GROUPES DE SELMER ET FONCTIONS L p-ADIQUES POUR LES REPRÉSENTATIONS MODULAIRES ADJOINTES.

ERIC URBAN

Résumé. Nous démontrons une divisibilité vers la conjecture principale d'Iwasawa-Greenberg pour les représentations modulaires adjointes. En particulier, nous prouvons la conjecture de Coates-Schmidt pour une grande classe de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ ayant réduction multiplicatives en p.

Introduction

Soient p un nombre premier impair et $\mathbb{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Soit E une courbe elliptique modulaire sur $\mathbb{Q}$ ayant réduction multiplicative en p. On note $ad(E)$ la representation adjointe du groupe de Galois absolu $G_\mathbb{Q}$ sur l'espace des endomorphisme de trace nulle du module de Tate $T_p(E)$ de E en p. L'action d'un groupe de décomposition en p sur $T_p(E)$ est ordinaire (i.e. laisse stable une droite). Pour tout nombre premier q, on fixe $D_q \subset G_\mathbb{Q}$ un sous-groupe de décomposition en q. Suivant Coates-Schmidt et Greenberg, on peut définir un groupe de Selmer (cf. section 1)

$$Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(E)) \subset H^1(Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_\infty), ad(E) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

comme le sous-module des cocycles non ramifiés en dehors de p et ordinaires en p. Il est muni d'une action de $\Gamma = Gal(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ ce qui fait de lui un module de co-type fini sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cong \mathbb{Z}_p[[S]]$. Depuis les travaux spectaculaires de Wiles et Taylor-Wiles, par un théorème de controle de Hida, on sait aussi que ce dernier est de co-torsion sur Λ.

Dans les années quatre-vingt, Coates et Schmidt ont construit une fonction L p-adique $\mathfrak{L}_p(ad(E), S) \in \Lambda$ interpolant les valeurs critiques

$$\mathfrak{L}(ad(E), \epsilon(\gamma) - 1) = \frac{L(ad(E) \otimes \epsilon, 0)}{(2i\pi)^{-1}\Omega_E^+\Omega_E^-}$$

lorsque ϵ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet de niveau et d'ordre une puissance de p et où $\Omega_E^\pm$ désignent les périodes du modèle de Néron E sur $\mathbb{Z}_p$. La conjecture de Coates-Schmidt identifie l'idéal caractéristique de $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(E))$ avec la fonction L p-adique ci-dessus. Soit $p^* = p(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Dans cet article, nous démontrons le théorème suivant.

Date: 12 janvier 2007.
Ce travail aété financé partiellement par une bourse de la NSF et par le CNRS.

Théorème A. – *Soit E une courbe elliptique ayant réduction multiplicative en p et ne contenant pas de points d'ordre p sur une extension abélienne de $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$. On suppose en outre qu'il existe un nombre premier q, tel que $E[p]$ soit un D_q-module indécomposable. Alors, l'idéal caractèristique de $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(E))$ est engendré par $\mathfrak{L}(ad(E), S)$*

Plus généralement, soit f une forme modulaire elliptique primitive et normalisée de poids k, nebentypus ψ, conducteur C et de développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, f) q^n$$

avec $q = e^{2i\pi z}$. D'après un théorème de Scholl, on peut associer un motif M_f de rang 2 sur son corps de coefficents de Fourier K_f de poids de Hodge $\{(k-1, 0), (0, k-1)\}$. Pour tout caractère de Dirichlet χ, les valeurs critiques aux entiers négatifs du motif adjoint tordu $ad(M_f)(\chi) \subset M_f \otimes M_f^\vee(\chi)$ sont données par les valeurs

$$\frac{L(\widehat{\pi}(f) \otimes \chi, m)}{(2i)^m \pi^{m+k-1} \langle f, f \rangle}$$

avec $m \in \mathcal{C}_{k,\chi}$ et

$$\mathcal{C}_{k,\chi} = \{m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \chi(-1) = (-1)^m \text{ et } 2 - k \leq m \leq 0\}$$

La conjecture de Deligne dans ce cas est démontrée Sturm. Soit η un caractère de Dirichlet pair et non ramifié en p et soit K un corps de nombres p-adiques contenant les valeurs de η et les coefficient de Fourier de f. On suppose désormais

(Ord) f est *ordinaire* en p (i.e. $|a(p, f)|_p = 1$).

Il existe alors une fonction L p-adique $\mathfrak{L}(ad(M_f)(\eta), S) \in \Lambda_O = O[[S]]$ construite par Schmidt et Hida et qui interpole les valeurs critiques aux entiers $\mathcal{C}_{k,\eta}$ du motif $ad(M(f))(\eta)$ divisé par un produit d'une puissance de π et des périodes canoniques $\Omega_f^\pm$ définie par Hida. D'autre part, la représentation galoisienne p-adique ρ_f construite par Deligne est ordinaire. On peut donc encore définir un groupe de Selmer

$$Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(M_f)(\eta)) \subset H^1(G_\mathbb{Q}, ad(\rho_f) \otimes K/O(\eta))$$

Notons $\overline{\rho}_f$ la représentation résiduelle. Dans tout ce travail, on fera l'hypothèse suivante.

(Irred) $\overline{\rho}_f|_{Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt{p^*}))}$ est absolument irréductible.

Notre groupe de Selmer est alors de co-torsion sur Λ_O grâceà la généralisation aux corps totalement réels par Fujiwara des travaux de Taylor-Wiles. On note $\mathfrak{F}(ad(M_f)(\eta), S) \in \Lambda_O$ son idéal caractéristique. Le Théorème A est une conséquence du résultat plus général suivant.

Théorème B. – *On suppose que*

(a) *Il existe un nombre premier q tel que $\overline{\rho}_f|_{D_q}$ soit indécomposable,*

(b) η^2 *est congru à* 1 *modulo l'idéal maximal de la clôture intégrale de* $\mathbb{Z}_p$,
(c) $\eta(p)$ *est congru à* 1 *modulo l'idéal maximal de la clôture intégrale de* $\mathbb{Z}_p$.

Alors $\mathfrak{L}(ad(M_f)(\eta), S)$ *divise* $\mathfrak{F}(ad(M_f)(\eta), S)$ *dans* $O[[S, 1/S]]$.

Remarques.

1. Les conditions (a) et (b) sont des hypothèses techniques nécessaires pour utiliser un résultat de Vatsal. La condition (c) est certainement inutile et un peu plus de travail permettrait facilement de s'en débarasser.
2. La divisibilité est valable dans $O[[S, 1/S]]$ au lieu de $O[[S]]$ car notre méthode ne permet pas d'étudier directement la valuation S-adique de $\mathfrak{F}(ad(M_f)(\eta), S)$. En fait, les propriété d'interpolation de $\mathfrak{L}(ad(M_f)(\eta)$ montre que cette dernière admet un zero en $S = 0$ lorsque $\eta(p) = 1$, $\mathfrak{L}(ad(M_f)(\eta)$ a un zéro trivial en $S = 0$. Hida a montré que dans ce cas $\mathfrak{F}(ad(M_f)(\eta)$ a également un zéro en $S = 0$. Tl est conjecturé que ce zéro est d'ordre 1. Si cette conjecture est satisfaite, la divisibilité est donc valable dans $O[[S]]$ et l'argument qui démontre le Théorème A montrerait l'égalité. Par ailleurs, il ne serait pas difficile de voir que l'argument de Wiles dans [W90] qui traite les zéros triviaux de la fonctions L p-adique de Deligne-Ribet est transposable ici. Par contre lorsque $\eta(1) \neq 1$, les même propriétés d'intégralités montre que $\mathfrak{L}(ad(M_f)(\eta)$ n'a pas de zero en $S = 0$ et la divisibilité du Théorème B est valable dans $O[[S]]$.
3. Le Théorème A est un cas particulier du Théorème B. Le fait que le zéro trivial soit d'ordre 1 est du à une formule de Greenberg-Tilouine sur la dérivée de la fonction L p-adique et de la non nullité du $\mathcal{L}$-invariant de Mazur-Tate-Teitelbaum qui résulte d'un théorème de Barré-Sirieix, Diaz, Gammain et Philibert. La stratégie de la preuve de ce théorème avait été prsentée dans [HTU].

La démonstration du Théorème B passe par la preuve d'une divisibilité pour un groupe de Selmerà deux variables. Introduisons quelques notations. Soit $\mathbf{I}$ une composante irréductible de l'algèbre de Hecke universelle ordinaire de Hida. C'est une extension finie et plate de $\Lambda = O[[T]]$. D'après Hida, on lui associe une forme modulaire $\mathbf{I}$-adique $\mathcal{F} \in \mathbf{I}[[q]]$ et une représentation galoisienne ordinaire dans $GL_2(\mathbf{I})$ qui interpole les représentations galoisiennes ρ_f lorsque l'on spécialise la variable du poids T. D'après Hida, il existe une fonction L p-adiqueà deux variables $\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta_G) \in \mathbf{I}[[S]]$ et une représentation galoisienne ordinaire $\rho_{\mathcal{F}}$ dont les spécialisations en la variable du poids permettent de retrouver les objets décrits précédement pour une forme classique f. On peut ainsi définir un groupe de Selmer $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_{\mathcal{F}})) \otimes \eta)$. Sous l'hypothèse (Irred) pour la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\mathcal{F}}$, ce dernier est de co-torsion sur $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}[[S]]$ et on note $\mathfrak{F}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta)$ son idéal divisoriel caractéristique dans $\tilde{\mathbf{I}}$. On a:

Théorème C. – *On conserve les mêmes hypothèses que dans le Théorème B. Alors,* $\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta))$ *divise* $\mathfrak{F}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta))$ *dans* $\mathbf{I}[[S, 1/S]]$.

Remarques.

1. Les remarques qui suivent le théorème B reste valable pour le théorème C lorsqu'on remplace O par $\mathbf{I}$.
2. L'hypothèse sur l'existence d'un nombre premier q tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{F}}|_{D_q}$ soit indécomposable sertà montrer que f est associéeà une forme quaternionique et qu'il n'existe pas de congruences entre f et des formes qui ne sont pas associéesà une forme quaternionique. Ce point est utile pour utiliser un résultat de Vatsal. On pourrait probablement affablir cette hypothèse, voire la supprimer avec un peu plus de travail.

Pour démontrer le Théorème C, on étudie les congruences entre des séries d'Eisenstein-Klingen et des formes modulaires de Siegel cuspidales. Plus précisément, on introduit un idéal d'Eisenstein $\mathfrak{Eis}(\mathcal{F},\eta) \subset \tilde{\mathbf{I}}$ pour l'algèbre de Hecke universelle ordinaire pour le groupe GSp_4. Si Σ désigne l'ensemble fini des places de ramifications de $\rho_{\mathcal{F}}$ et η, on prouve que

(i) $\mathfrak{Eis}(\mathcal{F},\eta)$ divise $\mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta)$.
(ii) $\mathfrak{L}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta)$ divise $\mathfrak{Eis}(\mathcal{F},\eta)$.

où $\mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta)$ et $\mathfrak{L}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta)$ désigne respectivement l'idéal divisoriel caractéristique du groupe de Selmer $Sel^{\Sigma}_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta)$ défini en oubliant les conditions locales en les places dans Σ et la fonction L p-adique non primitiveà deux variables.

La divisibilité (i) est démontrée dans [U01] où l'on montre que l'existence de congruences entre séries d'Eisenstein donne naissanceà des éléments du groupe de Selmer. Pour cela, on traduit la congruence au niveau galoisien en utilisant les représentations galoisiennes associées aux représentations cuspidales de GSp_4. L'irréductibilité de ces dernières permet de construire des réseaux résiduellement indécomposable et donc des extensions non triviales. Nous renvoyons le lecteurà [U01] pour plus de détails.

La divisibilité (ii) est l'objet du présent article. Il s'agit de construire des congruences. Plus précisément, on montre que la fonctions L p-adique $\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta)$ controle les congruences entre les séries d'Eisenstein-Klingen pour GSp_4 construites en induisant $\mathcal{F}$ et η et des formes cuspidales. Cela est suggéré par le fait que le terme constant de ces séries d'Eisenstein est un multiple des valeurs critiques interpolées par cette fonction L p-adique. La constructions se fait directement en familles de Hida de formes de Siegel.

Il n'échappera pas au lecteur que la méthode de démonstration de nos résultats est une généralisation de la démonstration de la conjecture principale d'Iwasawa pour les corps totalement réels par Wiles [W90] qui est elle-même une élaboration du théorème de Mazur-Wiles [MW84] qui traite le cas du corps des rationels et d'un théorème de Ribet[1][R] qui prouve la réciproque du théorème de Herbrand. En fait, cette méthode est très générale[2] et pourrait se voir comme une version p-adique de la méthode de Langlands-Shahidi qui

[1]Il semble que Greenberg et Monsky ont été les premier à essayer de démontrer des résultats de ce style par cette méthode en etudiant la congruence modulo 691 entre la fonction Δ de Ramanunjan et la serie d'Eisenstein de poids 12 et niveau 1.

[2]Dans un travail en cours avec C. Skinner nous généralisons notre méthode au cas des groupes unitaires pour étudier les fonctions L p-adiques et les groupes de Selmer pour la representation standard associée à une forme modulaire.

consiste à étudier certaines fonctions L au moyen de certaines séries d'Eisenstein. Cependant cette généralisation comporte énormément de complications non seulement dans la preuve de la première divisibilité mais surtout dans la démonstration de la seconde. Par exemple dans le cas de $GL(2)$, les séries d'Eisenstein se construisent très facilement et leur normalisations est immédiate alors que dans notre cas non seulement la construction demande de constants efforts mais démontrer de surcroît que la normalisation naturelle est optimale nous oblige à avoir recours à un théorème difficile de Vatsal.

Pour construire ces congruences, on utilise la structure entière donnée par le q-développement. On construit donc une théorie de Hida pour les formes de Siegel ordinaires de genre g en s'inspirant de [Hi02]. La différence essentielle avec loc. cit. réside dans le fait que l'on doit considérer les formes de Siegel dont la restriction aux composantes du bord genre $g-1$ est une forme cuspidale de genre $g-1$ et pas seulement les formes cuspidales de genre g (celles dont dont la restriction definie ci-dessus s'annule). Le point important est que l'on montre que l'opérateur de Siegel entier est surjectif aux composantes rationnelles *non ramifiées* en p de la compactification minimale de la variété de Siegel, ce qui s'avère être suffisant pour les formes ordinaires. On montre en effet que la cuspidalité se teste seulement sur les termes constants aux composantes non ramifiées. Tout ceci est l'objet de la section 2.

Dans la section 3, on étudie les séries d'Eisenstein-Klingen $G(z; f, \chi, N)$. Elles sont déterminées par les données d'un forme propre f de poids k et niveau N et d'un caractère de Dirichlet χ de mÃªme niveau et tel que $\chi(-1) = (-1)^k$.

Dans un premier temps, on calcule les coefficient de Fourier ce qui permet de définir une normalisation naturelle de ces dernières. Le fait que cette normalisation soit la meilleur possible se démontre en utilisant un résultat récent de Vatsal.

Dans un deuxième temps, on construit l'interpolationà deux variables, la variable du poids, et la variable cyclotomique de $G(z; f, \chi, Np^r)$ lorsque f et χ varient. Pour montrer l'existence de congruence, il nous restait alorsà montrer que les termes constants aux pointes non ramifiées sont des multiples de la fonctions L p-adiques $\mathfrak{L}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta)$. S'il est relativement facile de calculer le terme constant en l'infini, le calcul en les autres pointes est moins aisé et nous avons choisi une autre méthode. Le terme constant s'exprimeà l'aide d'un opérateur d'entrelacement entre induites paraboliques. Ces dernières sont munies de structures entières naturelles par les fonctionnelles de Whittaker définies par Casselman-Shalika. L'opérateur d'entrelacement ne respecte pas ces structures entières mais le dénominateur de celui-ci peut se calculer en termes des coefficients locaux de Shahidi qui se calculent très explicitement dans notre cas par des valeurs spéciales de fonctions L locales.

Nous avons ajouté un appendice dans lequel nous rappelons divers résultats sur les structures entières des représentations sur un corps local. La section 1 rappelle les définition des groupes de Selmer et démontre les théorèmes de l'introductionà partir du du théorème central (i.e. le théorème 1.4.7). Ce dernier est quantà lui démontré à la dernière sous-section.

L'auteur a commencé à travailler à ce projet lors d'une visite au Mehta Research Institute de Allahabad et l'a poursuivi alors qu'il était à tour de role membre du CNRS et du département de mathématiques de UCLA ainsi qu'au cours d'une visite au "National Center for Theoretical Sciences" de Hsinchu. Il souhaite remercier ces institutions pour leur support financier et les excellentes conditions de travail dont il a bénéficiées.

