# Weil 猜想简介

田一超、郑维喆

清华大学

2011 年 8 月 4 日

第二部分

# 报告提纲

1. Weil 猜想的推广
2. Weil 猜想应用举隅
   - Kloosterman 和的上界、Gauss 和的等分布
   - 等特征佐藤 -Tate 猜想
   - Betti 数和难 Lefschetz 定理
3. 未决问题

# Weil 的读音

法语 André Weil [ɑ̃'dʁe vɛj]

英语 [veɪ]

汉语 安德烈 · 魏尔

# 报告提纲

1. Weil 猜想的推广
2. Weil 猜想应用举隅
    - Kloosterman 和的上界、Gauss 和的等分布
    - 等特征佐藤 -Tate 猜想
    - Betti 数和难 Lefschetz 定理
3. 未决问题

设 $k=\mathbb{F}_q$，$\mathrm{Fr}_k\in\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 是几何 Frobenius 自同构（$\mathrm{Fr}_k(a)=a^{1/q}$），$\ell$ 是不整除 $q$ 的素数。取定嵌入 $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}_\ell}\hookrightarrow\mathbb{C}$。

### 定理

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形。则多项式 $\iota\det(t-\mathrm{Fr}_k, H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell))$ 的所有根的模都等于 $q^{i/2}$。

Deligne, La conjecture de Weil : I. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 43 (1974), 273–307.

设 $k=\mathbb{F}_q$，$\mathrm{Fr}_k\in\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 是几何 Frobenius 自同构（$\mathrm{Fr}_k(a)=a^{1/q}$），$\ell$ 是不整除 $q$ 的素数。取定嵌入 $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}_\ell}\hookrightarrow\mathbb{C}$。

### 定理

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形。则多项式 $\iota\det(t-\mathrm{Fr}_k,H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell))$ 的所有根的模都等于 $q^{i/2}$。

Deligne, La conjecture de Weil : I. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 43 (1974), 273–307.

### 定理

设 $X$ 是 $k$ 上分离有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\iota$-混合的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。假设对 $X$ 的每个闭点 $x$，多项式 $\iota\det(t-\mathrm{Fr}_x,\mathcal{F}_{\bar{x}})$ 的所有根的模都 $\le 1$。则多项式 $\iota\det(t-\mathrm{Fr}_k,H^i_c(X_{\bar{k}},\mathcal{F}))$ 的所有根的模都 $\le q^{i/2}$。

Deligne, La conjecture de Weil : II. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 52 (1980), 137–252.

# $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层

## 为什么需要 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层？

设 $k$ 是域，$\ell$ 是不等于 $\mathrm{char}(k)$ 的素数。设 $X$、$Y$ 是 $k$ 上有限型概形，$f\colon X \to Y$ 是 $k$-态射。对 $Y$ 的每个几何点 $\bar{y} \to Y$（$\bar{y}$ 是可分封闭域的谱），做纤维积：

$$\begin{tikzcd} X_{\bar{y}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \bar{y} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

如果 $f$ 是恰当 (proper) 态射（例如射影态射），那么 $H^i(X_{\bar{y}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 可以用 $Y$ 上的一个 $\mathbb{Q}_\ell$-层来参数化。

# $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层的逆像和顺像 (direct image)

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形。用 $X$ 的平展 (étale) 拓扑可以定义 $X$ 上（可构造）$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层的 Abel 范畴 $\mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$。对 $X$ 的任何几何点 $\bar{x}$，有茎(stalk) 函子：

$$\mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to \{\text{有限维 } \overline{\mathbb{Q}_\ell}\text{-向量空间}\} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}。$$

# $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层的逆像和顺像 (direct image)

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形。用 $X$ 的平展 (étale) 拓扑可以定义 $X$ 上（可构造）$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层的 Abel 范畴 $\mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$。对 $X$ 的任何几何点 $\bar{x}$，有茎(stalk) 函子：

$$\mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to \{\text{有限维 } \overline{\mathbb{Q}_\ell}\text{-向量空间}\} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}。$$

设 $f\colon X \to Y$ 是 $k$ 上有限型概形间的态射。逆像函子 $f^*$ 是顺像函子 $f_*$ 的左伴随函子：

$$\mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} \mathrm{Sh}(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})。$$

