{Ch}/\eta$, on note $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux constructibles sur le site lisse-étale de \mathcal{X} [ibid., 12.1 (i)]. On dispose, par [LO08], d'une catégorie triangulée $D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ munie d'une t -structure usuelle de cœur $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et d'un formalisme de six opérations. Pour $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de η -champs algébriques de type fini, on a

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{X}} : D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)^{\text{op}} &\rightarrow D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \\ - \otimes - : D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \times D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l) &\rightarrow D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}}(-, -) : D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)^{\text{op}} \times D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l) &\rightarrow D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \\ f^*, Rf^! : D_c^b(\mathcal{Y}, \overline{\mathbb{Q}}_l) &\rightarrow D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l). \end{aligned}$$

Pour tout $s \in S$, $F(s)$ est un isomorphisme. Donc F se factorise à travers Q . Montrons que \tilde{F} est plein. Soient $(X, G), (Y, H) \in \mathbf{Eq}/\eta$, $\alpha : [X/G] \rightarrow [Y/H]$ dans \mathbf{Ch}/η . Formons le diagramme 2-commutatif de η -champs à carrés 2-cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & [X/G] \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ Y & \longrightarrow & [Y/H] \end{array}$$

Notons $s : (X', G \times H) \rightarrow (X, G)$, $t : (X', G \times H) \rightarrow (Y, H)$. Alors $s \in S$ et $Ft = \alpha \circ Fs$, i. e., $\alpha = \tilde{F}(ts^{-1})$. \square

Proposition 5.2. *Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/\eta$, il existe une équivalence de catégories canonique $\mathfrak{o}_{X,G}$ qui rend 2-commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}}_l) & \xrightarrow{\mathfrak{o}_{X,G}} & D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ & \searrow p_{X,G}^* & \downarrow \omega_{X,G} \\ & & D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \end{array}$$

où $p_{X,G} : X \rightarrow [X/G]$ est la projection, $\omega_{X,G}$ est le foncteur oubli de l'action de G . Cette équivalence commute aux six opérations et à la dualité. Plus précisément, on a

$$(5.2.1) \quad \mathfrak{o}_{X,G} R\mathcal{H}om_{[X/G]}(-, -) \simeq R\mathcal{H}om_{(X,G)}(\mathfrak{o}_{X,G} -, \mathfrak{o}_{X,G} -),$$

$$(5.2.2) \quad \mathfrak{o}_{X,G}(- \otimes -) \simeq (\mathfrak{o}_{X,G} -) \otimes (\mathfrak{o}_{X,G} -), \quad \mathfrak{o}_{X,G} D_{[X/G]} \simeq D_{(X,G)} \mathfrak{o}_{X,G},$$

et, pour $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$ un morphisme dans \mathbf{Eq}/η , on a

$$(5.2.3) \quad \mathfrak{o}_{X,G}[f/\alpha]^* \simeq (f, \alpha)^* \mathfrak{o}_{Y,H},$$

$$(5.2.4) \quad \mathfrak{o}_{Y,H} R[f/\alpha]_* \simeq R(f, \alpha)_* \mathfrak{o}_{X,G},$$

et, lorsque f est séparé, on a

$$(5.2.5) \quad \mathfrak{o}_{X,G} R[f/\alpha]^! \simeq R(f, \alpha)^! \mathfrak{o}_{Y,H},$$

$$(5.2.6) \quad \mathfrak{o}_{Y,H} R[f/\alpha]_! \simeq R(f, \alpha)_! \mathfrak{o}_{X,G}.$$

Démonstration. Au niveau des topos étales, on a un diagramme 2-commutatif de foncteurs images inverses [LMB00, 12.3.3, 12.4.6]

$$\begin{array}{ccc} [X/G]^\sim & \xrightarrow{\sim} & (X, G)^\sim \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X^\sim \end{array}$$

d'où l'existence de $\mathfrak{o}_{X,G}$. Les isomorphismes (5.2.1) à (5.2.4) sont clairs. Les isomorphismes (5.2.5) et (5.2.6) s'en déduisent par la dualité. \square