Il lui reste à exprimer sa gratitude envers les collègues et amis qu'il a cotoyés pendant la gestation de ce travail: Haruzo Hida pour d'innombrables discussions sur la théorie des formes modulaires p-adiques et la théorie d'Iwasawa des groupes de Selmer adjoint et en particulier son invitation à venir travailler à UCLA et Michael Harris pour son intérêt et ses encouragements constants à terminer ce manuscrit et sans qui ce dernier n'aurait probablement pas vu le jour. Il souhaite également remercier Ching-Li Chai, Kazuhiro Fujiwara, Ralph Greenberg, Güenter Harder, Chris Skinner, Nike Vatsal et Jacques Tilouine pour d'utiles conversations et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Table des matières

Conventions et notations

Pour tout ensemble fini S, on note $\sharp(S)$ le cardinal de S.

Soient a, b deux éléments d'un anneau A contenant un sous-ensemble d'éléments inversibles U, on note $a \sim_I b$ pour exprimer qu'il existe $u \in U$ tel que $a = bu$.

On note respectivement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}_\ell$ l'anneau des entiers naturels, les corps des nombres rationels, réels, complexes et ℓ-adiques pour tout nombre premier ℓ. On note $\widehat{\mathbb{Z}}$ la complétion profinie de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finies et $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$.

Pour tout corps K, $\overline{K}$ désigne une clÃ´ture algébrique de K et on fixe ι_p et ι_∞ des plongements respectifs de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $\mathbb{C}$.

On note $|.|_\ell$ la norme ℓ-adique normalisée par $|\ell|_\ell = \ell^{-1}$ et $|.|_{\mathbb{A}}$ la norme adélique canonique.

Pour tout corps de nombres $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$, on pose $G_F = Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ le groupe de Galois absolu de F. Pour toute place finie v de F, on fixe D_v un sous-groupe de décomposition en v, on note $I_v \subset D_v$ le sous-groupe d'inertie correspondant et on fixe $Frob_v \in D_v$ un Frobenius géométrique.

On note χ_p le caractère cyclotomique de $G_{\mathbb{Q}}$à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Soit ω le caractère de Teichmüller (i.e l'unique caractère de $\mathbb{Z}_p^\times$à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$ tel que $\omega(x) \equiv x \ mod\ p$). On considèrera ω comme un caractère de $G_{\mathbb{Q}}$ en posant $\omega_G = \omega \circ \chi_p$. Soit $\mathbb{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_p$ extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. On pose $\Gamma = Gal(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})(\cong \mathbb{Z}_p)$ et on fixe γ_{top} un générateur topologique et on pose$u = \chi_p(\gamma_{top})$. Ceci permet d'identifier $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ avec $\mathbb{Z}_p[[S]]$ via $\gamma_{top} \mapsto 1 + S$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, on pose $< a >_S = (1+S)^{\frac{\log a\omega^{-1}(a)}{\log u}} \in \mathbb{Z}_p[[S]]$.

Pour tout caractère de Dirichlet ψ, on note respectivement C_ψ son conducteur, $\psi_{\mathbb{A}}$ le caractère de Hecke (de $\mathbb{A}^\times$) trivial sur $\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}^\times$ et valant ψ^{-1} sur $\mathbb{Z}_l^\times$ pour tout premier $l|C_\psi$ et ψ_G le caractère de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $\psi_G(Frob_\ell) = \psi(\ell)$ pour tout ℓ ne divisant pas C_ψ. Si ψ est de niveau Np^r avec N et p premier entre eux, on note ψ_N (resp. ψ_p) la composante de ψ modulo N (resp. modulo p^r).

Pour tout anneau unitaire A et $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note $M_r(A)$, l'algèbre des matrices carrés de tailles r et $GL_r(A)$ le groupe des matrices inversibles de taille r.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit GSp_{2n} le groupe algébrique des similitudes symplectiques défini par

$$GSp_{2n}(A) = \{\gamma \in M_{2n}(A) |\ {}^t\gamma\iota_n\gamma = \nu_n(\gamma)\iota_n \text{ avec } \nu(\gamma) \in A^\times\}$$

avec $\iota_n = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{smallmatrix}\right)$. On écrit tout élément de GSp_{2n} sous la forme

$$\gamma = \begin{pmatrix} a(\gamma) & b(\gamma) \\ c(\gamma) & d(\gamma) \end{pmatrix}.$$

On note T le tore diagonal, B le sous-groupe de Borel déterminé par les matrices γ telles que $d(\gamma)$ soit triangulaire supérieure et $N \subset B$ son radical unipotent.

Pour $i = 1 \dots n$, on note $\lambda_i \in X(T)$ le poids défini par

$$diag(x_1, \dots, x_n, \nu x_1^{-1}, \dots, \nu x_n^{-1}) \mapsto x_i$$

Le système de racines simples associé au couple (B, T) est $\Delta = \{\lambda_1^2\nu^{-1}\ ,\ \lambda_{i+1}\lambda_i^{-1}\ i = 1, \dots, n-1\}$.

Soient r et s des entiers positifs ou nuls tel que $s + r = g$. Pour $\gamma \in Sp_{2g}$, on ecrit par blocs:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1(\gamma) & a_2(\gamma) & b_1(\gamma) & b_2(\gamma) \\ a_3(\gamma) & a_4(\gamma) & b_3(\gamma) & b_4(\gamma) \\ c_1(\gamma) & c_2(\gamma) & d_1(\gamma) & d_2(\gamma) \\ c_3(\gamma) & c_4(\gamma) & d_3(\gamma) & d_4(\gamma) \end{pmatrix}$$

où les blocs indexés par 1 (resp. 4) sont de taille $s \times s$ (resp. $r \times r$) et on considère le sous-groupe parabolique maximale de Sp_{2g} de genre s:

$$P_{r,s} = \{\gamma \in Sp_{2g} | a_2(\gamma) = c_2(\gamma) = 0, c_3(\gamma) = d_3(\gamma) = 0, c_4(\gamma) = 0\}$$

et $P^{g,0} = \{\gamma \in Sp_{2g} | c_\gamma = 0\}$. Pour $\gamma \in P^{g,s}$, on pose

$$\pi_s(\gamma) = \begin{pmatrix} a_1(\gamma) & b_1(\gamma) \\ c_1(\gamma) & d_1(\gamma) \end{pmatrix} \in Sp_{2s}$$

Soit $GSp_{2n}(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe de $GSp_{2n}(\mathbb{R})^+$ des élements γ tel que $\nu(\gamma) > 0$. Ce groupe opère sur le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_n = \{z \in M_n(\mathbb{C}) |{}^t z = z \text{ et } Im(z) > 0\}$ par la formule classique

$$\gamma.z = (a(\gamma)z + b(\gamma))(c(\gamma)z + d(\gamma))^{-1}$$

On note $\mathbf{i} = i1_{2n} \in \mathcal{H}_n$ et $K_\infty \subset GSp_{2n}(\mathbb{R})^+$ son stabilisateur.

Pour tout sous-groupe parabolique P d'un groupe réductif G sur $A \subset \mathbb{A}_f$, $Ind_{P(A)}^{G(A)}\pi$ désigne la représentation induite unitaire d'une représentation π d'un sous-groupe de Lévi de P.

Pour tout sous-groupe arithmetique $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$, le produit de Petersson est défini par

$$\langle f, g\rangle_\Gamma = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dzd\overline{z}$$

pour toutes formes modulaires f et g.

Dans ce travail, p désigne toujours un nombre premier impair.

1. Groupes de Selmer

1.1. Définitions des groupes de Selmer.

1.1.1. Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale noetherienne complète d'ideal maximal m_A et de corps residuel k. Soit W un A-module sans torsion muni d'une représentation continue de G_F non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers $Ram(W)$. On suppose en outre que W est ordinaire: Pour toute place finie de F $v|p$, il existe $F_v^+W \in W$ un facteur direct de W stable sous l'action de I_v.

Pour toute A-algèbre B, soit B^* l'enveloppe injective de B. Si B est de valuation discrète, $B^* = Frac(B)/B$. Si B est une $\mathbb{Z}_p$ algèbre locale d'idéal maximal contenant p, $B^* = Hom_{\mathbb{Z}_p}(B, \mathbb{Q}_p/Z_p)$. Pour tout A-module W comme ci-dessus, $M \otimes B^*$ est un G_F-module discret (l'action de G_F est continue lorsqu'on munit $W \otimes B^*$ de la topologie discrète.)

Soient ψ un caractère continu de G_F dans $B^\times$ et Σ un ensemble fini de places finies de F ne contenant pas de places de caractéristiques résiduelles p. On définit $Sel^B_{F,\Sigma}(W \otimes \psi)$ comme le noyau de

$$\begin{aligned} H^1(G_F, W \otimes B^*(\psi)) \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin \Sigma \cup \{v|p\}} H^1(I_v, W \otimes B^*(\psi)) \\ & \oplus \bigoplus_{v|p} H^1(I_v; (W/F_v^+W) \otimes B^*(\psi)) \end{aligned}$$

Pour toute extension L de F, on notera $Sel^B_{L,\Sigma}(ad(\rho) \otimes \psi)$, la limite injective pour les morphismes de restriction de $Sel^B_{F',\Sigma'}(ad(\rho) \otimes \psi)$ où F' parcourt les extensions finies de F contenues dans L et Σ' est l'ensemble des places de F' au dessus des places de F contenues dans Σ.

1.1.2. Soit ρ une representation galoisienne continue de G_F dasn $GL_2(A)$ non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. On suppose que ρ est ordinaire i.e. pour toute place finie de F $v|p$, il existe $g_v \in GL_2(A)$ tel que pour tout $\sigma \in I_v$

$$\rho(\sigma) = g_v \begin{pmatrix} det(\rho)(\sigma) & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_v^{-1}$$

Soit $ad(\rho)$ la représentation adjointe de G_F sur $W = sl_2(A)$. On pose $F_v^+W \subset W$ le sous-A-module de W engendré par les matrices de la forme:

$$g_v \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_v^{-1}$$

Soit $\overline{\rho}$ la représentation résiduelle dans $GL_2(k)$. Dans la suite, bien que cela ne soit pas entiérement nécessaire, on considèrera les hypothèses suivantes:

(Irred) $ad(\overline{\rho})$ est absolument irreductible.

On supposera également que l'hypothèse suivante est vérifiée.

(Tors) $\qquad Sel^B_{F,\Sigma}(ad(\rho)\otimes\psi)$ est de co-torsion sur B.

1.1.3. Soit η un caractère de Dirichlet et η_G le caractère de $G_{\mathbb{Q}}$ correspondant. On définit $\tilde{\eta}_G :\ G_{\mathbb{Q}} \to O_K[[S]]^\times$ par:

$$\tilde{\eta}_G(\sigma) = \eta_G(\sigma) < \chi_p^{-1}(\sigma) >_S$$

Pour tout Σ et A, on vérifie facilement qu'on a un isomorphisme canonique:

$$Sel^{A[[S]]}_{\Sigma,F}(W\otimes\tilde{\eta}) \cong Sel^A_{\Sigma,F_\infty}(W\otimes\eta)$$

où F_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F.

1.1.4. *Idéaux caractéristiques et de Fitting.* Soit M un A-module de présentation $A^e \stackrel{g}{\to} A^d \to M \to 0$. On note $Fitt_A(M)$ son idéal de Fitting. C'est l'idéal engendré par tous les $d\times d$-mineurs du morphisme g. Cette définition est indépendante de la présentation choisie et pour toute A-algèbre B, on vérifie aisément que

$$Fitt_B(M\otimes_A B) = Fitt_A(M).B$$

Rappelons qu'un idéal de A est dit divisoriel s'il est l'intersection d'une famille non vide d'idéaux principaux. L'idéal divisoriel associéà un idéal $\mathfrak{a}$ est l'idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$ obtenu en prenant l'intersection des idéaux principaux contenant $\mathfrak{a}$. On a trivialement $\mathfrak{a}\subset\tilde{\mathfrak{a}}$. L'idéal caractéristique $Car_A(M)$ du module M est, par définition, l'idéal divisoriel associéà $Fitt_A(M)$. Bien entendu lorsque A est de valuation discrète, tout idéal est divisoriel et ces deux définitions coincident. Enfin pour tout A-algèbre B, on a $Fitt_B(M\otimes_A B) = Fitt_A(M).B \subset Car_A(M).B \subset \widetilde{Car_A(M).B}$ et donc

$$Car_B(M\otimes_A B) \subset \widetilde{Car_A(M).B} \tag{1.1.4.a}$$

Supposons maintenant que A soit un anneau de Krull et notons $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteurs 1 de A et pour chaque $P\in\mathcal{P}_A$ soit v_P la valuation normalisée correspondante. A tout diviseur $D=\sum_P n_P.P$ (un élément du groupe abélien libre de base $\mathcal{P}_A$), on associe l'idéal divisoriel

$$\mathfrak{I}_D = \{x\in A|v_P(x)\geq n_P\ \forall P\in\mathcal{P}_A\}$$

réciproquement tout idéal divisoriel est de cette forme.

Pour tout A-module de torsion M, son diviseur associé est défini par

$$div(M) = \sum_{P\in\mathcal{P}_A} lg_{A_P}(M_P)$$

où A_P est le localisé de A en P, $M_P = M\otimes_A A_P$ et $lg_{A_P}(M_P)$ désigne la longueur du A_P-module M_P. On vérifie aisément que l'on a:

$$\mathfrak{I}_{Div(M)} = Car_A(M)$$

Lemme 1.1.5. Supposons que A soit un anneau de Krull de corps de fractions K_A, alors pour tout $P \in \mathcal{P}_A$, on a:

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(Sel^A_{F,\Sigma}(W \otimes \psi), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_P \cong Hom_{A_P}(Sel^{A_P}_{F,\Sigma}(W\psi), K_A/A_P)$$

Preuve. Pour $B = A$ ou A_P, le foncteur de la catégorie des B-modules compacts dans celle des B-modules discrets défini par$W \mapsto D_B(M) = Hom_B(W, B^*)$ est exact et définit une dualité. On vérifie immédiatement que $D_A(M \otimes A^*)_P = D_{A_P}(M_P \otimes K_A/A_P)$ sur les A-modules libres puis sur ceux de ceux de type fini en utilisant l'exactitude de D_A et D_{A_P}. Pour tout groupe G profini opérant continument sur un groupe abélien topologique N, notons $Z^i(G, N)$ le module des cocycles continus inhomogènes. On a donc

$$D_A(Z^i(G, M \otimes A^*)_P = D_{A_P}(Z^i(G, M \otimes K_A/A_P))$$

Soit d^i_B le morphisme différentiel sur les cocycles inhomogènesà valeurs dans $M \otimes B^*$. On a $D_B(Ker(d^i_B)) = coker(D_B(d^i_B))$. Par platitude de la localisation, on a donc

$$D_{A_P}(Ker(d^i_{A_P}) = coker(D_{A_P}(d^i_{A_P})) = coker(D_A(d^i_A))_P = D_A(Ker(d^i_A))_P$$

Similairement, on a $D_{A_P}(Im(d^i_{A_P}) = D_A(Im(d^i_A))_P$ et on en déduit que pour tout groupe profini G opérant continument sur M, on a

$$D_{A_P}(H^i(G, M \otimes K_A/A_P) = D_A(H^i(G, M \otimes A^*))_P.$$

Le lemme s'en déduit facilement.∎

1.2. **Formes modulaires ordinaires.**

1.2.1. Soient N et k des entiers positifs. Soit ψ un caractère de Dirichlet de niveau N. On note $S_k(N, \psi)$ l'espace des formes modulaires cuspidales de niveau N, poids k et caractère ψ et $h_k = h_k(N, \psi)$ l'algèbre de Hecke sur $\mathbb{Z}$ opérant sur $S_k(N, \psi)$. Pour tout forme modulaire nouvelle $f \in S_k(N, \psi)$, on considère son q-developpement

$$f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, f)q^n$$

avec $q = e^{2i\pi z}$. On suppose f normalisée i. e. $a(1, f) = 1$. et on note K_f le corps engendré par les coefficients $a(n, f)$ et $O_f \subset K_f$ son anneau d'entiers. Soit p un nombre premier et $\wp \subset O_f$ l'idéal premier au dessus de p induit par le plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$. On pose $O_{f,(p)}$ resp. $O_{f,p}$ le localisé resp. complété de O_f en $\wp$. D'après Deligne, on sait qu'il existe une représentation galoisienne continue $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(O_{f,p})$ non ramifiée en dehors de Np et telle que pour tout $\ell \not| Np$, on ait

$$det(1 - X\rho_f(Frob_\ell))) = 1 - a(\ell, f)X + \psi(\ell)\ell^{k-1}X^2$$

De plus si, la condition suivante $Ord(f, p)$ est satisfaite ρ_f est ordinaire.

(Ord) f est ordinaire en p (i.e. $|a(p, f)|_p = 1$).

On supose également que la condition suivante est satisfaite.

(Reg) $\omega^{k-1}\psi_p \not\equiv 1 \bmod p$.