$f^*$ 是正合函子；高阶顺像函子 $R^i f_*\colon \mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to \mathrm{Sh}(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 可以看成 $f_*$ 的右导出函子。如果 $\mathcal{G}$ 是 $Y$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层，$\bar{x} \to X$ 是几何点，那么

$$(f^*\mathcal{G})_{\bar{x}} \simeq \mathcal{G}_{f(\bar{x})}。$$

这里 $f(\bar{x})$ 表示 $Y$ 的几何点 $\bar{x} \to X \xrightarrow{f} Y$。

### 定理 (恰当基变换)

设 $f\colon X \to Y$ 是 $k$ 上有限型概形间的恰当态射，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-进层，$\bar{x} \to X$ 是几何点。那么

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} \to H^i(X_{\bar{y}}, \mathcal{F}|X_{\bar{y}})$$

是 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-向量空间的同构。

**定理 (恰当基变换)**

设 $f: X \to Y$ 是 $k$ 上有限型概形间的恰当态射，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-进层，$\bar{x} \to X$ 是几何点。那么

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} \to H^i(X_{\bar{y}}, \mathcal{F}|X_{\bar{y}})$$

是 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-向量空间的同构。

设 $X$ 是 $k$ 上分离有限型概形，$j: X \hookrightarrow \bar{X}$ 是 $X$ 的紧致化（即 $j$ 是开浸入，$\bar{X}$ 在 $k$ 上恰当），$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。恰当基变换定理推出

$$H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) := H^i(\bar{X}_{\bar{k}}, j_! \mathcal{F})$$

的同构类与 $j$ 的选取无关，称为 $X_{\bar{k}}$ 的紧支撑 $\ell$-进上同调。如果 $X$ 在 $k$ 上恰当，$H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$。

# 光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层

- 设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，用 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \subset \mathrm{Sh}(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 表示光滑$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层形成的满子范畴。设 $f\colon X \to Y$ 是 $k$ 上有限型概形间的态射，则 $f^*$ 保持光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。如果 $f$ 是恰当光滑态射，则 $R^i f_*$ 也保持光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。特别地，如果 $f$ 是恰当光滑态射，则 $R^i f_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 是 $Y$ 上的光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。

# 光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层

- 设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，用 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})\subset\mathrm{Sh}(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 表示光滑$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层形成的满子范畴。设 $f\colon X\to Y$ 是 $k$ 上有限型概形间的态射，则 $f^*$ 保持光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。如果 $f$ 是恰当光滑态射，则 $R^if_*$ 也保持光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。特别地，如果 $f$ 是恰当光滑态射，则 $R^if_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 是 $Y$ 上的光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。
- 设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。那么存在 $X$ 的有限划分 $X=\coprod X_i$，$X_i$ 局部闭，使得 $\mathcal{F}|X_i$ 是 $X_i$ 上的光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。
- 假设 $X$ 连通。设 $\bar{x}\to X$ 是几何点。基本群 $\pi_1(X,\bar{x})$ 是投射有限群。函子

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})\to\{\pi_1(X,\bar{x})\text{ 的有限维连续 }\overline{\mathbb{Q}_\ell}\text{-表示}\}\quad \mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}_{\bar{x}}$$

是范畴等价。

**例子**

$\pi_1(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(\bar{k})) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 是 $k$ 的 Galois 群。

$\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \mathrm{Sh}(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 等价于 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的有限维（连续）$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示的范畴。

## 例子

$\pi_1(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(\bar{k})) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 是 $k$ 的 Galois 群。
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \mathrm{Sh}(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 等价于 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的有限维（连续）$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示的范畴。

## 定义 (Tate 扭 (twist))

- $\mu_m := \{a \in \bar{k} \mid a^m = 1\}$。
- $\mathbb{Z}_\ell(1) := \lim_n \mu_{\ell^n}$、$\mathbb{Q}_\ell(1) := \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ 对应于分圆特征标 $\chi\colon \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathbb{Z}_\ell^\times \subset \mathbb{Q}_\ell^\times$。
- $\mathbb{Q}_\ell(n) := \mathbb{Q}_\ell(1)^{\otimes n}$ 对应于 $\chi^n$。