Remarque. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 D_c^b([Y/H], \overline{\mathbb{Q}}_l) & \xrightarrow{\omega_{Y,H}} & D_c^b(Y, H, \overline{\mathbb{Q}}_l) & & \\
 \downarrow [f/\alpha]^* & & \downarrow p_{Y,H}^* & \searrow \omega_{Y,H} & \\
 & & & & D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\
 & & & \downarrow (f, \alpha)^* & \\
 & & & & \downarrow f^* \\
 D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}}_l) & \xrightarrow{\omega_{X,G}} & D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}}_l) & & \\
 \downarrow [f/\alpha]^* & & \downarrow p_{X,G}^* & \searrow \omega_{X,G} & \\
 & & & & D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)
 \end{array}$$

dont le carré (*) correspond à (5.2.3), est 2-commutatif. Des diagrammes analogues existent pour (5.2.1), (5.2.2) et (5.2.5).

5.3. En vertu de 5.2, on peut interpréter certains cas de 1.6 et 1.7 en termes des champs. Si $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, Q)$ est un morphisme de \mathbf{Eq}/η vérifiant les hypothèses de 1.7 (b) (α est surjectif et f fait de X un $(\text{Ker } \alpha)$ -torseur sur Y), alors $[f/\alpha] : [X/G] \rightarrow [Y/Q]$ est un isomorphisme, d'où les conclusions de 1.7 (a) et (b) (les flèches d'adjonction $\text{Id} \rightarrow (f, \alpha)_* (f, \alpha)^*$ et $(f, \alpha)^* (f, \alpha)_* \rightarrow \text{Id}$ sont des isomorphismes). La proposition 1.6 (cas $S = \eta$) s'interprète comme un théorème de changement de base pour les champs algébriques (cf. [LO08, § 12]) en vertu de la proposition suivante.

Proposition 5.4. Soient $(f, \alpha) : (X, G) \rightarrow (Y, H)$, $(g, \beta) : (Y', H') \rightarrow (Y, H)$ deux morphismes de même but dans \mathbf{Eq}/η . Pour $r \in H$, formons le carré cartésien

$$(5.4.1) \quad \begin{array}{ccc}
 (X', G')_r & \xrightarrow{(h, \gamma)_r} & (X, G) \\
 \downarrow (f', \alpha')_r & & \downarrow (f, \alpha) \\
 (Y', H') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (Y, H) \xrightarrow{T_r} (Y, H)
 \end{array}$$

où $T_r = (a_r, h \mapsto r^{-1}hr)$ est comme dans 1.1. Le η -champs $[X'/G']_r = F((X', G')_r)$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la double classe $(\text{Im } \beta)r(\text{Im } \alpha) \subset H$ et le carré

$$(5.4.2) \quad \begin{array}{ccc}
 \coprod_r [X'/G']_r & \xrightarrow{[h/\gamma]_r} & [X/G] \\
 [f'/\alpha']_r \downarrow & & \downarrow [f/\alpha] \\
 [Y'/H'] & \xrightarrow{[g/\beta]} & [Y/H]
 \end{array}$$

est 2-cartésien, où r parcourt un système de représentants de $\text{Im } \beta \backslash H / \text{Im } \alpha$.

Démonstration. Comme $F(T_r) \simeq \text{Id}_{[Y/H]}$, (5.4.2) est 2-commutatif. Il suffit de montrer que pour tout η -schéma affine connexe non vide U , le foncteur

$$\coprod_r ([X'/G']_r)_U \xrightarrow{((f'/\alpha')_r)_U, ([h/\gamma]_r)_U} [Y'/H']_U \times_{[Y/H]_U} [X/G]_U$$

est une équivalence de catégories et que l'image essentielle de $([X'/G']_r)_U$ ne dépend que de la double classe de r . Construisons un quasi-inverse ν du foncteur. Un objet de $[Y'/H']_U \times_{[Y/H]_U} [X/G]_U$ est un triplet (Z, W, k) où $Z \in [Y'/H']_U$, $W \in [X/G]_U$, k est un isomorphisme $[g/\beta]_U(Z) \xrightarrow{\sim} [f, \alpha]_U(W)$ dans $[Y/H]_U$. Rappelons que Z est un H' -torseur sur U muni d'un η -morphisme H' -équivariant $Z \rightarrow Y'$ et le morphisme $(Z, H') \rightarrow ([g/\beta]_U(Z), H)$ est cocartésien (1.1). Notons $\beta_*Z = [g/\beta]_U(Z)$. De même pour W et $[f, \alpha]_U(W) : \alpha_*W = [f, \alpha]_U(W)$. L'isomorphisme k est un Y -morphisme H -équivariant. Pour $r \in H$, formons le carré cartésien au-dessus de (5.4.1)