Cette condition a pour but d'assurer que le sous-module de rang 1 d'un réseau stable de ρ_f qui est stable par l'inertie I_p est un facteur direct. Sous ces conditions, on peut donc définir les groupes de Selmer

$$Sel(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}) := Sel_{\mathbb{Q}}^{O[[S]]}(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}) = Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_f)\otimes\eta)$$

1.2.2. *Périodes canoniques.* Pour tout anneau A, soit $L_n(A)$ l'ensemble des polynômes homogènesà deux variables de degré n. On le munit de l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ habituelle. On note $H^1_P(\Gamma_1(N), L_n(A))$ pour désigner la cohomologie parabolique du groupe de congruence $\Gamma_1(N)$ agissant sur $L_n(A)$. On a l'isomorphisme d'Eichler-Shimura

$$\delta\oplus\overline{\delta} : S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{C})\oplus\overline{S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{C})}\cong H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathbb{C}))$$

où pour toute forme parabolique f depoids k et niveau N, $\delta(f)$ désignant la classe de cohomologie du cocycle défini par

$$\gamma\mapsto 2i\pi\int_{z_0}^{\gamma.z_0} f(z)^t(z^n, z^{n-1},\dots,1)dz.$$

La conjugaison par $\epsilon = diag(1,-1)$ induit une involution sur la cohomologie et une décomposition:

$$H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(A)) = H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(A))^+\oplus H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(A))^-$$

pour tout anneau A pour lequel 2 est inversible. Les modules $(\delta\oplus\overline{\delta})(\mathbb{C}.f)\cap H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(O_{(\wp)}))^\pm$ et $(\delta\oplus\overline{\delta})(O_{(\wp)}.f)\cap H^1_P(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathbb{C}))^\pm$ sont libres de rang 1 sur $O_{(\wp)}$. On peut fixer $\delta_f^\pm$ (resp. $\omega_f^\pm$) une base du premier (resp. du second) et définir $\Omega_f^\pm\in\mathbb{C}$ par

$$\omega_f^\pm = \Omega_f^\pm.\delta_f^\pm$$

$\Omega_f^\pm$ sont appelées les périodes canoniques associées à f. Elles sont définies à une unité $\wp$-adique près.

1.2.3. *Module de congruences.* Soit $1_f\in h_k(N,\psi)\otimes_{\mathbb{Z}} K_f$ l'idempotent associé à f i. e. tel que $T(n).1_f = a(n,f).1_f$ pour tout entier n. Il induit une décomposition $h_k\otimes K_f = K_f\oplus B_f$. Le module de congruence de f est le O_f module de torsion determiné par:

$$\mathfrak{C}(f) = h_k/O_f\cap h_k\oplus B_f\cap h_k\cong(1-1_f).h_k/B_f\cap h_k\cong O_f/O_f\cap h_k$$

Sous l'hypothèse (Irred) pour ρ_f, il résulte des travaux de Hida et Taylor-Wiles que l'on a la relation (cf. [Hi81]):

$$\sharp(\mathfrak{C}(f)\otimes\mathbb{Z}_p) = |\eta_f|_p^{-1}$$

avec

$$\eta_f \overset{def}{=} \Gamma(k)C_fC_{\psi_f}\phi(C_f/C_{\psi_f})\frac{L(\widehat{\pi}(f),1)}{\pi^{k-1}\Omega_f^+\Omega_f^-} = \frac{2^{2k}(2i)^{k+1}\pi^2\langle f,f\rangle}{\Omega_f^+\Omega_f^-}$$

De plus, le groupe de Selmer $Sel_{O_{f,p}}(\rho_f)$ est fini et on a:

$$\sharp(Sel^{O_{f,p}}(ad(\rho_f))) = \sharp(\mathfrak{C}(f)) = |\eta_f|_p^{-1}$$

1.2.4. *Courbes elliptiques.* Soit $E_{/\mathbb{Q}}$ une courbe elliptique modulaire de conducteur N. Soit p un nombre premier tel que E ait réduction ordinaire ou multiplicative en p. Soit T_pE le module de Tate de E en p et soit ρ_E la représentation galoisienne correspondanteà valeurs dans $GL_2(\mathbb{Z}_p)$. Pour tout premier $q \neq p$ de bonne réduction, on a:

$$det(1 - \rho_E(Frob_q)X) = 1 - a(q)X + qX^2$$

avec $a(q) = q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)|$. De plus ρ_E est ordinaire par hypothèse. On considére alors le groupe de Selmer

$$Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_E) \otimes \eta) = Sel_{\mathbb{Q}_\infty}^{\mathbb{Z}_p(\eta)}(ad(\rho_E) \otimes \eta)$$

On note $\mathfrak{F}_{ad(\rho_E)\otimes\eta} \in \mathbb{Z}_p(\eta)[[S]]$ sa série caractéristique lorsqu'il est de co-torsion. Si g est la forme ordinaire propre normalisée de poids 2 et niveau Cp associéeà E, on a bien entendu

$$Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_E) \otimes \eta) = Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_g) \otimes \eta)$$

De plus, par un théorème de Mazur sur la constante de Manin et généralisé dans [GV] au cas de mauvaise réduction multiplicative, on a

$$\Omega_g^{\pm} \sim_{\mathbb{Z}_p^\times} \Omega_E^{\pm} \qquad (1.2.4.a)$$

1.2.5. *Familles de Hida.* Soit O une extension finie de $\mathbb{Z}_p$ et $\Lambda = O[[T]]$. Soit $\mathbf{I}$ une composante irréductible primitive de l'algèbre de Hecke universelle ordinaire $\mathbf{h}^{ord}(C)\otimes_{\mathbb{Z}_p} O$ dont on note $\lambda_{\mathbf{I}}$ le caractère de $\mathbf{h}^{ord}(C)$ dans $\mathbf{I}$ correspondant. On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{I}} = \sum \lambda_{\mathbf{I}}(T(n))q^n \in \mathbf{I}[[q]]$ la forme primitive normalisée $\mathbf{I}$-adique qui lui est associée (voir [Hi90] par exemple pour une description de la théorie). On note $\psi_{\mathcal{F}}$ le nebentypus de $\mathcal{F}_{\mathbf{I}}$ et ψ' (resp. ψ_p) sa composante premièreà p (resp. sa p-composante). Rappelons qu'un idéal premier arithmétique P de $\mathbf{I}$ est un idéal premier tel que $P \cap O[[T]] = (1+T-u^{k_P}\epsilon_P(u))$ avec k_P un entier supérieur ≥ 2 et ϵ_P un caractère de $1 + p\mathbb{Z}_p$ de conducteur p^{r_P}. On note alors $\Phi_P : \mathbf{I} \to \mathbf{I}/P \subset \mathbb{C}_p$ le morphisme de réduction modulo P. Par construction de $\mathbf{I}$, pour tout P arithmétique, $f_P = \phi_P(\mathcal{F}_{\mathbf{I}})$ est le q-développement d'une forme propre primitive normalisée de poids k_P, niveau Cp^{r_P} et de nebentypus $\psi_{\mathcal{F}}\omega^{-k_P}$.

Soit $\mathbf{K}_{\mathbf{I}}$ le corps des fractions de $\mathbf{I}$. Il existe une représentation galoisienne $\rho_{\mathcal{F}}$ Ã valeur dans $GL_2(\mathbf{K}_{\mathbf{I}})$ associéeà $\mathcal{F}_{\mathbf{I}}$; elle est continue et non ramifiée en les places ne divisant pas Np et pour chaque $\ell \not| Np$ le polynôme caractéristique de $Frob_\ell$ vaut

$$det(1 - \rho_{\mathcal{F}}(Frob_\ell)X) = 1 - a(\ell; \mathcal{F})X + \ell^{-1}\psi_{\mathcal{F}}(\ell) < \ell >_T X^2$$

De plus $\rho_{\mathcal{F}}$ est ordinaire en p.

On suppose que $\mathcal{F}$ n'est pas résiduellement Eisenstein (i.e n'est pas congrue modulo m_Λ Ã une série d'Eisenstein). Sous cette hypothèse, il existe un unique réseau (à homothétie près) de $\mathbf{K}_{\mathbf{I}}^2$ stable sous l'action de $G_{\mathbb{Q}}$. Ce dernier est libre sur $\mathbf{I}$, on peut donc supposer que $\rho_{\mathcal{F}}$ prend ses valeurs dans $GL_2(\mathbf{I})$ et considérer $\bar{\rho}_{\mathcal{F}}$ la représentation résiduelle correspondante; cette dernière est alors absolument irreductible. On fera l'hypothèse (Irred). On supposera également:

(Reg) $\quad (\psi_{\mathcal{F}})_p \neq \omega$

Cette dernière condition assure que le sous-module fixe par I_p est libre de rang 1 sur $\mathbf{I}$ et facteur direct dans $\mathbf{I}^2$. On considère le groupe de Selmer

$$Sel_\Sigma(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\tilde{\eta}) := Sel_\Sigma^{\tilde{\mathbf{I}}}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\tilde{\eta})$$

On note $\mathfrak{F}^\Sigma_{ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta}$ son diviseur caractéristique dans $\tilde{\mathbf{I}}$.

Soit $1_{\mathbf{I}} \in \mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})\otimes K_{\mathbf{I}}$ l'idempotent associé à $\lambda_{\mathbf{I}}$ i. e. tel que $T(n).1_{\mathbf{I}} = \lambda_{\mathbf{I}}(T(n)).1_{\mathbf{I}}$ pour tout entier n. Il induit une décomposition $\mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})\otimes K_{\mathbf{I}} = K_{\mathbf{I}}\oplus B$. Comme au 1.2.3, On définit le module de congruence de $\mathcal{F}_{\mathbf{I}}$

$$\mathfrak{C}_{\mathbf{I}} \cong \mathbf{I}/\mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})\cap\mathbf{I}$$

où l'intersection $\mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})\cap\mathbf{I}$ étant définie dans $K_{\mathbf{I}}\oplus B$ en identifiant $\mathbf{I}$ avec $\mathbf{I}\oplus 0$. Soit $R_{\mathbf{I}}$ est la composante locale de $\mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})$ correspondantà l'idéal maximal contenant le noyau de $\lambda_{\mathbf{I}}$. En utilisant les travaux de Wiles et Taylors-Wiles, Hida a montré que $R_{\mathbf{I}}$ est d'intersection complète et donc Gorenstein. D'après [Hi88b], on en déduit $\mathbf{h}(C,\psi_{\mathcal{F}})\cap\mathbf{I}$ est un idéal principal et dont on fixera $\eta_{\mathbf{I}}$ un générateur. Noter que $\eta_{\mathbf{I}}$ s'identifieà l'idéal caractéristique du groupe de Selmer $Sel^{\mathbf{I}}_{\mathbb{Q}}(ad(\rho_{\mathcal{F}}))$, un fait que nous n'utiliserons pas.De plus pour tout P arithmétique, il existe une unité p-adique $U_p(f_P)$ telle que (cf. [Hi88b]):

$$\phi_P(\eta_{\mathbf{I}}) = \frac{\eta_{f_P}}{U_p(f_P)} \tag{1.2.5.a}$$

1.3. **Fonctions L p-adiques.**

1.3.1. *Fonctions L.*. Soit f une forme primitive de conducteur N et de poids $k\geq 2$. On note $\pi(f) = \bigotimes'_v \pi_v$ la représentation cuspidale $GL_2(\mathbb{A})$ correspondante et $\widehat{\pi}(f)$ son change de baseà GL_3 construit par Gelbart-Jacquet dans [GJ]. Pour tout caractère de Dirichlet χ, soit $L^\Sigma(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,s)$ la fonction L définie par le produit Eulerien convergeant lorsque $\Re(s)>1$:

$$L^\Sigma(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,s) = \prod_{v\notin\Sigma} L(\widehat{\pi}_v\otimes\chi_v,s)$$

où lorsque ℓ ne divise pas le conducteur de f, on a:

$$L(\widehat{\pi}_\ell\otimes\chi_\ell,s) = [(1-\alpha_\ell\beta_\ell^{-1}\chi(\ell)\ell^{-s})(1-\chi(\ell)\ell^{-s})(1-\beta_\ell\alpha_\ell^{-1}\chi(\ell)\ell^{-s})]^{-1}$$

Cette dernière admet un prolongement holomorphe sur le plan complexe et satisfait une equation fonctionnelle (cf. [GJ]):

$$L(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,s) = \epsilon(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,s)L(\widehat{\pi}(f)\otimes\overline{\chi},1-s)$$

Le motif associéà $\widehat{\pi}(f)\otimes\chi$ admet comme ensemble critique $\{m\in\mathbb{Z}|m\ ou\ 1-m\in\mathcal{C}_{k,\chi}\}$ avec

$$\mathcal{C}_{k,\chi} = \{m\in\mathbb{Z}|(-1)^m = \chi(-1)\ et\ 2-k\leq m\leq 1\}$$

La conjecture de Deligne, démontrée par Sturm, établit que [St].

$$\frac{L(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,m)}{(2i)^m\pi^{m+k-1}\langle f,f\rangle} \in K_f(\chi)$$

pour tout $m\in\mathcal{C}_{k,\chi}$ et où $\langle f,f\rangle = \langle f,f\rangle_{\Gamma_0(N)}$.

Pour tout représentation galoisienne ρ sur un module V libre sur un anneau unitaire A et pour tout premier q, on note

$$\mathcal{P}_q(V,X) = det(1 - XFrob_q|_{V^{I_g}})$$

et si $\mathcal{P}_q(V,X) \in \mathbb{C}[X]$, on pose $L_q(V,s) = \mathcal{P}_g(V,q^{-s})^{-1}$. Ainsi, si ρ_f est la représentation galoisienne associéeà π, on doit avoir:

$$L_q(ad(rho_f) \otimes \eta, s) = L(\widehat{\pi}_q \otimes \eta_q, s) \tag{1.3.1.a}$$

Cela résulte du théorème de Carayol sur la compatibilité des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires avec la correspondance de langlands locale.

1.3.2. *Fonctions L p-adique de Coates-Schmidt.* Nous reprenons les conventions du 1.2.1 pour lesquelles f est ordinaire en le nombre premier impair p. On note f_0 la p-stabilisation de f. Rappelons que si $p|C(f)$ alors $f_0 = f$ et $f_0(z) = f(z) - \beta_p f(pz)$ sinon; β étant la racine de $X^2 - a(p,f)X + \psi_f(p)p^{k-1}$ de valuation p-adique positive. On pose $r = v_p(C(f))$. Il existe donc un nombre complexe $W(f)$ de module 1 tel que

$$f|_k\tau_N = W(f)f^c$$

avec $\tau_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Il se décompose canoniquement (cf. [Hi88a]) en un produit $W(f) = W'(f) \times W_p(f)$ avec

$$W_p(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_p(f) \text{ est non ramifiée} \\ -a(p,f) & \text{si } \pi_p(f) \text{ est spéciale (et donc } k=2) \\ (\psi'(p)a(p,f^c)p^{-k/2})^r G(\psi_p) & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

et $|W'(f)|_p = 1$. Suivant Hida, on pose également

$$S_p(f) = \begin{cases} (1 - \frac{\beta_p}{\alpha_p})(1 - \frac{\beta_p}{p\alpha_p}) & \text{si } \pi_p(f) \text{ est non ramifiée.} \\ -1 & \text{si } \pi_p(f) \text{ est spéciale (et donc } k=2) \\ (\psi'(p)a(p,f^c)^2p^{-k})^r & \text{si } \psi_p \text{ est non trivial.} \end{cases}$$

Pour tout charactère de Dirichlet η pair, il existe alors une fonction L p-adique $L_p(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta, S) \in K[[S]]$ telle que pour tout $m \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout caractère ϵ d'ordre fini de $1+p\mathbb{Z}_p$ de conducteur p^s, on ait:

$$\begin{aligned} L_p(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta, u^m\epsilon(u) - 1) = {} & S(f)^{-1}\Gamma(k+m-1)C(\psi_f\eta\omega^m\epsilon^{-1})^{-m+k_P-2} \\ & \times G(\psi_f\eta\omega^m\epsilon^{-1})G(\psi_f)^{-1}\psi'(p)^s \frac{L^{\{p\}}(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta\epsilon\omega^{-m}, -m)}{(2i)^{k+1}\pi^2(2i\pi)^{-m+k-3}\langle f, f\rangle} \end{aligned}$$

Soit

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_f) \otimes \eta, S) = \frac{2^{2k}(2i)^{k+1}\pi^2\langle f, f\rangle}{\Omega_f^+\Omega_f^-} \times L_p(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta, S)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(ad(\rho_f) \otimes \eta, u^m\epsilon(u) - 1) = {} & 2^{2k}S(f)^{-1}\Gamma(k+m-1)C(\psi_f\eta\omega^m\epsilon^{-1})^{-m+k-2} \\ & \times G(\psi_f\eta\omega^m\epsilon^{-1})G(\psi_f)^{-1}\psi'(p)^s \frac{L^{\{p\}}(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta\epsilon\omega^{-m}, -m)}{(2i\pi)^{-m+k-3}\Omega_f^+\Omega_f^-} \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3. *L'existence de cette fonction L p-adique est dûeà Coates-Schmidt et Schmidt dans le cas où f est non ramifiéee en p*[CS, Sch]. *Le fait que cette fonction appartienneà $O[[S]]$ est un théorème de Schmidt. Le cas général résulte de la constructionà deux variables de Hida ci-dessous* [Hi90]. *Par ailleurs, les propriétés d'interpolations dans le cas $m = 0$ sont démontrées par Dabrowski-Delbourgo pour tout caractères ϵ en associant des idées de Schmidt et de Sturm (cf.* [DD]*).*

Les conjectures suivantes sont des cas particuliers de la conjecture de Greenberg [G94] qui est une vaste généralisation des conjectures d'Iwasawa sur les corps de nombres. Dans le cas des courbes elliptiques ayant bonne réduction ordinaire en p, cette dernière est également énoncée par Coates et Schmidt [CS].