设 $H$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 表示。记 $H(n) = H \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(n)$。

设 $k=\mathbb{F}_q$。$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\simeq\hat{\mathbb{Z}}=\lim(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，$\mathrm{Fr}_k$ 是拓扑生成元。设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，$x$ 是 $X$ 的闭点。则 $\kappa(x)$ 是 $k$ 的有限扩张。定义拓扑生成元 $\mathrm{Fr}_x\in\mathrm{Gal}(\bar{k}/\kappa(x))$，$\mathrm{Fr}_x(a)=a^{1/\sharp\kappa(x)}$，$\sharp\kappa(x)=q^{\deg(x)}$，$\deg(x)=[\kappa(x):k]$。设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。则 $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\kappa(x))$ 的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示。

设 $k=\mathbb{F}_q$。$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\simeq\hat{\mathbb{Z}}=\lim(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，$\mathrm{Fr}_k$ 是拓扑生成元。设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，$x$ 是 $X$ 的闭点。则 $\kappa(x)$ 是 $k$ 的有限扩张。定义拓扑生成元 $\mathrm{Fr}_x\in\mathrm{Gal}(\bar{k}/\kappa(x))$，$\mathrm{Fr}_x(a)=a^{1/\sharp\kappa(x)}$，$\sharp\kappa(x)=q^{\deg(x)}$，$\deg(x)=[\kappa(x):k]$。设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。则 $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/\kappa(x))$ 的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示。

**定理 (Artin-Chebotarev)**

假设 $X$ 是正规 (normal)、连通。设 $\bar{y}\to X$ 是几何点。那么

$$\{g\in\pi_1(X,\bar{y})\mid g\text{ 共轭于 }\mathrm{Fr}_x\text{ 的像，对 }X\text{ 某个闭点 }x\}$$

在 $\pi_1(X,\bar{y})$ 中是稠密的。

# Grothendieck 迹公式

**定理 (Grothendieck)**

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。则

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_k, H^i_c(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})) = \sum_{x \in X(k)} \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})。$$

# Grothendieck 迹公式

## 定理 (Grothendieck)

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。则

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_k, H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})) = \sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})。$$

## 推论

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。则

$$\prod_i \det(1 - t\mathrm{Fr}_k, H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}} = \prod_x \frac{1}{\det(1 - t^{\deg(x)}\mathrm{Fr}_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})}。$$

等式右侧 $x$ 取遍 $X$ 的所有闭点。

推论中的有理函数记作 $L(X, \mathcal{F}, t)$，称为 $\mathcal{F}$ 的*L-函数*。
$Z(X, t) = L(X, \mathbb{Q}_\ell, t)$。

# 权重 (weight)

设 $k=\mathbb{F}_q$，$\iota\colon \overline{\mathbb{Q}_\ell}\hookrightarrow\mathbb{C}$，$w$ 是实数。

## 定义

设 $H$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的有限维 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示。$H$ 的$\iota$-权重是

$$W=\{2\log_q(|\iota\alpha|)\mid\alpha\text{ 是 }\mathrm{Fr}_k\text{ 在 }H\text{ 上作用的特征值}\}\subset\mathbb{R}。$$

如果 $W\subset\{w\}$，我们称 $H$ 是权重 $w$ 的$\iota$-纯粹表示。

# 权重 (weight)

设 $k=\mathbb{F}_q$，$\iota\colon \overline{\mathbb{Q}_\ell}\hookrightarrow\mathbb{C}$，$w$ 是实数。

**定义**

设 $H$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的有限维 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-表示。$H$ 的$\iota$-权重是

$$W=\{2\log_q(|\iota\alpha|)\mid \alpha\text{ 是 }\mathrm{Fr}_k\text{ 在 }H\text{ 上作用的特征值}\}\subset\mathbb{R}。$$

如果 $W\subset\{w\}$，我们称 $H$ 是权重 $w$ 的$\iota$-纯粹表示。

**定理 (Deligne 1980)**

设 $X$ 是 $k$ 上分离有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\iota$-混合的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。假设对 $X$ 的每个闭点 $x$，$\mathcal{F}_{\bar{x}}$ 的所有 $\iota$-权重都 $\leq w$。则 $H^i_c(X_{\bar{k}},\mathcal{F})$ 的所有 $\iota$-权重都 $\leq w+i$。