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \beta_*Z \xrightarrow[\sim]{a_r \circ k = k \circ a_r} \alpha_*W \end{array}$$

Notons $C = \{r \in G \mid V_r \neq \emptyset\}$. Alors $C \in \text{Im}\beta \setminus H / \text{Im}\alpha$. Pour $r \in C$, V_r est un G' -torseur sur U . On pose $\nu(Z, W, k) = V_r$. \square

Soient E, I, γ comme dans 1.13.

Définition 5.5. Soient $\mathcal{X} \in \mathbf{Ch}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$. On dit que $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est (E, I, γ) -compatible (ou E -compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout morphisme $i : x \rightarrow \mathcal{X}$ dans \mathbf{Ch}/η où x est le spectre d'une extension finie de K , $(i^*L_\lambda)_{\lambda \in I}$ appartient à $D_c^b(x, E)$ (1.14).

Les systèmes E -compatibles sur \mathcal{X} forment une sous-catégorie triangulée de $\prod_{\lambda \in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$, notée $D_c^b(\mathcal{X}, G, E)$. Lorsque $\mathcal{X} = X$ est un schéma, la définition ci-dessus coïncide avec 1.14 : $D_c^b(\mathcal{X}, E) \simeq D_c^b(X, E) = D_c^b(X, \{1\}, E)$. Plus généralement, on a

Proposition 5.6. Pour $(X, G) \in \mathbf{Eq}/\eta$ et $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I}$ appartient à $D_c^b([X/G], E)$ si et seulement si $(o_{X, G}L_\lambda)_{\lambda \in I}$ appartient à $D_c^b(X, G, E)$.

Démonstration. La suffisance est claire. En effet, soient $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ tel que $(o_{X, G}L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$, $i : x \rightarrow [X/G]$ dans \mathbf{Ch}/η où x est le spectre d'une extension finie de K . D'après 5.1, il existe des morphismes $s : (Y, H) \rightarrow (x, \{1\})$, $t : (Y, H) \rightarrow (X, G)$ dans \mathbf{Eq}/η vérifiant $s \in S$, tels que $i = F(t)F(s)^{-1}$. D'après 5.2,

$$i^*L_\lambda \simeq F(s)_*F(t)^*L_\lambda \simeq s_*t^*o_{X, G}L_\lambda.$$

Donc $(i^*L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible, en vertu de 1.18 (iv).

Prouvons la nécessité. Soient $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b([X/G], E)$, $x \in |X|$. Alors, d'après 5.2, $i_x^*o_{X, G}L_\lambda \simeq o_{x, G_d(x)}F(i_x)^*L_\lambda$, où $i_x : (x, G_d(x)) \rightarrow (X, G)$. Quitte à remplacer (X, G) par $(x, G_d(x))$, L_λ par $F(i_x)^*L_\lambda$, on peut supposer que X est le spectre d'une extension finie de K . On applique alors la construction 2.3 : pour $g \in G$, $m \geq 1$, on a construit

$$(X^{(m, g)}, \{1\}) \xleftarrow{e_{m, g}} (X_{\eta_{n_g m}}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_{m, g}} (X, G),$$

donnant lieu à

$$X^{(m,g)} \xleftarrow[\sim]{Fe_{m,g}} [X_{\eta_{ngm}} / (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})] \xrightarrow{Fd_{m,g}} [X/G].$$

D'après 5.2,

$$C_{m,g} \circ_{X,G} L_\lambda = e_{m,g} * d_{m,g}^* \circ_{X,G} L_\lambda \simeq (Fe_{m,g})_* (Fd_{m,g})^* L_\lambda \simeq ((Fd_{m,g})(Fe_{m,g})^{-1})^* L_\lambda.$$