Conjecture 1.3.4. *Soit E une courbe elliptique modulaire ayant réduction ordinaire en p et telle que $ad(\overline{\rho}_E)$ soit irréductible. Soit η un caractère de Dirichlet pair. Alors le groupe de Selmer $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_E) \otimes \eta_G)$ est de co-torsion sur $\mathbb{Z}_p(\psi)[[S]]$ et on a*

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_E) \otimes \eta_G) \sim \mathfrak{F}(ad(\rho_E) \otimes \eta_G)$$

Plus généralement, on a:

Conjecture 1.3.5. *Soit f une forme modulaire primitive et ordinaire en p satisfaisant (Reg) et telle que $ad(\overline{\rho}_f)$ soit irréductible. Soit η un caractère de Dirichlet pair. Alors le groupe de Selmer $Sel_{\mathbb{Q}_\infty} ad(\rho_f)$ est de co-torsion sur $\mathbb{Z}_p(\psi)[[S]]$ et on a*

$$\mathfrak{L}(\widehat{\pi}(f) \otimes \eta) \sim \mathfrak{F}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G)$$

1.3.6. *Fonctions L p-adique de Hida à deux variables.* Soit $\mathcal{F}$ la forme $\mathbf{I}$-adique considérée dans le paragraphe 1.2.5. D'après Hida, il existe un élément $L = L(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta) \in Frac(\tilde{\mathbf{I}})$ tel que pour tout idéal arithmétique $P \subset \mathbf{I}$ de poids k_P et associéà un caractère d'ordre fini non trivial de $1 + p\mathbb{Z}_p \rightarrow$, tout entier m, $0 \leq m \leq k_P - 2$ et tout caractère d'ordre fini non trivial ϵ de $1 + p\mathbb{Z}_p$, on ait:

$$\begin{aligned}\phi_P(L)(u^m\epsilon(u) - 1) &= S(f_P)^{-1}\Gamma(k + m - 1)C(\psi_{f_P}\eta\omega^m\epsilon^{-1})^{-m+k_P-2} \\ \times G(\psi_{f_P}\eta\omega^m\epsilon^{-1})W'(f_P)G(\psi_{f_P})^{-1}\psi'_{\mathbf{I}}(p)^s &\frac{L^{\{p\}}(\widehat{\pi}(f_P) \otimes \eta\epsilon\omega^{-m}, -m)}{(2i)^{k_P+1}\pi^2(2i\pi)^{-m+k_P-3}\langle f_P, f_P\rangle}\end{aligned}$$

On pose alors

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta) = \eta_{\mathbf{I}} \times L(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta) \tag{1.3.6.a}$$

Conjecture 1.3.7. *Soit $\mathcal{F}$ une forme modulaire $\mathbf{I}$-adique ordinaire en p satisfaisant (Reg) et telle que $ad(\overline{\rho}_{\mathcal{F}})$ soit irréductible. Soit η un caractère de Dirichlet pair. Alors le groupe de Selmer $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\eta_G)$ est de co-torsion sur $\tilde{\mathbf{I}}$ et on a*

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G) \sim \mathfrak{F}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G)$$

1.3.8. *Conditions aux places divisant le niveau.* Pour tout ensemble fini Σ de nombres premiers ne contenant pas p, on pose:

$$\mathfrak{L}_\Sigma(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)=\prod_{q\in\Sigma}\mathcal{P}_q(ad(\rho_f)\otimes\eta_G,1)^{-1}$$

$$\mathfrak{L}^\Sigma(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)=\mathfrak{L}(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)\times\mathfrak{L}_\Sigma(ad(\rho_f)\otimes\chi_p\eta_G^{-1})$$

On a une définition analogue lorsqu'on remplace f par $\mathcal{F}$.

Proposition 1.3.9. *Pour tout ensemble fini Σ contenant les places de ramifications, on a:*

$$\mathfrak{F}^\Sigma(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)=\mathfrak{F}(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)\times\mathfrak{L}_\Sigma(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\chi}_p\eta_G^{-1})^{-1}$$

On a un résultat analogue pour $ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\tilde{\eta}_G$.

Preuve. Ce fait a été remarqué et utilisé dans d'autres situations par R. Greenberg. Dans le cas de $ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}_G$, c'est une conséquence de la proposition 2.3 de [GV]. Dans le cas de $ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\tilde{\eta}_G$, on peut adapter la preuve de [GV].■

On en déduit que la conjecture principale (ou une divisibilité vers celle-ci) pour $Sel^\Sigma_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta_G)$ est équivalente à celle (ou une divisibilité vers celle-ci) pour $Sel_{\mathbb{Q}_\infty}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta_G)$.

1.3.10. *Zéro trivial.* Les propriété d'interpolation des fonctions L p-adiquesà une ou deux variables montrent que ces dernières sont divisibles par l'idéal premier de $O[[S]]$ ou $\mathbf{I}[[S]]$ engendré par S lorsque $\eta(p)=1$ ou que ce dernier n'est pas un diviseur dans le cas contraire. Lorsque f est une forme de poids 2 pour $\Gamma_0(p)\cap\Gamma_1(N)$ et η est le caractère trivial, Greenberg et Tilouine ont de plus montré que

$$\frac{d}{dS}\mathfrak{L}(\widehat{\pi}(f)\otimes\eta)\Big|_{S=0}=a'(p,f)\times\eta_f$$

où $a'(p,f)$ est l'incarnation de Greenberg-Stevens de l'invariant de Mazur-Tate-Teitelbaum. On va rappeler sa définition dans les lignes qui suivent. Soit $\mathcal{F}$ la famille de Hida passant par f et $\mathbf{I}$ l'extension de $\Lambda=O[[T]]$ correspondante. Soit $R_{\mathbf{I}}$ la composante locale de l'algèbre de Hecke universelle qu'on lui a associé. Soit U une variable et considérons $R_{\mathbf{I}}$ comme une $O[[U]]$-algèbre en envoyant U sur l'opérateur de Hecke inversible $T_p\in R_{\mathbf{I}}$. Soit $d\ a(p,\mathcal{F})$, l'image de $dU\in\Omega_{O[[U]]/O}\otimes_{R_{\mathbf{I}}}\mathbf{I}$ dans $\Omega_{R_{\mathbf{I}}/O}\otimes_{R_{\mathbf{I}}}\mathbf{I}$. Par ailleurs, sous l'hypothèse (Irred), Hida a montré qu'on a une suite exacte:

$$0\to\Omega_{\Lambda/O}\otimes_{R_{\mathbf{I}}}\mathbf{I}\xrightarrow{\iota}\Omega_{R_{\mathbf{I}}/O}\otimes_{R_{\mathbf{I}}}\mathbf{I}\to Sel(ad(\rho_{\mathcal{F}}))^\wedge\to 0$$

Comme $\eta_{\mathbf{I}}$ appartientà l'annulateur de $Sel(ad(\rho_{\mathcal{F}}))^\wedge$, $\eta_{\mathbf{I}}.da(p,\mathcal{F})$ appartient Ã $\iota(\Omega_{\Lambda/O}\otimes_{R_{\mathbf{I}}}\mathbf{I})=\mathbf{I}dT$. On définit donc $J_{\mathcal{F}}\in Frac\mathbf{I}$ par

$$d\ a(p,\mathcal{F})=J_{\mathcal{F}}.dT$$

Dans [Hi98], Hida a vérifié que $J_{\mathcal{F}}\neq0$ et démontre:

(i) Si $\eta(p)=1$ on a:

$$\mathfrak{F}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta)=S.\Psi(S)\text{ avec }\Psi(0)|\eta_f.J_{\mathcal{F}}$$

(ii) Si $\eta(p) \neq 1$ alors S, n'est pas un diviseur de $\mathfrak{F}(ad(\rho_F r) \otimes \eta)$ et on a:

$$Sel(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G) \cong Sel(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G)[S]$$

Revenonsà l'invariant de Mazur-Tate-Teitelbaum. Soit $P \subset \mathbf{I}$, l'idéal arithmétique tel que $\phi_P(\mathcal{F}) = f$, alors $a'(p, f)$ est défini par

$$a'(p, f) = \phi_P(J_{\mathcal{F}})$$

Dans le cas d'une courbe elliptique modulaire ayant réduction multiplicative en p, Greenberg et Stevens montre que

$$a'(p, f) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_p(E) \text{ avec } \mathcal{L}_p(E) = \frac{log_p(q_E)}{ord_p(q_E)}$$

q_E étant la période p-adique associéeà E par $E(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \overline{\mathbb{Q}}_p^\times / q_E^{\mathbb{Z}}$. Rappelons enfin que Barré-Sirieix, Diaz, Gramain et Philibert ont démontré que $\mathcal{L}_p(E)$ transcendant sur $\mathbb{Q}$ (Théorème de St-Etienne) et en particulier, si f est associéeà une courbe elliptique multiplicative en p, on a donc :

(1.3.10.a) $$a'(p, f) \neq 0$$

1.4. **Théorèmes principaux.**

1.4.1. Soient f une forme modulaire propre ordinaire et de poids k, η un caractère de Dirichlet pair et N un entier strictement divisible par le PGCD des conducteurs de f et χ. On considère l'hypothèse suivante sur le triplet (f, η, N).

1.4.2. *Hypothèse. Il existe un corps imaginaire quadratique K et un caractère de Hecke ξ d'ordre fini de K dont la restriction à $\mathbb{Q}$ vaut $\eta\bar{\psi}_f\omega^{k-2}$ tel que les nombres premiers divisant le conducteur de ξ soient exactement ceux divisant N et tel que*

$$\left| \frac{G(\overline{\chi}\psi_f) L_K(f \otimes \xi, 1)}{\pi^2 G(\psi_f) \Omega_f^+ \Omega_f^-} \right|_p = 1$$

1.4.3. Cette hypothèse ne dépend pas que de la famille de Hida à laquelle f appartient au sens que si elle est satisfaite pour un membre de la famille, elle l'est pour tous. Cela entraine en particulier qu'elle est satisfaite pour la forme de poids 2 de cette famille. On verra que cette dernière hypothèse entraine qu'une certaine série d'Eisenstein convenablement normalisée est non nulle modulo p ce qui sera crucial pour démontrer que la fonction L p-adique divise l'idéal d'Eisenstein correspondant. Voir Corollaire 3.9.14.

D'après un théorème de N. Vatsal, cette hypothèse est satisfaite si $\eta = \eta_0$ est le caractère trivial et f provient d'un corps de quaternions indéfini. Plus précisément, on dispose du théorème suivant.

Théorème 1.4.4. *Soit f une forme ordinaire telle que $\overline{\rho}_f$ soit irréductible. On suppose en outre qu'il existe un nombre premier q tel que $\overline{\rho}_f|_{D_q}$ soit indécomposable. Alors l'hypothèse 1.4.2 est satisfaite si $\eta = \eta_0$ est le caractère trivial.*

Preuve. D'après la discussion précédente, il suffit de vérifier le théorème dans le cas du poids 2. C'est alors une conséquence immédiate des résultats de N. Vatsal [V, Cor 4.2]. On peut par ailleurs adapter la preuve du corollaire de N. Vatsal pour eviter l'hypothèse que p soit décomposé dans $\mathbb{Q}(\chi_t)$ (voir notations de loc. cit.). Son résultat est énoncé pour N sans facteur carré mais la démonstration est valable sans cette hypothèse restricitive pourvu que la formule de Gross soit établie. Or celle-ci a été générali'ee par S. Zhang dans [Z] lorsque f provient par la correspondance de Jacquet-Langlands d'une forme sur une algebre de quaternion ramifiée en q. Notons enfin que nos hypothèse sur $\overline{\rho}_f$ entraine que les constantes C_{Eis} et C_{csp} de [V] sont des unités p-adiques.■

Si on pouvait démontrer des relations de périodes entières pour le changement de base de f à $\mathbb{Q}^\eta$, la généralisation du théorème de Vatsal aux corps totalement réels entrainerait certainement cette hypothèse dans un grand nombre de situations pour des caractères η non triviaux. Malheureusement, le problème de relation entière de périodes semble très difficile. Nous avons néanmoins le corollaire suivant.

Corollaire 1.4.5. *On conserve les mêmes hypothèses que dans le thèorème prćdent. Alors l'hypothèse 1.4.2 est satisfaite si η^2 est congru à 1 modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$.*

Preuve. En remplaçant f par $f \otimes \eta$, le thòrème précédent est clairement valable lorsque η est un caractère quadratique. D'après notre hypth'ese, η est congru à un caractère quadratique η' modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$. Soit alors ξ' le caractère de Hecke de K satisfaisant l'hypothèse 1.4.2 pour η'. Alors il existe $\xi \cong \xi' \pmod{\mathrm{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}}$ tel que la restriction de ξ' à $\mathbb{Q}$ soit égale à $\eta\overline{\psi}_f\omega^{k-2}$ et on a la relation de congruence

$$\frac{G(\overline{\chi}\psi_f)L_K(f\otimes\xi,1)}{\pi^2 G(\psi_f)\Omega_f^+\Omega_f^-} \equiv \frac{G(\overline{\chi}\psi_f)L_K(f\otimes\xi',1)}{\pi^2 G(\psi_f)\Omega_f^+\Omega_f^-} \pmod{\mathrm{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}}.$$

L'hypothèse 1.4.2 est donc satisfaite pour η.■

On considère l'hypothèse simplificatrice supplémentaire suivante.

1.4.6. *Hypothèse. Soit $\overline{\eta}$ la réduction de η modulo l'ideal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$, alors p est totalement décomposé dans l'extension abélienne de $\mathbb{Q}(\overline{\eta})$ fixé par le noyau de $\overline{\eta}$.*

Le théorème 1.4.7 ci-dessous sera prouvée dans la section 4.5.2.

Théorème 1.4.7. *On suppose que l'hypothèse 1.4.2 est satisfaite. Soit $\mathcal{F}$ une famille de Hida telle que $ad(\overline{\rho}_{\mathcal{F}})$ soit absolument irréductible et η un caractère de Dirichlet pair et non ramifié en p. On suppose qu'il existe un nombre premier q tel que $\overline{\rho}_{\mathcal{F}}|_{D_q}$ soit indécomposable. Il existe un ensemble Σ contenant les premiers de ramifications de $\mathcal{F}$ et η, on a la divisibilité*

$$\mathfrak{L}^\Sigma(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta_G) \mid \mathfrak{F}^\Sigma(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\eta_G)$$

dans $\tilde{\mathbf{I}}[1/S]$.

Combiné avec la proposition 1.3.9, le théorème 1.4.7 entraine immédiatement le theorème suivant.

Théorème 1.4.8. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de Hida telle que $ad(\overline{\rho}_{\mathcal{F}})$ soit absolument irréductible et η un caractère de Dirichlet pair satisfaisant les hypothèses 1.4.2 et 1.4.6. Alors, on a la divisibilité suivante dans $\tilde{\mathbf{I}}[1/S]$:*

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G) \mid \mathfrak{F}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G)$$

Pour une forme modulaire ordinaire individuelle, on a également le

Théorème 1.4.9. *Soit f une forme modulaire telle que $ad(\overline{\rho}_f)$ soit absolument irréductible et η un caractère de Dirichlet pair satisfaisant les hypothèses 1.4.2 et 1.4.6. Alors, on a la divisibilité suivante dans $\mathbb{Z}_p[[S]][1/S]$:*

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G) \mid \mathfrak{F}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G)$$

1.4.10. *Preuve du théorème 1.4.9.* Soit Σ l'ensemble fini de nombres premiers du Théorème 1.4.7. D'après la proposition 1.3.9, il suffit de prouver que l'on a la divisibilité suivante dans $\mathbb{Z}_p[[S]][1/S]$:

$$\mathfrak{L}^{\Sigma}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G) \mid \mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G)$$

Puisque toute forme modulaire ordinaire est un membre d'une famille de Hida, il suffit de démontrer que pour tout idéal premier arithmétique $P \subset \mathbf{I}$, on a

$$\phi_P(\mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G)) | \mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_{f_P}) \otimes \eta_G)$$

D'apres le (1.1.4.a) appliqué au cas $A = \tilde{\mathbf{I}}$ et $B = \tilde{\mathbf{I}}/P\tilde{\mathbf{I}}$, cela résulte du lemme suivant.