### 定义

设 $X$ 是 $k$ 上分离有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。

- 设 $w$ 是实数。称 $\mathcal{F}$ 是权重 $w$ 的逐点 $\iota$-纯粹层，如果对 $X$ 的每个闭点 $x$，$\mathcal{F}_{\bar{x}}$ 都是权重 $w$ 的 $\iota$-纯粹表示。
- 称 $\mathcal{F}$ 是$\iota$-混合层，如果存在有限滤过 $0 = \mathcal{F}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$，以及实数 $w_1, \ldots, w_n$，使得每个 $\mathcal{F}^i/\mathcal{F}^{i-1}$ 都是权重 $w_i$ 的逐点 $\iota$-纯粹层。

## 定义

设 $X$ 是 $k$ 上分离有限型概形，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层。

- 设 $w$ 是实数。称 $\mathcal{F}$ 是权重 $w$ 的逐点 $\iota$-纯粹层，如果对 $X$ 的每个闭点 $x$，$\mathcal{F}_{\bar{x}}$ 都是权重 $w$ 的 $\iota$-纯粹表示。
- 称 $\mathcal{F}$ 是$\iota$-混合层，如果存在有限滤过 $0 = \mathcal{F}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$，以及实数 $w_1, \ldots, w_n$，使得每个 $\mathcal{F}^i/\mathcal{F}^{i-1}$ 都是权重 $w_i$ 的逐点 $\iota$-纯粹层。

## 定理 (Lafforgue 2002)

所有 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-层都是 $\iota$-混合的。

# 延伸阅读


BBD Beilinson, Bernstein, Deligne, Faisceaux Pervers, *Astérisque* 100 (1982). 权重理论的更完善形式

- Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionelles et conjecture de Weil, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 65 (1987), 131–210. 简化了 [Deligne 1980] 的证明
- Kiehl, Weissauer, *Weil Conjectures, Perverse Sheaves and $\ell$-adic Fourier Transform*, Springer, 2001. 教材

# 报告提纲

1 Weil 猜想的推广

2 Weil 猜想应用举隅
- Kloosterman 和的上界、Gauss 和的等分布
- 等特征佐藤 -Tate 猜想
- Betti 数和难 Lefschetz 定理

3 未决问题

# 有限群的 Fourier 变换

设 $G$ 是有限 Abel 群，$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ 是其对偶 Abel 群，$f\colon G \to \mathbb{C}$ 是函数。$f$ 的Fourier 变换定义为

$$\mathrm{FT}_G f\colon \hat{G} \to \mathbb{C} \quad (\mathrm{FT}_G f)(\chi) = \sum_{a\in G} f(a)\chi(a)。$$

Parseval 等式：

$$\sum_{a\in G} |f(a)|^2 = \frac{1}{\sharp G} \sum_{\chi\in\hat{G}} |(\mathrm{FT}_G f)(\chi)|^2。$$

## Gauss 和

设 $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q}$，$\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$。我们默认 $\chi(0) = 0$。Gauss 和定义为

$$g(\psi, \chi) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \psi(a)\chi(a) = (\mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q^\times}\psi)(\chi) = (\mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q}\chi)(\psi)。$$

### 命题

设 $\psi \neq 1$，$\chi \neq 1$。则 $g(1, \chi) = 0$，$g(\psi, 1) = -1$，$|g(\psi, \chi)| = \sqrt{q}$。

# Gauss 和

设 $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q}$，$\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$。我们默认 $\chi(0) = 0$。Gauss 和定义为

$$g(\psi, \chi) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \psi(a)\chi(a) = (\mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q^\times}\psi)(\chi) = (\mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q}\chi)(\psi)。$$

## 命题

设 $\psi \neq 1$，$\chi \neq 1$。则 $g(1, \chi) = 0$，$g(\psi, 1) = -1$，$|g(\psi, \chi)| = \sqrt{q}$。