Donc on a $(C_{m,g} \circ_{X,G} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X^{(m,g)}, E)$. Par conséquent, on a $(\circ_{X,G} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$ en vertu de 2.4. \square

Proposition 5.7. *Pour $\mathcal{X} \in \mathbf{Ch}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})$ est E -compatible si et seulement si pour tout morphisme lisse $\phi : X \rightarrow \mathcal{X}$, où X un schéma affine, on a $(\phi^* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, E)$.*

Démonstration. La nécessité est claire. La suffisance découle de [LMB00, 6.3]. \square

Proposition 5.8. *La E -compatibilité est stable par la dualité, \otimes , $R\mathcal{H}om$, f^* , $Rf^!$, et lorsque f est relativement de Deligne-Mumford, par Rf_* et $Rf_!$.*

Démonstration. La stabilité par \otimes et par f^* résulte de la définition. Pour la dualité, on applique 5.7. Soient $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(\mathcal{X}, E)$, X un schéma affine, $\phi : X \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme lisse. On peut supposer que ϕ est purement de dimension n . Alors

$$\phi^* D_{\mathcal{X}} L_\lambda \simeq D_X R\phi^! L_\lambda \simeq (D_X \phi^* L_\lambda)(-n)[-2n],$$

donc $(\phi^* D_{\mathcal{X}} L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E -compatible.

Il reste à vérifier la stabilité par $Rf_!$ pour $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ relativement de Deligne-Mumford. D'après le théorème de changement de base [LO08, 12.5.3], on peut supposer que $\mathcal{Y} = y$ est le spectre d'une extension finie de K . Alors \mathcal{X} est un champs de Deligne-Mumford. D'après [LMB00, 6.1.1], il existe un ouvert non vide $\mathcal{U} \simeq [X/G]$, où X est un schéma affine de type fini sur y , G un groupe fini agissant à droite sur X . Soient $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$, i l'immersion fermée complémentaire. Alors on a le triangle distingué

$$R(fj)_! j^* L_\lambda \rightarrow Rf_! L_\lambda \rightarrow R(fi)_! i^* L_\lambda \rightarrow .$$

D'après 1.16, 5.1, 5.2 et 5.6, $R(fj)_!$ préserve la E -compatibilité. On conclut par récurrence noethérienne. \square

Exemple 5.9. Soit $\pi : V \rightarrow \eta$ un fibré vectoriel de rang constant r . Alors $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_{m,\eta}$ agit par homothétie sur V et on peut former le η -champ quotient $\bar{\pi} : \mathcal{V} = [V/\mathbb{G}_m] \rightarrow \eta$. Soit $\pi^\vee : V^\vee \rightarrow \eta$ le fibré vectoriel dual de π . Comme précédemment, on forme le η -champ quotient $\bar{\pi}^\vee : \mathcal{V}^\vee = [V^\vee/\mathbb{G}_m] \rightarrow \eta$. Alors la transformation de Fourier homogène [Lau03, 1.5] $\text{Four}_{\mathcal{V}/\eta} : D_c^b(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ préserve la E -compatibilité.

En effet, comme dans la démonstration de [ibid., 1.9], il suffit de montrer que pour $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(\mathcal{V}, E)$, les systèmes

$$\begin{aligned} \text{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(i_* i^* L_\lambda) &\simeq (\pi^\vee)^* \sigma^* i^* L_\lambda[r], \\ i_*^\vee (i^\vee)^* \text{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(j_! j^* L_\lambda) &\simeq i_*^\vee \sigma^* R\pi_! j_! j^* L_\lambda[r], \\ j_!^\vee (j^\vee)^* \text{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(j_! j^* L_\lambda) &\simeq j_!^\vee R\text{pr}_!^\vee (\text{pr}^* j^* L_\lambda \otimes R\text{J}_* \overline{\mathbb{Q}}_{l_\lambda})[r-1] \end{aligned}$$