Or ceci est un cas particulier du lemme suivant:

Lemme 1.4.11. *Avec les notations précdentes, on a :*

$$Sel_{\Sigma}^{O_P[[S]]}(ad(\rho_{f_P}) \otimes \tilde{\eta}_G) \cong Sel_{\Sigma}^{\tilde{\mathbf{I}}}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G)[P]$$

Preuve. Cela résulte aisément de l'interprétation du groupe de Selmer adjoint comme le dual de Pontrjagin d'un module des differentielles de Kahler de l'anneau des déformations ordinaires universelle de $\overline{\rho}_{\mathbf{I}}|_{G_{\Sigma,F_\infty}}$ avec F_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps totalement réel fixé par le noyau de η_G et G_{Σ,F_∞}) le groupe de Galois de l'extension maximale de F_∞ non ramifiée hors de $\Sigma \cup \{p\}$. Voir [Hi98].∎

Théorème 1.4.12. *Soit f une forme modulaire ordinaire en p telle que $ad(\overline{\rho}_f)$ soit absolument irréductible. On suppose qu'il existe un nombre premier q tel que $\bar{\rho}_f|_{D_q}$ soit indécomposable. Alors, on a la divisibilité suivante dans $O[[S]][1/S]$:*

$$\mathfrak{L}(ad(\rho_f)) \mid \mathfrak{F}(ad(\rho_f))$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème 1.4.9, du théorème 1.4.4, avec $\eta = \eta_0$ le caractère trivial.∎

1.4.13. *Formes de poids* 2 *de type spéciale en* p. On se place dans les conditions du théorème 1.4.12 avec f une forme de poids 2.

D'après le 1.3.10, on sait que $S = 0$ est un zéro d'ordre 1. Si Ψ_L et Ψ_F désignent le quotient des deux séries caractéristiques $\mathfrak{F}(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)$ et $\mathfrak{L}(ad(\rho_f)\otimes\eta_G)$ par S, on a $\Psi_F = \Psi_L\times A$ pour $A \in O[[S]]$. D'après le paragraphe 1.3.10, on a $\Psi_F(0) = a'(p,f)A(0)\eta_f|a'(p,f)\eta_f$. Comme $a'(p,f) \neq 0$ si l'on suppose que le zéro trivial de $\mathfrak{L}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G)$ est d'ordre 1, on en déduit que $A(0)$ et donc A sont des unités. Le théorème B de l'introduction est donc démontré.

1.4.14. *Remarque.* Si la forme f est de poids 2 et niveau N sans facteur carré et de nebentypus trivial, alors elle satisfait les hypothèses du théorème 1.4.4. En effet, s'il n'existait pas de nombre premier q tel que $\bar{\rho}_f|_{D_q}$ soit indécomposable, par un théorème de Ribet cela entrainerait qu'il existe une forme modulaire de poids 2 et niveau 1 congrue à f modulo p. Or on sait que de telles formes n'existent pas.

1.4.15. *Cas des courbes elliptiques.* Soit E une courbe elliptique satisfaisant les hypothèses du théorème A de l'introduction et soit f la forme modulaire primitive correspondante. D'après la relation de période (1.2.4.a), on sait que $\mathfrak{L}(ad(\rho_E) \otimes \eta_G) \sim \mathfrak{L}(ad(\rho_f) \otimes \eta_G)$. Le théorème A de l'introduction résulte donc du théorème B et de (1.3.10.a).

2. Formes modulaires de Siegel

2.1. Schémas de Siegel.

2.1.1. Soient p un nombre premier impair, $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localisation de $\mathbb{Z}$ en p et $\mathbb{Z}_{(p)}-\mathrm{Sch}$ la catégorie des schéma sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Pour tout sous-groupe ouvert compact

$$K = GSp_{2g}(\mathbb{Z}_p).K^p \subset GSp_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$$

que l'on supposera assez petit dans tout l'article (i. e. tel que $K \cap GSp_{2g}(\mathbb{Q})$ ne contienne pas d'éléments d'ordres finis non trivial), on considère $\mathcal{M}_{g,K}/_{\mathbb{Z}_{(p)}}$, le schéma de Siegel sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ classifiant pour tout objet S de $\mathbb{Z}_{(p)}-\mathrm{Sch}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de triplets $(A_{/S}, \lambda, \alpha)$ où $A \to S$ est un schéma abelien sur S de dimension relative g, λ est une polarisation principale et α un isomorphisme de schémas en groupes $\prod'_\ell V_\ell(A)_{/S} \cong (\mathbb{A}_f)^{2g}_{/S}$ mod K lorsqu'on munit $(\mathbb{A}_f^p)^{2g}$ de la structure symplectique définie par ι_g . L'existence de ce schéma nous vient des travaux de Mumford. Il est lisse et de dimension relative $g(g+1)/2$.

On dira qu'un schéma sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un schéma de Siegel de genre g et niveau premierà p, s'il existe K tel que ce schéma soit isomorpheà $\mathcal{M}_{g,K}$.

2.1.2. *Uniformisation complexe.* Soit $\mathcal{H}_g = \{z \in M_g(\mathbb{C}) | {}^t z = z,\ \ Im(z) > 0\}$ le demi-espace de Siegel de genre g. Pour $\gamma \in GSp_{2g}$, on écrit γ par blocs $\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix}$ et pour tout $z \in \mathcal{H}_g$, on pose

$$\gamma.z = (a_\gamma z + b_g)(c_\gamma z + d_\gamma)^{-1}$$

On a $\mathcal{M}_{g,K}(\mathbb{C}) = GSp_{2g}(\mathbb{Q})^+ \backslash \mathcal{H}_g \times G(\mathbb{A}_f)/K$ et la classe d'un élément $z \in \mathcal{H}_g$ représente le couple (A_z, α_z) où A_z désigne la variété abelienne $A_z = \mathbb{C}^g/z.\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g$ et α_z est l'isomorphisme induit par les isomorphismes canoniques $A_z[N] = 1/N.\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \oplus z/N.\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \cong 1/N.\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \oplus 1/N.\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ pour tous les entiers $N > 0$.

2.1.3. *Le faisceau ω.* Pour $T = \mathcal{M}_{g,K}$ le schéma de Siegel de genre g et niveau K, soit $\pi : \mathcal{A}_{g,K/T} \to T$ le schéma abelien universel principalement polarisé de dimension relative g au dessus de T. On rappelle que le faisceau inversible ω habituel est défini par

$$\omega_{/T} = \Lambda^g(Lie(\mathcal{A}_{g,K})_{/T})^{-1}$$

2.2. Compactifications des Schémas de Siegel.

2.2.1. *Schémas semi-abelien.* Soit R un anneau normal noetherien excellent et complet pour un ideal $I = Rad(I)$ de corps des fractions K. Soient $S = Spec(R)$ et $S_0 = Spec(R/I)$. Soit (A, λ) un schéma abelien sur S muni d'une polarisation principale λ au moyen de laquelle on va identifier A avec le schéma dual $Pic^\circ(A)_{/S}$. Soit X un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini de $\mathbb{Z}$-dual X^* et soit $T = X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m/S}$de sorte que le groupe des caractères de T s'identifie canoniquement à X. On fixe $c : X_{/S} \to A_{/S}$ et on note G le schema semi-abelien sur S defini par c (cf.[Ch, II.2]). On a donc sur S:

$$0 \to T_{/S} \to G_{/S} \to A_{/S} \to 0$$

Une donné de dégénéréscence sur A est un quadruplet (A, X, c, ι) où ι, l'application de période est un morphisme $X \to G(K)$ au dessus de c. ι détermine une trivialisation de la bi-extension $(c \times c)^*\mathcal{P}$ sur $X \times X$ et on suppose que cette dernière vérifie la condition de positivité $\phi(x, x) \in I$ pour tout $x \in X$ où ϕ est la forme bilinéaire symétrique sur X définie par la trivialisation. A une telle donnée, par la construction de Mumford, on associe un schéma semi-abelien $\mathcal{G} \to S$ de complétion formelle le long de S_0 isomorpheà G.

Cette construction est fonctorielle et détermine une équivalence entre la catgorie des données de dégénéréscence et celle des schéma semi-abelien sur $Spec(R)$ dont la fibre génerique est une variété abelienne sur K et dont le *pull-back*à R/I est une extension d'une variété abelienne sur R/I par un tore déployé (cf. [CF]). De plus pour tout entier M (pas necessairement inversible dans R), on a la suite exacte sur les points de torsion [CF, III.5.11]:

$$0 \to G[M]_{/\kappa(s)} \to \mathcal{G}[M]_{/\kappa(s)} \to (X/M.X)_{/\kappa(s)} \to 0 \tag{2.2.1.a}$$

pour tout $s \in S$.

2.2.2. *Compactifications de $Y = \mathcal{M}_{g,K/\mathbb{Z}_{(p)}}$.* Pour tout $\mathbb{Z}$-module libre M, on note $C(M)$ (resp. $C(M)^\circ$) le cône des des formes bilinéaires symétriques positives (resp. définies positives.) sur $M \otimes \mathbb{R}$. Soit $\{\sigma_\alpha\}$ une décomposition $GL_g(\mathbb{Z})$-admissible lisse en cônes polydraux de $C(\mathbb{Z}^g)$ (i.e. une collection de cÃ´nes recouvrant $C(\mathbb{Z}^g)$ stable sous l'action canonique de $GL_g(X)$ et vérifiant certaines conditions de compatibilité cf. [CF, IV.2]). A une telle collection, on peut associer $\overline{\mathcal{M}}_{g,K}$ une compactification toroidale de $\mathcal{M}_{g,K}$ sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Pour $K = K(N) = ker(GSp_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to GSp_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$, avec le notation de [CF, IV], $\overline{\mathcal{M}}_{g,K(N)}$ s'obtient par restriction des scalaires à la Weil de $\overline{\mathcal{A}}_{g,N/\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_N]}$. Pour K quelconque maximal en p, on choisit N premierà p tel que $K \supset K(N)$. L'action de $K/K(N)$ sur le champs algébrique $\overline{\mathcal{M}}_{g,K(N)}$ défini une relation d'équivalence étale. On peut donc considérer le quotient et poser $\overline{\mathcal{M}}_{g,K} = \overline{\mathcal{M}}_{g,K(N)}/(K/K(N))$.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur K, on posera $Y = \mathcal{M}_{g,K}$ et $\overline{Y} = \overline{\mathcal{M}}_{g,K}$. De plus, comme K est choisi assez petit, $\overline{Y}$ est un espace algébrique [CF, IV.6.9]. Il est muni d'un schéma semi-abelien $\mathcal{G} \to \overline{Y}$. Pour un choix convenable d'éventail $\{\sigma_\alpha\}$ que nous faisons une fois pour toute, $\overline{Y}$ est un schéma projective lisse sur $\mathbb{Z}_{(p)}$.

2.2.3. Soit $\pi : \mathcal{G} \to \overline{Y}$ le morphisme structural de $\mathcal{G}_{/\overline{Y}}$. Le faisceau inversible $\omega_{/\overline{Y}} = \Lambda^g(Lie(\mathcal{G}))^{-1}$ sur $\overline{Y}$ prolonge le faisceau ω défini sur Y. Suivant [CF, V], on pose

$$Y^* = Proj(\bigoplus_{k \geq 0} H^0(\overline{Y}, \omega^{\otimes k}))$$

C'est la compactification minimale définie sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Le morphisme propre canonique $f : \overline{Y} \to Y^*$ est à fibres géométriquement connexes. Le faisceau $\omega_{/Y^*} := f_*\omega_{\overline{Y}}$ est inversible, ample sur Y^* et prolonge le faisceau ω que nous avions défini sur Y.

2.2.4. *Composantes rationelles de Y^*.* Le bord $\partial Y^* = Y^* - Y$ est une réunion finie de schémas de Siegel de genre strictement plus petit que g appelés composantes rationelles et qui sont des sous-schémas localement fermés de Y^*.

Soient $Z \subset Y^*$ une composante rationelle et $Spf(R)$ un sous-schéma formel affine de la complétion formelle de $\overline{Y}$ le long de $f^{-1}(Z)$. Soient $S = Spec(R)$ de point générique η et $\mathcal{G}_{/S}$ le pull-back à S du schéma semi-abélien sur $\overline{Y}$. En désignant par TX le module de Tate d'un schéma semi-abélien X sur un corps, on a d'après (2.2.1.a):

$$0 \to TG_\eta \to T\mathcal{G}_\eta \to \widehat{\mathbb{Z}}^s_\eta \to 0 \text{ et } 0 \to \widehat{\mathbb{Z}}^s(1)_\eta \to TG_\eta \to TA_\eta \to 0.$$

oú G désigne l'extension de Raynaud correspondantà $\mathcal{G}_{/S}$ et A la partie abélienne de G. On a donc une filtration de $T\mathcal{G}_\eta$:

$$T\mathcal{G}_\eta \supset TG_\eta \supset \widehat{\mathbb{Z}}^s(1)_\eta \tag{2.2.4.a}$$

Par la structure de niveau universelle, on a un isomorphisme $\alpha : \mathbb{Q} \otimes T\mathcal{G}_\eta \cong \mathbb{A}_f^{2g}$ mod K. Soit P_Z le stabilisateur dans $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ de l'image par α de la filtration (2.2.4.a). Il existe $g_Z \in GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ tel que $P_Z = g_Z P_{r,s} g_Z^{-1}$ et la classe $[g_Z]$ de g_Z dans

$$C_s(K) = K\backslash GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)/P_{r,s}(\mathbb{A}_f)$$

est bien définie; de plus $Z \mapsto [g_Z]$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes rationelles de Y^* et $C_s(K)$. Par abus de notations, on identifiera ainsi $C_s(K)$ avec l'ensemble des composantes rationelles de genre s de Y^*. Pour tout $Z \in C_s(K)$, soit $K_Z = \pi_s(g_Z^{-1} K g_Z \cap P_{r,s})$, alors on a un isomorphisme canonique $Z \cong \mathcal{M}_{s,K_Z}$.

Remarque: Pour tout sous-groupe de congruence $\Delta \subset Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, on pose aussi $C_s(\Delta) = \Delta\backslash Sp_{2g}(\mathbb{Z})/P_{r,s}(\mathbb{Z})$ et $\Delta_Z = \pi_s(g_Z^{-1}\Delta g_Z \cap P_{r,s})$. Quand $\nu(K) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$, on a donc canoniquement $C_s(\Delta) \cong C_s(K)$ avec $\Delta = K \cap Sp_{2g}(\mathbb{Z})$

2.2.5. Soit X_Z le facteur direct totalement isotrope de rang r de $\mathbb{Z}^{2g}$ stabilisé par le parabolique P_Z, $\{\sigma\}$ induit une décomposition $\{\tau\}$ de $C(X_Z)$. Soient $E_Z = Sym^2(X_Z)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$. Pour tout $\tau \in C(X_Z)$, de la décomposition, on a un plongement torique affine

$$E_Z = Spec(\mathbb{Z}[Sym^2(X_Z)]) \hookrightarrow E_Z\{\tau\} = Spec(\mathbb{Z}[Sym^2(X_Z) \cap \tau^\vee]).$$

Ces derniers se recollent en un plongement $E_Z \hookrightarrow \overline{E_Z}$ sur lequel E_Z opère. On note W_Z la réunion des E_Z-orbites correspondant aux cônes contenus dans $C(X_Z)^\circ$.

Soit $\mathcal{A}_{s,K_Z}$ la variété abélienne universelle de dimension relative s sur $\mathcal{M}_{s,K_Z}$ et soit $\mathcal{P}$ le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{A}_{s,K_Z} \times \mathcal{A}_{s,K_Z}$ (on a identifié $\mathcal{A}_{s,K_Z}$ avec son dual par la polarisation principale). Soient $S_Z = Hom(X_Z, \mathcal{A}_{s,K_Z})$ $(\cong (\mathcal{A}_{s,K_Z})^r)$ et $c : X_{Z/S_Z} \to \mathcal{A}_{s,K_Z/S_Z}$ le morphisme tautologique défini sur S_Z. D'après [Ch, II.2], c détermine un schéma semi-abelien universel de rang torique $r = rg\ X_Z$ sur S_Z:

$$0 \to T_Z \to G_Z \to \mathcal{A}_{s,K_Z} \to 0$$

avec $T_Z = X_Z \otimes \mathbb{G}_m$.