## 证明.

前两个等式显然。如果 $\psi' \in \widehat{\mathbb{F}_q}$，那么存在 $b \in \mathbb{F}_q$ 使得对任何 $a \in \mathbb{F}_q$，$\psi'(a) = \psi(ab)$。如果 $\psi' \neq 1$，$\chi(b)g(\psi', \chi) = g(\psi, \chi)$。Parseval 等式给出

$$q - 1 = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} |\chi(a)|^2 = \frac{1}{q} \sum_{\psi' \in \widehat{\mathbb{F}_q}} |g(\psi', \chi)|^2 = \frac{q-1}{q} |g(\psi, \chi)|^2。$$

□

# Kloosterman 和

设 $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q} - \{1\}$，$n \geq 1$，$a \in \mathbb{F}_q^\times$，（广义）Kloosterman 和定义为

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{F}_q^\times \\ x_1 \dots x_n = a}} \psi(x_1 + \cdots + x_n)。$$

$\mathrm{Kl}_{\psi,1} = \psi$，$g(\psi,\chi)^n = \mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q^\times} \mathrm{Kl}_{\psi,n}$。Parseval 等式

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} |\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a)|^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}} |g(\psi,\chi)^n|^2 = \frac{1+(q-2)q^n}{q-1}$$

推出 $|\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a)| \leq q^{n/2}$。

# Kloosterman 和

设 $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q} - \{1\}$，$n \geq 1$，$a \in \mathbb{F}_q^\times$，（广义）Kloosterman 和定义为

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{F}_q^\times \\ x_1 \dots x_n = a}} \psi(x_1 + \cdots + x_n)。$$

$\mathrm{Kl}_{\psi,1} = \psi$，$g(\psi,\chi)^n = \mathrm{FT}_{\mathbb{F}_q^\times}\mathrm{Kl}_{\psi,n}$。Parseval 等式

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} |\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a)|^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}} |g(\psi,\chi)^n|^2 = \frac{1+(q-2)q^n}{q-1}$$

推出 $|\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a)| \leq q^{n/2}$。

**定理 (Deligne [SGA $4\frac{1}{2}$] 1977)**

$$|\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a)| \leq nq^{(n-1)/2}。$$

把 $\psi$ 分解成 $\mathbb{F}_q \xrightarrow{\psi_0} \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^\times$。仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 上存在一阶光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 层 $\mathcal{F}$，满足对任何 $d \geq 1$ 和 $s \in \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_{q^d})$，有 $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_s, \mathcal{F}_{\bar{s}}) = \psi_0(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(s))$。考虑方程 $x_1 \dots x_n = a$ 在 $\mathbb{A}^n$ 中定义的闭子概型 $X$ 以及态射

$$f\colon X \to \mathbb{A}^1 \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n。$$

Grothendieck 迹公式给出

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a) = \iota \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_k, H^i_c(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F}))。$$

把 $\psi$ 分解成 $\mathbb{F}_q \xrightarrow{\psi_0} \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^\times$。仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 上存在一阶光滑 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 层 $\mathcal{F}$，满足对任何 $d \geq 1$ 和 $s \in \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_{q^d})$，有 $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_s, \mathcal{F}_{\bar{s}}) = \psi_0(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(s))$。考虑方程 $x_1 \dots x_n = a$ 在 $\mathbb{A}^n$ 中定义的闭子概型 $X$ 以及态射

$$f\colon X \to \mathbb{A}^1 \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n。$$

Grothendieck 迹公式给出

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(a) = \iota \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_k, H_c^i(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F}))。$$

Deligne 证明了

$$H_c^i(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F}) = 0 \quad i \neq n-1;$$
$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} H_c^{n-1}(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F}) = n。$$

$\mathcal{F}$ 是权重 $0$ 的 $\iota$-纯粹层，所以推广的 Weil 猜想推出 $H_c^{n-1}(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F})$ 的 $\iota$-权重 $\leq n-1$。

**注记**

Deligne 证明了 $H^{n-1}(X_{\bar{k}}, f^*\mathcal{F})$ 是权重 $n-1$ 的 $\iota$-纯粹表示。

# Gauss 和的等分布

$\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q} - \{1\}$，$\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times} - \{1\}$，$\frac{g(\psi,\chi)}{\sqrt{q}} \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$。

## 定理

当 $q \to +\infty$ 时，$\frac{g(\psi,\chi)}{\sqrt{q}}$（$\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times} - \{1\}$）在 $S^1$ 中是均匀分布的。具体地说，对任何连续函数 $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$，

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q-2} \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}_q^\times}-\{1\}} f\left(\frac{g(\psi,\chi)}{\sqrt{q}}\right) = \int_0^1 f(e^{2\pi i\theta})\,d\theta。$$

这里极限取遍序对 $(q,\psi)$，$q$ 是素数的幂，$\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q} - \{1\}$。

证明.