sont E -compatibles. Ici $i : B(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathcal{V}$, $i^\vee : B(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathcal{V}^\vee$, $j : \mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathcal{V}$, $j^\vee : \mathbb{P}(V^\vee) \hookrightarrow \mathcal{V}$, $\pi = [\pi/\mathbb{G}_m] : \mathcal{V} \rightarrow B(\mathbb{G}_m)$, $\pi^\vee = [\pi^\vee/\mathbb{G}_m] : \mathcal{V}^\vee \rightarrow B(\mathbb{G}_m)$, $\sigma : B(\mathbb{G}_m) \rightarrow B(\mathbb{G}_m)$ envoie \mathcal{L} sur $\mathcal{L}^{\otimes -1}$, pr^\vee et pr sont les deux projections canoniques de $\mathbb{P}(V^\vee) \times \mathbb{P}(V)$, J est une immersion ouverte [*ibid.*, 1.5]. Ces morphismes étant tous relativement de Deligne-Mumford, voire représentables [LMB00, 3.9], il suffit d'appliquer 5.8.

Pour les champs algébrique de type fini sur un corps fini, on dispose, par [LO09, § 9], d'un formalisme de poids. On a des analogues de 2.6 et de 2.7.

Bibliographie

- [BBD82] A. A. BEĪLISON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérisque, vol. 100, Soc. math. France, 1982, p. 5–171.
- [BLR90] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – *Néron models*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), vol. 21, Springer-Verlag, 1990.
- [Con97] B. CONRAD – « Deligne's notes on Nagata compactifications », prépublication, 1997.
- [Del73] P. DELIGNE – « Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L », in *Modular functions of one variable II*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 349, Springer-Verlag, 1973, p. 501–597.
- [Del80] ———, « La conjecture de Weil : II », *Publ. math. IHÉS* **52** (1980), p. 137–252.
- [dJ96] A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. math. IHÉS* **83** (1996), p. 51–93.
- [dJ97] A. J. DE JONG – « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.
- [DL76] P. DELIGNE & G. LUSZTIG – « Representations of reductive groups over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), p. 103–161.
- [Eke90] T. EKEDAHL – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, *Progr. Math.*, vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 197–218.
- [Fuj02] K. FUJIWARA – « Independence of l for intersection cohomology (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 145–151.
- [Ill06] L. ILLUSIE – « Miscellany on traces in l -adic cohomology: a survey », *Jpn. J. Math. (3)* **1** (2006), p. 107–136.
- [Kat83] N. M. KATZ – « Wild ramification and some problems of "independence of l " », *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 201–227.
- [Lau87] G. LAUMON – « Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil », *Publ. math. IHÉS* **65** (1987), p. 131–210.
- [Lau03] ———, « Transformation de Fourier homogène », *Bull. Soc. math. France* **131** (2003), p. 527–551.

- [LMB00] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, vol. 39, Springer, 2000.
- [LO08] Y. LASZLO & M. OLSSON – « The six operations for sheaves on Artin stacks II: adic coefficients », *Publ. math. IHÉS* **107** (2008), p. 169–210.
- [LO09] ———, « Perverse t -structure on Artin stacks », *Math. Z.* **261** (2009), p. 737–748.
- [Mie07] Y. MIEDA – « On l -independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields », *Compos. Math.* **143** (2007), p. 393–422.
- [Mor08] S. MOREL – « Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel : le cas des variétés de Siegel », *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), p. 63–100.
- [Och99] T. OCHIAI – « l -independence of the trace of monodromy », *Math. Ann.* **315** (1999), p. 321–340.
- [Sai03] T. SAITO – « Weight spectral sequences and independence of l », *J. Inst. math. Jussieu* **2** (2003), p. 583–634.
- [Ser98] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, 5^e éd., Hermann, 1998.
- [Vid04] I. VIDAL – « Théorie de Brauer et conducteur de Swan », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), p. 349–391.
- [EGAIV] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas », *Publ. math. IHÉS* **20, 24, 28, 32** (1964–1967).
- [SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, dirigé par A. Grothendieck, *Doc. math.*, vol. 3, Soc. math. France, 2003.
- [SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math.*, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973.
- [SGA4½] P. DELIGNE – *Cohomologie étale*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 569, Springer-Verlag, 1977.
- [SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, I, dirigé par A. Grothendieck, II, par P. Deligne, N. Katz, *Lecture Notes in Math.*, vol. 288, 340, Springer-Verlag, 1972–1973.