Si $\mu \in X_Z$, on note $[\mu]$ le morphisme d'évaluation at μ

$$S_Z = Hom(X_Z, \mathcal{A}_{K_Z}) \to \mathcal{A}_{K_Z}$$

Pour tout $\mu \otimes \nu \in X_Z \otimes X_Z$, on note $c(\mu \otimes \nu)$, le morphisme $S_Z = Hom(X_Z, \mathcal{A}_{K_Z}) \to \mathcal{A}_{K_Z} \times \mathcal{A}_{K_Z})$ défini par $[\mu] \times [\nu]$. Par bilinéarité, on obtient un morphisme $c(n)$ pour tout $n \in X_Z \otimes X_Z$. Suivant [CF], on peut définir Ξ_Z le E_Z-torseur sur S_Z défini par $\prod_i c(n_i)^* \mathcal{P}^\times$ avec n_i une base de $Sym^2(X_Z)$.

Soit $\mathcal{S}_Z$ la complétion formelle de $\overline{\Xi}_Z = \Xi \times_{E_Z} \overline{E_Z}$ le long de $\Xi_Z \times^{E_Z} W_Z$. Pour tout sous-schéma formel affine $Spf(R) \subset \mathcal{S}_Z$, on obtient ainsi, une donné de dégénéréscence $(G_Z, c, \iota :\ X_Z \hookrightarrow (G_Z)_\eta)$ sur $S = Spec(R)$ où ι est définie par la trivialisation canonique de $(c \times c)^* \Xi_Z$.

Par la construction de Mumford, on obtient un schéma semi-abelien $\mathcal{G}_Z \to \mathcal{S}_Z$. Soit

$$\Gamma_Z := \gamma_Z \pi_r' (\gamma_Z^{-1} \Delta \gamma_Z \cap P_{r,s}) \gamma_Z^{-1} \subset GL(X_Z) \tag{2.2.5.a}$$

avec π_r' la projection canonique de $P_{r,s}$ sur GL_r.

Alors $\mathcal{S}_Z/\Gamma_Z$ (resp. $G_Z \to \mathcal{S}_Z$) s'identifieà la complétion formelle de $\overline{Y}$ (resp. $\mathcal{G} \to \overline{Y}$) le long de $f^{-1}(Z)$. De plus, pour tout $S = Spf(R) \subset \mathcal{S}_Z$, on a:

$$\mathcal{G} \times_{\overline{Y}} S \cong \mathcal{G}_Z \times S.$$

2.2.6. *Structure de niveau en p.* On fixe $K = GSp_{2g}(\mathbb{Z}_p).K^p \subset GSp_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ assez petit et on pose $Y = \mathcal{M}_{g,K}$ dont on note $\underline{Y}$ le foncteur sous-jacent sur $\mathbb{Z}_{(p)}-$Sch. Pour tout entier positif m, on considère le foncteur $\underline{Y}_{0,m}(S)$ défini par: $\forall S \in \mathbb{Z}_{(p)} - Sch$, $\underline{Y}_{0,m}(S)$ est l'ensemble des classes d'équivalences des quadruplets $(A_{/S}, \lambda, \alpha, F_\bullet)$ tel que $(A_{/S}, \lambda, \alpha) \in \underline{Y}^g(S)$ et $F_\bullet$ est une filtration de sous-schemas en groupes finis et plats sur S de $A[p^m]_{/S}$ totalement isotropes pour l'accouplement de Weil:

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_g \subset A[p^m]$$

tels que pour tout i, $1 \geq i \geq g$, F_i/F_{i-1} soit un schéma en groupes isomorphe à μ_{p^n}. Etant donné une telle filtration, on note $Gr(F_\bullet)$ son gradué $\oplus_l F_l/F_{l-1}$ et on définit $\underline{Y}_{1,m}(S)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphie de quintuplets $(A_{/S}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta)$ où $(A_{/S}, \lambda, \alpha, F_\bullet) \in \underline{Y}_{0,m}(S)$ et oú β désigne un isomorphisme de $Gr(F_\bullet)$ avec $\mu_{p^n}^g$. On appellera $F_\bullet$ (resp. $(F_\bullet, \beta)$) une $\Gamma_0(p^m)$- (resp. $\Gamma_1(p^m)$-) structure de niveau de type multiplicative. La raison de cette terminologie peut se comprendre par la description complexe analytique suivante. Soit $\Gamma_0(p^m) \subset Sp_{2g}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe des matrices γ telles que $c_\gamma \equiv 0$ modulo p^m et d_γ modulo p^m soit triangulaire supérieure et $\Gamma_1(p^m) \subset \Gamma_0(p^m)$ le sous-groupe des matrices dont les éléments de la diagonale sont congrusà 1 modulo p^m. Alors on a

$$Y_{t,m}(\mathbb{C}) = GSp_{2g}(\mathbb{Q})^+ \backslash \mathcal{H}_g \times G(\mathbb{A}_f)/\Gamma_t(p^m).K^p$$

Les schémas $Y_{t,m}$ sont lisses sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ et le foncteur d'oubli $(A_{/S},\lambda,\alpha,F_\bullet)\mapsto(A_{/S},\lambda)$ définit un morphisme quasi-fini $Y_{t,m/\mathbb{Z}_{(p)}}\to Y_{/\mathbb{Z}_{(p)}}$ qui est fini en fibre générique mais qui ne l'est pas en fibre spéciale. Par contre, on peut facilement vérifier que le foncteur d'oubli $(A_{/S},\lambda,\alpha,F_\bullet,\beta)\mapsto(A_{/S},\lambda,F_\bullet)$ définit un morphisme galoisien fini $\phi\ :\ Y_{1,m}\to Y_{0,m}$. Soit $T=T_g$ le tore diagonal de Sp_{2g}, on a

$$\mathcal{T}_{p^m}=\Gamma_0(p^m)/\Gamma_1(p^m)\cong T_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\cong((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times)^g$$

et l'action evident de $\mathcal{T}_{p^m}$ sur le foncteur $\underline{Y}_{1,m}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{T}_{p^m}$ sur le groupe de Galois du revêtement $Y_{1,m}\to Y_{0,m}$.

Pour $t=0,1$, on définit $\overline{Y}_{t,m}$ (resp. $Y^*_{t,m}$ comme la normalisation de $\overline{Y}$ (resp. Y^*) dans $Y_{t,m}$. Ces schémas ne sont pas propres sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Seuls leurs fibres génériques le sont.

2.3. **Formes modulaires.**

2.3.1. *Définition modulaire.* Le faisceau ω sur les schémas $Y_t(p^m)$, $\overline{Y}_t(p^m)$ et $Y^*_t(p^m)$ est défini par *pull-back* du faisceau ω sur Y, $\overline{Y}$ et Y^*.

Soit $\underline{k}=(k_1,\dots,k_g)\in\mathbb{Z}^{g,+}$ l'ensemble des suites d'entiers $\underline{k}=(k_1,\dots,k_g)$ telles que $k_1\geq k_2\geq\dots\geq k_g$ un poids dominant pour GL_g par rapport à la paire de Borel standard. On note $R_{\underline{k}}(A)$ la representation algebrique duale de la representation irreductible de $GL_g(A)$ de plus haut poids $\underline{k}$ que l'on identifie avec le caractère du tore diagonale de GL_g défini par $diag(t_1,\dots,t_g)\mapsto t_1^{k_1}t_2^{k_2}\dots t_g^{k_g}$. On note $(\rho_{\underline{k}}$ l'homomorphisme correspondant de $GL_g(A)\to GL_A(R_{\underline{k}}(A))$. Si b désigne une matrice triangulaire supérieure de $GL_g(A)$, on note $b^{\underline{k}}$ l'image par le caractère $\underline{k}$ de la partie diagonale de b. On peut realiser $R_{\underline{k}}(A)$ comme l'induction algébique du caractère $\underline{k}$ et l'évaluation en l'identité $f\mapsto f(1)$ fournit un morphisme canonique $\phi_{\underline{k}}:\ R_{\underline{k}}(A)\to A$ tel que $\phi_{\underline{k}}(b.f)=b^{\underline{k}}.\phi_{\underline{k}}(f)$.

On considère le faisceau automorphe $\omega^{\underline{k}}$ sur $\overline{Y}$ défini par le produit contracté

$$\omega_{\underline{k}}:=\mathcal{TR}\times^{GL_g}R_{\underline{k}}$$

où $\mathcal{TR}$ désigne le GL_g torseur sur Y défini par $\mathcal{TR}:=\underline{Isom}_{\overline{Y}}(Lie\mathcal{G}^\vee,O^g_{\overline{Y}})$. Rappelons que le produit contracté est le produit quotienté par la relation déquivalence $(g.\phi,v)\sim(\phi,g.v)$ pour tout $g\in GL_g$.

Pour tout caractère ψ de $\mathcal{T}_{p^m}$, soit $\omega_{\underline{k},\psi}$ le sous-faisceau sur $Y_0(p^m)$ de $\phi_*\omega^{\underline{k}}\otimes_O O[\zeta_{p^m}]$ des sections se transformant par ψ sous l'action de $\mathcal{T}_{p^m}$.

Soit $\Delta=Sp_{2g}(\mathbb{Z})\cap K$ et $\Delta_t(p^m)=\Delta\cap\Gamma_t(p^m)$. Soit $m\geq 0$ on va définir des espaces de formes modulaires de niveau $\Delta_t(p^m)$ avec la convention que pour $m=0$, $\Delta_t(p^m)=\Delta$ et

$Y_{t,m} = Y$. On suppose[3] $g \geq 2$. Pour tout $\mathbb{Z}_{(p)}$-module A, on pose[4]

$$\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A) := H^0(Y_{t,m}, \omega_{\underline{k}} \otimes A)$$

Si ψ est un caractère de $\mathcal{T}_{p^m}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et A un $\mathbb{Z}_{(p)}[\psi]$-module, on définit $\mathbf{M}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A)$ de façon similaire à l'aide du faisceau $\omega_{\underline{k},\psi}$.

Il est important de remarquer que si p est diviseur de zéro dans A et $m > 0$, $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A)$ n'est pas de type fini sur A. Cela est en partie dû au fait que $Y_{t,m}$ n'es pas fini sur Y en fibre spéciale.

Soit D_∞ le diviseur à l'infini de $\overline{Y}_t(p^m)$, alors l'espace des formes cuspidales est défini pour tout anneau A dans lequel p n'est pas un diviseur de zéro par

$$\mathbf{S}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A) := \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A) \cap H^0(\overline{Y}_{t,m}, \omega^k(-D_\infty) \otimes A[\frac{1}{p}])$$

et $\mathbf{S}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A) = \mathbf{S}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A) \cap \mathbf{M}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A)$.

Une forme modulaire $f \in \mathbf{M}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A)$ est donc une fonction sur les sixtuplets $(X_{/B}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, (\omega_1, \ldots, \omega_g))$ où X est une variété abelienne sur B une A-algèbre, λ une polarisation principale, α une structure de niveau pour Δ, $F_\bullet$ une filtration de $X[p^m]$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de $H^0(X, \Omega_{X/B})$ telle que pour tout $h \in GL_g(B)$

$$f(X_{/B}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, h.(\omega_1, \ldots, \omega_g)) = \rho_{\underline{k}}(h^{-1}).f(X_{/B}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, (\omega_1, \ldots, \omega_g))$$

et pour tout $\gamma \in \Gamma_0(p^m)$,

$$f(X_{/B}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \gamma \circ \beta, (\omega_1, \ldots, \omega_g)) = \psi([\gamma])f(X_{/B}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, (\omega_1, \ldots, \omega_g))$$

$[\gamma]$ désignant la classe de γ dans $\mathcal{T}_{p^m}$ et où on note $g \circ \beta$ l'isomorphisme composé $gr(F_\bullet) \to \mu_{p^m}^g \xrightarrow{x} \mu_{p^m}^g$ la dernière flèche étant définie par $(t_1, \ldots, t_g) \mapsto (t_1^{x_1}, \ldots, t_g^{x_g})$ pour tout $x = \mathrm{D}iag(x_1, \ldots, x_g) \in \mathcal{T}_{p^m}$ et $(t_1, \ldots, t_g) \in \mu_{p^n}^g$. Lorsque $m = 0$, on oublie $F_\bullet$, β et la condition précédente.

2.3.2. *Uniformisation complexe.* Rappelons la définition classique des formes modulaires de Siegel sur $\mathbb{C}$. Soit

$$j(\gamma, z) = (c_\gamma z + d_\gamma) \in GL_g(\mathbb{C})$$

le facteur d'automorphie habituel au moyen duquel on définit le faisceau inversible ω sur $\mathcal{M}_{g,K}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_g/\Delta$. Pour tout entier $k \geq 1$ et pour f une fonctionà valeurs complexes définie sur $\mathcal{H}_g$, on pose

$$(f|_{\underline{k}}\gamma)(z) = \nu_g(\gamma)^{(\sum_{i=1}^g k_i)/2} \rho_{\underline{k}}(j(\gamma, z))^{-1} f(\gamma.z)$$

[3]Lorsque $g = 1$, il faut rajouter une condition d'holomorphie aux pointes non ramifiées en p dans les définitions ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur aux articles de Hida sur GL_2 pour les définitions correspondantes.

[4]Lorsque p n'est pas dans l'annulateur de A, on pourrait vérifier que $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A)$ est le sous-espace de $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_t(p^m), A[\frac{1}{p}])$ des formes dont le q-développement est à coefficients dans A.

et pour Δ un sous-groupe de congruence de $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Delta,\mathbb{C})$ est l'espace des fonctions f holomorphes sur $\mathcal{H}_n$ telles que

$$f|_{\underline{k}}\gamma = f$$

pour tout $\gamma \in \Delta$. Dans le cas elliptique (i.e. $g = 1$), on exige en plus que f soit holomorphic aux pointes. Ce qui est équivalent à dire que *pour tout* $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $(f|_{\underline{k}}\gamma)(z)$ *est bornée quand* $\Im(z) \to \infty$.

Pour tout caractère ψ de $\mathcal{T}_{p^m}$ et tout sous-groupe arithmétique Δ de $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$. Alors $\mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m),\mathbb{C})$ est le sous-espace de $\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Delta_1(p^m),\mathbb{C})$ des formes modulaires satisfaisant:

$$f|_{\underline{k}}\gamma = \psi([\gamma])f \qquad \forall\gamma \in \Delta_0(p^m)$$

$[\gamma]$ désignant la classe de γ dans $\mathcal{T}_{p^m}$ via $\Delta_0(p^m)/\Delta_1(p^m) \cong \Gamma_0(p^m)/\Gamma_1(p^m) \cong \mathcal{T}_{p^m}$.

2.3.3. *Définition adélique.* Soit $f \in \mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m),\mathbb{C})$, on considère la fonction $f_{\mathbb{A}}$ sur $GSp_{2g}(\mathbb{A})$ à valeurs dans $R_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ définie par

$$f_{\mathbb{A}}(\gamma g_\infty k_f) = \psi([k_f])^{-1}(f|g_\infty)(\mathbf{i})$$

avec $\gamma \in GSp_{2g}(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in GSp_{2g}(\mathbb{R})^+$ et $k_f \in \Gamma_0(p^m).K^p \subset GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$. Alors $f_{\mathbb{A}}$ vérifie les propriétés suivantes:

a) $f_{\mathbb{A}}(\gamma g) = f_{\mathbb{A}}(g)$ pour tout $\gamma \in GSp_{2g}(\mathbb{Q})$.
b) $f_{\mathbb{A}}(gk_\infty) = \rho_{\underline{k}}(j(k_\infty,\mathbf{i}))^{-k} f_{\mathbb{A}}(g)$ pour tout $k_\infty \in K_\infty$.
c) $f_{\mathbb{A}}(gu_f) = \psi([k_f])^{-1} f_{\mathbb{A}}(g)$ pour tout $k_f \in \Gamma_0(p^m).K^p$.

Lorsque $f_{\mathbb{A}}$ engendre sous $GSp_{2g}(\mathbb{A})$ une représentation cuspidale, cette dernière est unitaire.