不妨假设 $f(z) = z^n$。若 $n = 0$，等式两侧都是 $1$。设 $n \neq 0$。需要证明

$$\frac{1}{(q-2)q^{n/2}} \sum_{\chi \neq 1} g(\psi, \chi)^n \to 0。$$

不妨假设 $n \geq 1$。Fourier 逆变换公式

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(1) = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}} g(\psi, \chi)^n = \frac{1}{q-1} \left( (-1)^n + \sum_{\chi \neq 1} g(\psi, \chi)^n \right)。$$

所以

$$\frac{1}{(q-2)q^{n/2}} \sum_{\chi \neq 1} g(\psi, \chi)^n = \frac{(-1)^{n+1} + (q-1)\mathrm{Kl}_{\psi,n}(1)}{(q-2)q^{n/2}}。$$

**证明.**

不妨假设 $f(z)=z^n$。若 $n=0$，等式两侧都是 1。设 $n\neq 0$。需要证明

$$\frac{1}{(q-2)q^{n/2}}\sum_{\chi\neq 1} g(\psi,\chi)^n \to 0。$$

不妨假设 $n\geq 1$。Fourier 逆变换公式

$$\mathrm{Kl}_{\psi,n}(1)=\frac{1}{q-1}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}_q^\times}} g(\psi,\chi)^n=\frac{1}{q-1}\left((-1)^n+\sum_{\chi\neq 1} g(\psi,\chi)^n\right)。$$

所以

$$\frac{1}{(q-2)q^{n/2}}\sum_{\chi\neq 1} g(\psi,\chi)^n=\frac{(-1)^{n+1}+(q-1)\mathrm{Kl}_{\psi,n}(1)}{(q-2)q^{n/2}}。$$

再使用 Deligne 的估计 $|\mathrm{Kl}_{\psi,n}(1)|\leq nq^{(n-1)/2}$ 即可。□

# 延伸阅读

- Katz, Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 62 (1985), 361–418. 更多指数和的估计
- Katz, *Gauss Sums, Kloosterman Sums, and Monodromy Groups*, Princeton University Press, 1988. Kloosterman 和的等分布

# 椭圆曲线

**定义**

设 $k$ 是域。$k$ 上的椭圆曲线是指 $(E,O)$，其中 $E$ 是 $k$ 上亏格为 1 的射影光滑曲线，$O$ 是 $C$ 的 $k$-点。

- 可以定义 $j$-不变量 $j(E)\in k$。如果 $\mathrm{char}(k)\neq 2,3$，

$$E\subset\mathbb{P}^2:\ Y^2Z=X^3-27c_4XZ^2-54c_6Z^3,$$

$O=[0:1:0]$，$j=1728\frac{c_4^3}{c_4^3-c_6^2}$，$1728=2^63^3$。

- $E$ 上有交换群概形结构。$\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathrm{End}(E)$。

# 椭圆曲线

## 定义

设 $k$ 是域。$k$ 上的椭圆曲线是指 $(E, O)$，其中 $E$ 是 $k$ 上亏格为 1 的射影光滑曲线，$O$ 是 $C$ 的 $k$-点。

- 可以定义$j$-不变量$j(E) \in k$。如果 $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$，
$$E \subset \mathbb{P}^2 : Y^2Z = X^3 - 27c_4XZ^2 - 54c_6Z^3,$$
$O = [0 : 1 : 0]$，$j = 1728\frac{c_4^3}{c_4^3 - c_6^2}$，$1728 = 2^6 3^3$。
- $E$ 上有交换群概形结构。$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{End}(E)$。
- 设 $k = \mathbb{F}_q$。
$$Z(E, t) = \frac{(1 - \lambda t)(1 - \bar{\lambda} t)}{(1 - t)(1 - qt)},$$
$\lambda = \sqrt{q}e^{i\theta}$，$\theta = \theta(E) \in [0, \pi]$。$\sharp E(k) = 1 + q - 2\sqrt{q}\cos\theta$。