2.3.4. *Coefficients de Fourier.* Soient $S_g \subset Sym^2(\mathbb{Q}^g)$ l'ensemble des matrices $g\times g$ symétriques $h = (h_{i,j})_{1\leq i,j\leq g}$ telles que $(2-\delta_{i,j})h_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tout i et j et $S_g^+ = S^+$ le sous-ensemble de S_g^+ des matrices définies semi-positives. Pour toute forme modulaire $f \in \mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Delta)$, on peut développer f en série de Fourier:

$$f(z) = \sum_{h\in S_g^+} c(h,f)\mathbf{e}(hz)$$

pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_g$ où pour toute matrice complexe x de taille $n \times n$, on a posé

$$\mathbf{e}(x) = e^{2i\pi tr(x)}$$

On récupère ainsi un plongement $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Gamma)$ dans $\mathbb{C}[[q^S]] \otimes R_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ via $f \mapsto \sum_{h\in S} c(h,g)q^h$. Pour tout sous-anneau A de $\mathbb{C}$, on a:

$$\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Delta, A) = \mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Delta) \cap A[[q^{S^+}]] \otimes_A R_{\underline{k}}(A)$$

2.3.5. *q-développement.* Soit $(\mathcal{G}_\infty, \lambda, \alpha, F., \beta, \omega)_{/\mathbb{Z}_{(p)}((q^{S_g}))}$ le sixtuplet de Tate-Mumford où

- $\mathcal{G}_\infty = \mathbb{G}_m^g/q^{S_g}$ est la variété abélienne de Tate-Mumford sur $\mathbb{Z}_{(p)}((q^{S_g}))$ au dessus de la composante rationelle associée au parabolique de Siegel standard de GSp_{2g}.
- F_i est l'image de $\mu_{p^m}^i \subset \mathbb{G}_m^i \subset \mathbb{G}_m^g$ par le morphisme canonique $\mathbb{G}_m^g \to \mathcal{G}_\infty$ et β est l'isomorphisme canonique de $Gr(F_\bullet)$ avec $\mu_{p^m}^g$.
- α est déduit des isomorphismes canoniques $\mathcal{G}_\infty[N] \cong (\mu_N^g \oplus q^{\frac{1}{N}S_g})/q^{S_g}$.
- ω est la g-forme correspondantà $\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_g}{x_g}$ sur $\mathbb{G}_m^g$.

Soit A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, on considère l'homomorphisme

$$\mathbf{M}_{\underline{k}}^g(\Delta_0(p^m), A, \psi) \longrightarrow A[[q^{S_g^+}]] \tag{2.3.5.a}$$

obtenu par l'évaluation au $A((q^{S_g}))$-point $(\mathcal{G}_\infty, \lambda, \alpha, F., \beta, \omega)_{/A((q^{S_g}))}$ obtenu par extension des scalaires de $\mathbb{Z}_{(p)}$ à A du sixtuplet de Mumford-Tate.

2.3.6. *Opérateurs de Hecke.* Soit $\Gamma_i(N) = Sp_{2g}(\mathbb{Z}) \cap V_i(N)$. Pour tout nombre premier q et tout entier i tel que $1 \leq i \leq g$, on pose

$$\delta_i(q) = diag(q.1_i, 1_{g-i}, q.1_i, q^2.1_{g-i})$$

et $\delta_0(q) = diag(1_g, q.1_q)$. Pour $\Gamma = \Gamma_1(N)$ ou $\Gamma_0(N)$, on considèrera les opérateurs suivants:

(i) Pour $q \not| N$ et $i \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \leq i \leq g-1$, $T_i(q) = \Gamma\delta_i(q)\Gamma$.
(ii) Pour $q|N$ et $i \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq i \leq g-1$, $U_i(\ell) = \Gamma\delta_i(q)\Gamma$.
(iii) Pour $x \in \mathcal{T}_N$, $< x >= \Gamma\gamma_x\Gamma$ pour γ_x tel que $[\gamma_x] = x$.

Pour $g = 1$, pour tout premier ℓ ne divisant pas N, on note $T_\ell = T_0(\ell)$ et pour ℓ divisant une puissance de N, on pose $U_\ell := U_0(\ell)$.

Pour $g = 2$, pour tout premier ℓ ne divisant pas N, on note $T_\ell = T_0(\ell)$, $R_\ell = T_1(\ell)$, $S_\ell = T_2(\ell)$ et on pose:

$$Q_\ell(X) = X^4 - T_\ell X^3 + \ell(R_\ell + (1+\ell^2)S_\ell)X^2 - \ell^3 T_\ell S_\ell X + \ell^6 S_\ell^2$$

On note $R_1(N)$ l'algèbre abstraite engendrée sur $\mathbb{Z}$ par ces opérateurs. Cette dernière est commutative.

2.3.7. *Action sur les formes modulaires.* Soit $\xi \in GSp_{2g}(\mathbb{Q}) \cap M_{2g}(\mathbb{Z})$. Pour tout sixtuplet $(A_{/S}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, \omega)$ comme au 2.3.1, il existe un sixtuplet

$$(A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \alpha_\xi, F_{\xi .}, \beta_\xi, \omega_\xi)$$

et une unique isogénie $\iota_\xi : A \to A_\xi$ telle que $\iota_\xi^t \circ \lambda = \lambda_\xi \circ \iota_\xi$, $\alpha_\xi \circ \iota_\xi = \xi \circ \alpha$, $F_{\xi .} = \iota_\xi(F_\bullet)$ et $\iota_\xi^* \omega_\xi = \omega$. Alors pour tout $f \in \mathbf{M}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A)$, on note $f\|_{\underline{k}}\xi$, la forme modulaire définie par

$$f\|_{\underline{k}}\xi(A_{/S}, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta, \omega) = f(A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \alpha_\xi, F_{\xi .}, \beta_\xi, \omega_\xi)$$

On vérifie que $f\|_{\underline{k}}\xi \in \mathbf{M}_{\underline{k},\psi}(\xi^{-1}\Delta_0(p^m)\xi, A)$ et que pour $A \subset \mathbb{C}$ on a:

$$f\|_{\underline{k}}\xi(z) = \nu(\xi)^{|\underline{k}|}\rho_{\underline{k}}(j(\xi,z))^{-1}f(\xi(z))$$

C'està dire que $f\|_{\underline{k}}\xi = \nu(\xi)^{kg/2}f|_{\underline{k}}\xi$.

Pour tout $\delta \in GSp_{2g}(\mathbb{Q}) \cap M_{2g}(\mathbb{Z})$, on définit l'action de l'opérateur de Hecke $\Gamma\delta\Gamma$ sur l'espace $\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Gamma, A)$ par

$$f|_{\underline{k}}[\Gamma\delta\Gamma] = \nu(\delta)^{\frac{|\underline{k}|}{2}-\frac{g(g+1)}{2}}\sum_\alpha f|_{\underline{k}}\delta_i = \nu(\delta)^{-\frac{g(g+1)}{2}}\sum_\alpha f\|_{\underline{k}}\delta_\alpha$$

avec $\Gamma\delta\Gamma = \coprod_\alpha \Gamma\delta_\alpha$. Etant donné un tel δ, on note δ_f son image dans $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$. Si K désigne le sous-groupe ouvert compact de $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ pour lequel $\Gamma = GSp_{2g}(\mathbb{Q}) \cap K$, la classe double $K\delta_f^{-1}K$ opère de façon habituelle sur les formes automorphes du 2.3.3 et on la relation:

$$(f|_{\underline{k}}[\Gamma\delta\Gamma])_{\mathbb{A}} = \nu(\delta)^{(|\underline{k}|-g(g+1)/2}[K\delta_f^{-1}K].f_{\mathbb{A}} \tag{2.3.7.a}$$

2.3.8. *Involution de Fricke.* Posons pour tout entier naturel $N \neq 0$,

$$\tau_N = \tau_N^g = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -N1_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $f \mapsto f|_{\underline{k}}\tau_N$ définit un morphisme de $\mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Gamma_0(N),\psi)$ dans $\mathbf{M}^g_{\underline{k},\overline{\psi}}(\Gamma_0(N),\mathbb{C})$ Sur les formes adéliques, la formule correspondantà cette involution est donnée par

$$(f|_{\underline{k}}\tau_N)_{\mathbb{A}}(g) = \overline{\psi}_{\mathbb{A}}(\nu(g))f_{\mathbb{A}}(g\tau_N^{-1})$$

en identifiant τ_N avec son image canonique dans $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$.

2.3.9. *L'opérateur de Siegel I..* Avant de définit l'opérateur de Siegel Φ^s, on introduit une notation généralisant celles introduit plus haut.

Soit $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{g,+}$ et s un entier compris entre 0 et g. Considérons la restriction à GL_s que l'on regarde comme un sous-groupe de GL_g via le morphisme $h \mapsto diag(h, 1_{g-s})$ de la representation irréductible $R_{\underline{k}}$. Cette representation de GL_s définit un faisceau automorphe sur la variété de Siegel de genre s que l'on notera encore $\omega_{\underline{k}}$. De même, on notera $M^s_{\underline{k}}(\Gamma, A)$ l'espace des sections globales de ce faisceaux sur la variéte de Siegel de genre s définit pour tout sous-groupe arithmétique $\Gamma \subset Sp_{2s}(\mathbb{Q})$.

Pour $f \in \mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Gamma,\mathbb{C})$, on pose

$$(\Phi^s f)(z) = \lim_{t_\infty\to\infty} f(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout $\gamma \in P_{r,s}$ avec $r+s=g$, on a:

$$\Phi^s(f|_{\underline{k}}\gamma) = (\Phi^s f)|_{\underline{k}}\pi_s(\gamma)$$

où π_s désigne le morphisme canonique de $P_{r,s}$ dans Sp_{2s}.

Alors on voit imédiatement que $\Phi^s(f) \in \mathbf{M}^s_{\underline{k}}(\pi_s(\Gamma \cap P^{n,s}(\mathbb{Q})), \mathbb{C})$. De plus, on a

$$c(h, \Phi^s f) = c(\begin{pmatrix} h & 0_{s,r} \\ 0_{r,s} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, f) \text{ for all } h \in S^s$$

En particulier, pour $A \subset \mathbb{C}$, on a

$$\Phi^s(\mathbf{M}^g_{\underline{k}}(\Gamma, A)) \subset \mathbf{M}^s_{\underline{k}}(\pi_s(\Gamma \cap P^{n,s}(\mathbb{Q})), A)$$

2.3.10. *L'opérateur de Siegel II..* Soit $K \subset GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact et $Y_{/\mathbb{Q}}$ le schéma de Siegel correspondant. Soient $Z \subset Y^*$ une composante rationnelle du bord de Y^* et Z^* l'adhérence de Zariski de Z dans Y^*. On note π le morphisme canonique de $\overline{Y}$ sur Y^*. Soit $\mathcal{I}_Z$ le faisceau d'idéaux definissant Z^* (i.e. tel que $\mathcal{O}_{Z^*} = \mathcal{O}_{Y^*}/\mathcal{I}_Z$ soit le faisceau structural de fonctions régulières sur Z^*. Pour tout $\mathbb{Q}$-algèbre A, on définit l'opérateur de Siegel par

$$\Phi_Z : H^0(Y^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A) \to H^0(Y^*, (\pi_*\omega_{\underline{k}}/\mathcal{I}_Z.\pi_*\omega_{\underline{k}}) \otimes A) = H^0(Z^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A)$$

Lemme 2.3.11. *Supposons que Z est une composante du bord de dimension maximale*[5] *(i.e. Z est de genre $g-1$). Alors, on a:*

$$H^0(Z^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A) \cong \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_Z, A)$$

Preuve. Supposons que Z est de genre supérieur à 1. Le cas du genre 1 est laissé au lecteur. Alors, on a

$$H^0(Z^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A) = H^0(Z, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A) = H^0(\pi^{-1}(Z), \omega_{\underline{k}} \otimes A) =$$
$$H^0(\Xi_Z \times^{E_Z} W_Z/\Gamma_Z, \omega_{\underline{k}} \otimes A) = H^0(\Gamma_Z, H^0(\Xi_Z \times^{E_Z} W_Z, \omega_{\underline{k}} \otimes A))$$

Comme Z est de genre $g-1$. Alors $E_Z \cong \mathbb{G}_m$ et $W_Z = \mathbb{A}^1 \backslash \mathbb{G}_m$. On en déduit que $\Xi_Z \times^{E_Z} W_Z \cong S_Z = \mathcal{A}_{g-1,K_Z}$ puisque X_Z doit être de rang $1 = g-(g-1)$. Par ailleurs rappelons que l'on a: $1 \to \mathbb{G}_{m/S_Z} \to \mathcal{G} \times_{\overline{Y}} S_Z \to \mathcal{A}_{g-1,K_Z/S_Z} \to 0$. En particulier, on a:

$$0 \to \mathcal{O}_{S_Z} \to Lie\ \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{S_Z} \to Lie\ \mathcal{A}_{g-1,K_Z} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{S_Z} \to 0$$

Après passage au dual, on peut fixer un scindage $Lie\ \mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{O}_{S_Z} \cong \mathcal{O}_{S_Z} \oplus (Lie\ \mathcal{A}_{g-1,K_Z})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{/S_Z}$ et en déduire un isomorphisme :

$$\omega_{\underline{k}/S_Z} \cong \omega_{\underline{k}/Z} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{S_Z}$$

avec $\omega_{\underline{k}/Z}$ défini à partir de $(Lie\ \mathcal{A}_{g-1,K_Z/Z})^\vee$ en considérant $R_{\underline{k}}$ comme une représentation de GL_{g-1} via le plongement de GL_{g-1} dans GL_g. Comme $S_Z \to Z$ est propre à fibres géometriquement connexes, en déduit donc que

$$H^0(\Xi_Z \times^{E_Z} W_Z, \omega_{\underline{k}} \otimes A) = H^0(S_Z, \omega_{\underline{k}/Z} \otimes \mathcal{O}_{S_Z} \otimes A) = H^0(Z, \omega_{\underline{k}/Z} \otimes A)$$

Par ailleurs $\Gamma_Z \subset \mathbb{Z}^\times$ est trivial puisque K est choisi suffisamment petit. D'ø'ue le résultat.■

[5]Sans cette hypothèse, on peut prouver avec la même méthode que $H^0(Z^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes A) \cong H^0(\Gamma_Z, \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_Z, A))$.

Lorsque Z est de genre $g-1$, Φ_Z définit donc un morphisme $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta, A) \to \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_Z, A)$. Soit $\gamma_Z \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ telle que la classe $[\gamma_Z] \in C_s(\Delta)$ représente Z, alors on a

$$\Phi_Z.f = \Phi^s(f|\gamma_Z).$$

2.3.12. *Filtration de l'espaces des formes modulaires.* Pour tout entier s compris entre 0 et g, on note $\mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,s}(\Delta, A)$ le sous-module des formes $f \in \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g}(\Delta, A)$ telles que $\Phi_Z.f = 0$ pour toute composante rationelle de genre $i < g-s$. Pour $s = 0$, on retrouve l'espace des formes cuspidales et pour $s = g$, on obtient $\mathbf{M}_{\underline{k}}^{g}(\Delta, A)$. Ces modules forms une filtration croissante:

$$\mathbf{S}_{\underline{k}}^{g}(\Delta, A) = \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,0}(\Delta, A) \subset \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,1} \subset \cdots \subset \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,g}(\Delta, A) = \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g}(\Delta, A)$$

Soit $\partial^s Y^*$ le sous-schéma fermé de Y^* constitué des composantes rationnelles de genre $i < g-s$ et $\mathcal{I}_s$ le faisceau d'ideaux correspondant. Alors on a aussi

$$\mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,s}(\Delta, A) = H^0(Y^*_{/A}, \omega_{\underline{k}} \otimes \mathcal{I}_s)$$

En fait on s'interessera essentiellement à $\mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,1}(\Delta, A)$. Pour tout $Z \in C_{g-1}(\Delta)$, on vérifie comme dans le lemme 2.3.11 que

$$H^0(Z^*, \pi_*\omega_{\underline{k}} \otimes \mathcal{I}_1 \otimes A) \cong \mathbf{S}_{\underline{k}}^{g-1}(\Delta_Z, A) \tag{2.3.12.a}$$

On définit

$$\Phi^\Delta = \oplus_{Z \in \mathbb{C}_{g-1}(\Delta)} \Phi_Z \ : \ \mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,1}(\Delta, A) \to \bigoplus_{Z \in C_{g-1}(\Delta)} \mathbf{S}_{\underline{k}}^{g-1}(\Delta_Z, A).$$

Par définition, l'espace des formes cuspidales $\mathbf{S}_{\underline{k}}^{g}(\Delta)$ est le noyau de Φ^Δ. Pour tout entier m positif et $i = 0$ ou 1, on définit de façon similaire les espaces de formes modulaires de Siegel $\mathbf{M}_{\underline{k}}^{g,s}(\Delta_i(p^m), A)$.

2.4. **Théorie des formes p-adiques ordinaires.**

2.4.1. *L'idempotent e.* . Soit Γ un sous-groupe de congruence tel qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $\Delta_0(p^m) \supset \Gamma \supset \Delta_1(p^m)$. Soit $\delta_p = \prod_{i=0}^{g} \delta_i(p)$; on définit l'opérateur de Hecke

$$U(p) = \Gamma \delta_p \Gamma = \prod_{i=0}^{g} U_i(p)$$

et on pose

$$e = \lim_{\alpha \to \infty} U(p)^{\alpha!}$$

lorsque cet opérateur agit linéairement sur un module topologique complet.