# 佐藤 (Sato)-Tate 猜想

设 $E$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线。除了有限多个素数 $p$ 外，$E$ 的模 $p$ 约化 $E_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线，可以定义 $\theta(E_p)$。

### 猜想 (佐藤 -Tate)

假设 $E$ 没有复乘（即 $\mathrm{End}(E)=\mathbb{Z}$）。那么 $\theta(E_p)\in[0,\pi]$ 按照 $\mu=\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$ 分布。

# 佐藤 (Sato)-Tate 猜想

设 $E$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线。除了有限多个素数 $p$ 外，$E$ 的模 $p$ 约化 $E_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线，可以定义 $\theta(E_p)$。

## 猜想 (佐藤 -Tate)

假设 $E$ 没有复乘（即 $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$）。那么 $\theta(E_p) \in [0, \pi]$ 按照 $\mu = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$ 分布。

Barnet-Lamb-Geraghty-Harris-Taylor (2011) 称 Harris 等人正在写的书可以推出该猜想（对一般全实 (totally real) 数域成立）。

# 等特征佐藤 -Tate 猜想

**定理 (Deligne 1980)**

设 $k=\mathbb{F}_q$，$X$ 是 $k$ 上有限型概形，$X_{\bar{k}}$ 不可约，$E$ 是 $X$ 上椭圆曲线。假设 $j$ 不是常数。当 $n\to+\infty$ 时，$\theta(E_x)$（$x\in X(\mathbb{F}_{q^n})$）在 $[0,\pi]$ 中按照 $\mu=\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$ 分布。

# 等特征佐藤 -Tate 猜想

**定理 (Deligne 1980)**

设 $k=\mathbb{F}_q$，$X$ 是 $k$ 上有限型概形，$X_{\bar{k}}$ 不可约，$E$ 是 $X$ 上椭圆曲线。假设 $j$ 不是常数。当 $n\to+\infty$ 时，$\theta(E_x)$（$x\in X(\mathbb{F}_{q^n})$）在 $[0,\pi]$ 中按照 $\mu=\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$ 分布。

取 $\ell\neq q$，$\iota\colon\overline{\mathbb{Q}_\ell}\hookrightarrow\mathbb{C}$。$R^1f_*\mathbb{Q}_\ell\in\mathrm{Sh}_{\mathrm{lisse}}(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 对应于表示

$$\rho\colon\pi_1(X,\bar{y})\to\mathrm{GL}(V)\hookrightarrow\mathrm{GL}(V\otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}\mathbb{C})\simeq\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}),$$

其中 $V=H^1(E_{\bar{y}},\mathbb{Q}_\ell)$，$y\in X$。对任意 $x\in X(\mathbb{F}_{q^n})$，$\frac{1}{\sqrt{q}}\rho(\mathrm{Fr}_x)$ 共轭于 $\begin{pmatrix}e^{i\theta(E_x)} & 0\\ 0 & e^{-i\theta(E_x)}\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$。有双射

$$[0,\pi]\xrightarrow{\sim}\{\mathrm{SU}(2)\text{ 的共轭类}\}\quad\theta\mapsto\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}。$$

$\mathrm{SU}(2)$ 上的 Haar 测度诱导 $[0,\pi]$ 上的测度 $\mu=\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$。

# Betti 数

设 $k=\bar{k}$ 是可分封闭域，$\ell \neq \mathrm{char}(k)$。

**定义**

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形。$X$ 的第 $i$ 个 $\ell$-进 Betti 数定义为

$$b_{i,\ell}(X) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)。$$

**定理**

假设 $X$ 恰当、光滑。$b_{i,\ell}(X)$ 和 $\ell$ 无关。

在这种情况下，记 $b_i(X) = b_{i,\ell}(X)$。

# Betti 数

设 $k=\bar{k}$ 是可分封闭域，$\ell \neq \mathrm{char}(k)$。

## 定义

设 $X$ 是 $k$ 上有限型概形。$X$ 的第 $i$ 个 $\ell$-进 Betti 数定义为

$$b_{i,\ell}(X) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)。$$

## 定理

假设 $X$ 恰当、光滑。$b_{i,\ell}(X)$ 和 $\ell$ 无关。

在这种情况下，记 $b_i(X) = b_{i,\ell}(X)$。

## 证明.

不妨假设 $k=\overline{\mathbb{F}_q}$，$X=Y_k$，$Y$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上概形。根据 Weil 猜想，$b_{i,\ell}$ 可以从 $Z(Y,t)=\prod_i \det(1-t\mathrm{Fr}_q, H^i(X,\mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}$ 中读取出来。 □

# 难 Lefschetz 定理

设 $k=\bar{k}$，$X$ 是 $k$ 上有限型概形。杯子积 (cup-product)

$$H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)\times H^j(X,\mathbb{Q}_\ell)\to H^{i+j}(X,\mathbb{Q}_\ell)\quad (x,y)\mapsto x\cup y$$

给出 $H^*(X,\mathbb{Q}_\ell)=\oplus_i H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 的环结构。$x\cup y=(-1)^{ij}y\cup x$。

**定理 (Deligne 1980)**

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形，纯 $n$ 维，$\mathcal{L}$ 是 $X$ 上的丰沛 (ample) 层，$\eta=c_1(\mathcal{L})\in H^2(X,\mathbb{Q}_\ell)$。对每个 $i\geq 0$，

$$H^{n-i}(X,\mathbb{Q}_\ell)\to H^{n+i}(X,\mathbb{Q}_\ell)\quad x\mapsto x\cup\eta^i$$

是同构。

**推论**

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形。对每个奇数 $j$，$b_j(X)$ 是偶数。

## 推论

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形。对每个奇数 $j$，$b_j(X)$ 是偶数。

## 证明.

不妨假设 $X$ 连通。令 $n = \dim X$。Poincaré 对偶给出完美配对

$$H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^{n+i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \cup y)。$$

复合上难 Lefschetz 同构，得到 $H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的非退化双线性形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \cup y \cup \eta^i)$。如果 $n - i$ 是奇数，该形式是交错的，所以 $b_{n-i} = b_{n+i}$ 是偶数。 □

### 推论

设 $X$ 是 $k$ 上射影光滑概形。对每个奇数 $j$，$b_j(X)$ 是偶数。

### 证明.

不妨假设 $X$ 连通。令 $n = \dim X$。Poincaré 对偶给出完美配对

$$H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^{n+i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \cup y)。$$

复合上难 Lefschetz 同构，得到 $H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的非退化双线性形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \cup y \cup \eta^i)$。如果 $n - i$ 是奇数，该形式是交错的，所以 $b_{n-i} = b_{n+i}$ 是偶数。 $\square$

### 定理 (Suh 尚未发表)

设 $X$ 是 $k$ 上恰当光滑概形。对每个奇数 $j$，$b_j(X)$ 是偶数。

# 报告提纲

## 问题

设 $k$ 是可分封闭域，$X$ 是 $k$ 上有限型概形。$b_{i,\ell}(X)$ 是否与 $\ell$ 无关？

### 问题

设 $k$ 是可分封闭域，$X$ 是 $k$ 上有限型概形。$b_{i,\ell}(X)$ 是否与 $\ell$ 无关？

设 $k$ 是域，$X$ 是 $k$ 上恰当光滑概形。用 $A^i(X)$ 记 $X$ 上余维数 $i$ 的代数圈(algebraic cycle) 群，即 $X$ 的余维数维 $i$ 的整的闭子概形生成的自由 Abel 群。圈同态

$$\mathrm{cl}_X^i \colon A^i(X) \to H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)$$

的像包含在 Galois 不变的部分 $H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)^G$ 中，其中 $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$。如果 $k = \mathbb{F}_q$，$H^j(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)$ 是权重为 $j - 2i$ 的纯粹表示。所以 $H^j(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)^G \neq 0$ 推出 $j = 2i$。

### 猜想 (Tate)

假设 $k$ 在其本原域上是有限型扩张。那么 $\mathrm{cl}_X^i$ 的像就是 $H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)^G$。

如果 $k = \mathbb{F}_q$，Tate 猜想的内容是，$\mathrm{cl}_X^i$ 的像是 $\mathrm{Fr}_k$ 在 $H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上作用的特征值为 $q^i$ 的特征空间。

# 完

谢谢！