2.4.2. *Action sur les formes modulaires.* Pour $i = 0, \dots, g$ et toute forme modulaire $f \in \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_1(p^r), A)$, on définit une action tordue des opérateurs $U_i(p)$ par:

$$U_i(p).f = \frac{a_{\delta_i}^{-\underline{k}}}{[S_g \otimes \mathbb{Z}_p : a'_{\delta_i} S_g \otimes \mathbb{Z}_p a'_{\delta_i}]} \sum_{\xi} f \|_{\underline{k}} \xi$$

avec $U_i(p) = \Gamma \delta_i(p) \Gamma = \sqcup_\xi \Gamma \xi$ et $a'_{\delta_i} = p.a_{\delta_i}^{-1}$. On peut vérifier sur le q-developpement que cet opérateur preserve la structure entière des formes modulaire cf. [Hi02, prop. 3.5]. La relation entre les deux actions est donnée par:

$$f \|_{\underline{k}} U_i(p) = p^{i(k-g-1)} U_i(p).f$$

Si A est un Z_p-module complet pour la topologie p-adique, on a donc une action continue de $U(p)$ et donc de l'idempotent e sur $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_1(p^m), \mathbb{Z}_{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} A$. De plus, on peut exprimer l'image de e dans $End_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_1(p^m), \mathbb{Z}_p))$ comme un polynÃ´me en $U(p)$à coefficients dans $Z_{(p)}$. Pour tout $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre A, on peut donc l'etendreà $\mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_1(p^m), A)$. Une forme modulaire $f \in \mathbf{M}_{\underline{k}}(\Delta_1(p^m), A)$ sera dite *ordinaire* si elle vérifie $e.f = f$.

2.4.3. *Action sur $C_s(\Gamma)$.* Pour tout entier $s \geq 0$, on fixe une décomposition de Levi du parabolique standard $P_{r,s} = M_{r,s} U_{r,s}$ avec $M_{r,s} \cong Sp_{2s} \times GL_r$. Soient $W = W_g$ le groupe de Weyl de $G = Sp_{2g}$. On fixe une identification de $W_g \cong \mathfrak{S}_g \times \{\pm 1\}^g$ où $\mathfrak{S}_g$ désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, g\}$. Tout élément $w \in W_g$ s'identifie donc a un couple $(\sigma, \epsilon_i)_{1 \leq i \leq g} \in \mathfrak{S}_g \times \{\pm 1\}^g$ et admet un représentant canonique dans GSp_{2g} tel que

$$w.diag(\lambda_1, \dots, \lambda_g, \nu\lambda_1^{-1}, \dots, \nu\lambda_g^{-1}) w^{-1} = diag(\mu_1, \dots, \mu_g, \nu\mu_1^{-1}, \dots, \nu\mu_g^{-1})$$

avec

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_{\sigma(i)} & \text{si } \epsilon_i = 1 \\ \nu\lambda_{\sigma(i)}^{-1} & \text{si } \epsilon_i = -1. \end{cases}$$

Soit $W_{r,s} \subset W_g$ le groupe de Weyl de $M_{r,s}$. On a une décomposition naturelle $W_{r,s} = W_s \times \mathfrak{S}_r$, $\mathfrak{S}_r$ s'identifiant canoniquement au groupe de Weyl de GL_r. Soit $W^{r,s} \subset W$ le sous-ensemble des éléments de W de longueur minimal dans leur classeà gauche modulo $W_{r,s}$. $W^{r,s}$ est un système de représentants de $W_g/W_{r,s}$; de plus on a

$$W^{r,s} = \{w \in W_g | wB \cap M_{r,s} w^{-1} \subset B\}$$

où $B = \bigcap_{r=0}^g P_{g-r,r}$ est le Borel standard de GSp_{2g}.

Pour toute composante rationnelle $Z \in C_s(\Delta_0(p^r))$, on peut trouver un représentant de γ_Z dans $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ sous la forme $\gamma_Z = u_Z w_Z$ avec $w_Z \in W^{r,s}$ et $u_Z \ (mod\, p^r) \in U^-(p.\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ avec U^- le sous-groupe unipotent opposé Ã B. On vérifie facilement que w_Z ne dépend que de Z. On appelle profondeur de Z le plus grand entier i tel que l'on puisse choisir u_Z tel que $u_Z \ (mod\, p^r) \in U^-(p^i\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Lemme 2.4.4. Soit $Z \in C_s(\Delta_0(p^r)$ et soit $Z' \in C_s(\Delta_0(p^r))$ définie par la classe de $\delta_p^m v \gamma_Z v^{-1} \delta_p^{-m}$ pour $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $v \in \Delta_1(p^r)$. Alors l'une des deux conditions suivantes est satisfaite:

(i) $lg(w_{Z'}) < lg(w_Z)$.
(ii) $w_{Z'} = w_Z$ et $pf(Z') > pf(Z)$
(iii) Si $pf(Z) = \infty$, on a $Z' = Z$.

Preuve. voir [TU, Lemme 4.2.1].■

Lemme 2.4.5. *Soient $f \in e.\mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^r), K)$ une forme de Siegel ordinaire et $Z \in C_s(\Delta_t(p^r))$.*

(i) *Si $\Phi_Z(f) \neq 0$ alors $pf(Z) = \infty$.*
(ii) *Pour tout Z de profondeur infinie, $\Phi_Z(f) \in e.\mathbf{M}^s_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^r)_Z, K)$.*
(iii) *Si $\Phi_Z(f) = 0$ pour tout Z tel que $w_Z \in W^{r,s} \cap W_{g,0}$, alors f est cuspidale.*

Preuve. Les points (i) et (ii) découlent du lemme 2.4.4 et d'arguments identiques à ceux de [TU, 4.3]. ■

Soit $Z \in C_s(\Delta_0(p^m))$. On note $C_{s,\infty}(\Delta_t(p^m))$ le sous-ensemble de $C_s(\Delta_t(p^m))$ constitué des composantes de profondeur infini. Si $Z \in C_{s,\infty}(\Delta_0(p^m))$, une conséquence directe de la définition est que $\Delta_t(p^m)_Z \cong (\Delta_Z)_t(p^m)$. En effet, comme $w_Z \in W^{r,s}$, $w_Z^{-1} B w_Z \cap Sp_{2s} = B \cap Sp_{2s}$ est le sous-groupe de Borel standard de Sp_{2s}. La conjugaison par $w = w_Z$ envoie donc $B \cap Sp_{2s}$ dans B et induit un homomorphisme:

$$\iota_w = \iota_{w,s} : \mathcal{T}^s_{p^m} = \Delta_0(p^m)_Z/\Delta_1(p^m)_Z \longrightarrow \Delta_0(p^m)/\Delta_1(p^m) = \mathcal{T}^g_{p^m}$$

On en déduit aisément que l'opérateur Φ_Z induit un homomorphisme:

$$\Phi_Z : \mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), A) \longrightarrow \mathbf{M}^r_{k,\psi\circ\iota_{w,s}}(\Delta_0(p^m)_Z, A)$$

Définition 2.4.6. *Pour tout poids dominant $\underline{k} = (k_1, \dots, k_g)$ pour GL_g, on notera $\underline{k}^\tau$ le poids dominant pour le tore diagonal de GL_{g-1} obtenu par troncature. C'est à dire défini par:*

$$\underline{k}^\tau := (k_1, \dots, k_{g-1})$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des lemmes précédents. Nous verrons un peu plus tard un énoncé analogue pour les forms p-adiques.

Corollaire 2.4.7. *Pour tout couple (k, ψ), on a la suite exacte suivante:*

$$0 \to e.\mathcal{S}_{\underline{k},\psi}(\Delta(p^m), K) \to e.\mathbf{M}^g_{\underline{k},\psi}(\Delta(p^m), K) \to \bigoplus_{Z \in C_{g-1,\infty}(\Delta_0(p^m))} e.\mathbf{M}^{g-1}_{\underline{k}^\tau,\psi\circ\iota_Z}(\Delta^Z(p^m), K)$$

2.4.8. *Le lieu ordinaire et ses revêtements étales.* Nous commençons par rappeler la définition de l'invariant de Hasse. Soit $A_{/S}$ un schéma semi-abélien sur un schéma S de caractéristique p et soit F le Frobenius absolu. Pour toute base $\omega_{A/S}$ de $\Lambda^g H^0(A, \Omega^1_{A_{/S}})$, il existe $H(A, \omega_{A/S}) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ tel que $F^*(\eta_{A/S}) = H(A, \omega_{A/S}).\eta_{A/S}$ avec $\eta_{A/S}$ la base duale de $\omega_{A/S}$ dans $\Lambda^g H^1(A^\vee, \mathcal{O}_{A^\vee})$. Alors par p-linéarité du Frobenius, on vérifie aisément que $H(A, \omega_{A/S})\omega^{p-1}_{A/S}$ ne dépend pas du choix de $\omega_{A/S}$ et définit donc une forme modulaire de Siegel sur $\mathbb{F}_p$ de poids $p-1$ et de niveau 1. Il est classique de vérifier que A est ordinaire si et seulement si $H(A, \omega_{A/S}) \neq 0$. Par amplitude de ω_{Y^*}, il existe un entier positif a et $E \in \mathbf{M}_{(p-1)a}(\Delta, \mathbb{Z}_{(p)})$ tel que $H^a = E$ modulo p.

On pose $S(K) := \overline{Y}[1/E]$ et $S^*(K) := Y^*[1/E]$. On écrira le plus souvent S et S^* lorsque le genre g et le niveau K seront implicites[6] On considère la réduction modulo p^n de ces schémas: $S_n = S_n(K) := S \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $S_n^* = S_n^*(K) := S^* \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On considère $T_{n,m}$ le revêtement Galois étale de S_n représentant le foncteur ci-dessous

$$T_{m,n} = T_{m,n}(K) := \underline{Isom}_{S_n}(\mathcal{G}[p^m]^0, \mu_{p^m}^g).$$

Rappellons que le théorème d'irreductibilité de la tour d'Igusa dûe à Faltings-Chai [CF], entraine que $T_{n,m}$ est irréductible et que le morphisme canonique de $Gal(T_{n,m}/S_n) \to GL_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Dans la suite nous identifierons ces deux groupes ainsi que leur sous-groupes par cet isomorphisme. Soit $S_{0,n,m}$ (resp. $S_{1,n,m}$) le revètement intermédiaire de S_n tel que $Gal(T_{n,m}/S_{0,n,m}) = B_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ (resp. $N_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$) avec $B = B_g \subset GL_g$ le sous-groupe Borel standard de GL_g et $N = N_g$ son radical unipotent. On voit facilement, que $S_{0,n,m} \otimes_{\overline{Y}} Y$ represente le foncteur classifiant les quadruplet $(A, \lambda, \alpha, F_\bullet)_{/S}$ sur les $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-schémas avec (A, λ, α) un tripplet comme au paragraphe 2.1.1 et $F_\bullet$ une filtration de $A[p^m]$ de longueur g dont le gradué est isomorphe à $\mu_{p^m}^g$. En particulier, on en déduit qu'on a une immersion ouverte:

$$Y_{0,m} \times Spec(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \hookrightarrow S_{0,n,m}$$

On peut faire une remarque similaire pour $S_{1,n,m}$ et $Y_{1,m} \times Spec(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Soit π le morphisme canonique $\overline{Y} \to Y^*$. Sa restriction à S défini un morphisme propre $S \to S^*$. On en déduit que le composé $T_{n,m} \to S_n \to S_n^*$ est propre. Il admet donc une factorisation de Stein $T_{n,m} \to T_{n,m}^* \to S_n^*$ avec $T_{n,m}^*$ sur S_n^* et le morphisme $T_{n,m} \to T_{n,m}^*$ à fibres géometriquement connexes. En particulier $T_{n,m}^*$ est affine puisque S_n^* l'est. De façon similaire, on construit des revetements finis de S_n^* (et donc affines) $S_{t,n,m}^*$ pour $t = 0, 1$.

2.4.9. *Formes modulaires de Siegel p-adiques.* Comme précédment on fixe K un sous-groupe ouvert compact de $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ hyperspécial en p et on pose $\Delta = K \cap Sp_{2g}(Q)$. On définit maintenant certains modules de formes modulaires p-adiques. Pour tout poids $\underline{k}$, on pose:

$$\mathcal{M}_{\underline{k}}^{g,s}(\Delta, \mathbb{Z}_p) := \varprojlim_n H^0(S_n(K), \omega_{\underline{k}} \otimes \pi^* I_s)$$

et

$$\mathcal{M}_{\underline{k}}^{g,s}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) := \varinjlim_n H^0(S_n(K), \omega_{\underline{k}} \otimes \pi^* I_s)$$

Ces modules sont munis d'une action des operateurs de Hecke $T_i(q)$ pour $i = 0, \ldots, g$ si Δ est maximal en $q \neq p$ et des $U_i(p)$ pour $i = 0, \ldots, g$. Pour une action de ces opérateurs sur les formes p-adiques le lecteur peut consulter [Hi04] ou [SU06].

[6] Le genre est enfait déterminé par le niveau K qu est un sous-groupe ouver de $GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$. C'est pourquoi il n'apparait pas dans la notation pour $S(K)$ et $S^*(K)$.

Lemme 2.4.10. *Soit $\underline{k}=$ un poids dominant régulier. Alors on a la suite exacte courte:*

$$0\to e.\mathcal{M}^{g,0}_{\underline{k}}(\Delta,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\to e.\mathcal{M}^{g,1}_{\underline{k}}(\Delta,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\to\bigoplus_{Z\in C_{g-1}(\Delta)} e.\mathcal{M}^{g-1,0}_{\underline{k}^\tau}(\Delta_Z,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\to 0$$

De plus pour $s=0,1$, les modules $e.\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k}}(\Delta,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont divisibles et co-type fini sur $\mathbb{Z}_p$ (i.e. leur dual de Pontrjagin sont de type fini sur $\mathbb{Z}_p$).

Preuve. Remarquons d'abord que puisque $\partial(Y^*)\backslash\partial^1(Y^*)$ est isomorphe à la réunion disjointe topologique $\sqcup_{Z\in C_{g-1}(\Delta)}\mathcal{M}_{g-1,K_Z}$ et que $\partial(Y^*)$ est réduit, on a:

$$\mathcal{I}_1(K)/\mathcal{I}_0(K)\cong\oplus_{Z\in C_{g-1}(\Delta)}\mathcal{I}_0(K_Z)$$

On en déduit la suite exacte de faisceaux cohérents de $\overline{Y}$

$$0\to\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0(K)\to\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_1(K)\to\bigoplus_{Z\in C_{g-1}(\Delta)}\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0(K_Z)\to 0$$

En passant à la cohomologie, on obtient donc l'exactitude de la suite

$$0\to H^0(S_n(K),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0)\to H^0(S_n(K),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_1)\stackrel{\Phi}{\to}\bigoplus_{Z\in C_{g-1}(\Delta)}H^0(\pi^{-1}(S^*_n(K_Z)),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0(K_Z))$$

Par un argument similaire à celui donnant (2.3.12.a), pour tout $Z\in C_{g-1}(\Delta)$, on a

$$H^0(\pi^{-1}(S^*_n(K_Z)),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0(K_Z)=H^0(S^*_n(K_Z),\pi_*\omega_{\underline{k}}\otimes\mathcal{I}_0(K_Z))$$

Montrons maintenant la surjectivité de Φ. Par la formule de projection, on a l'isomorphisme de faisceau sur S^*_n

$$\pi_*(\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_s)=\pi_*\omega_{\underline{k}}\otimes\mathcal{I}_s.$$

Le morphisme Φ s'identifie donc à:

$$H^0(S^*_n(K),\pi_*\omega_{\underline{k}}\otimes\mathcal{I}_1(K))\to H^0(S^*_n(K),\pi_*\omega_{\underline{k}}\otimes\mathcal{I}_1(K)/\mathcal{I}_0(K))$$

qui est surjective puisque $S^*_n(K)$ est affine. On déduit de la discussion ci-dessus que l'on a la suite exacte courte:

$$\begin{aligned}&0\to H^0(S_n(K),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_0)\to H^0(S_n(K),\omega_{\underline{k}}\otimes\pi^*\mathcal{I}_1)\\ &\stackrel{\Phi}{\to}\bigoplus_{Z\in C_{g-1}(\Delta)}H^0(S^*_n(K_Z),\pi_*\omega_{\underline{k}}\otimes\mathcal{I}_0(K_Z))\to 0\end{aligned}\tag{2.4.10.a}$$

En passant à la partie ordinaire et la limite inductive on obtient la suite exacte du lemme. D'après Hida, $e.\mathcal{M}^{g,1}_{\underline{k}^\tau}(\Delta,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ pour $s=0$. On en déduit qu'il l'est pour $s=1$ par la suite exacte ci-dessus. En passant à la limite ■

Si L est une extension fini de $\mathbb{Q}_p$ contenant les valeurs d'un caractère ψ de $\mathcal{T}_{p^m}$, on défini de façon similaire les modules $\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), L/O_L), \mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), O_L)$. Ces modules sont munis d'une action des opérateurs de Hecke $U_i(p)$ et $T_i(q)$ pour $i = 1, \ldots, g$ et pour tout q tel que la composante en q de K soit maximale. Nous renvoyons le lecteur à [Hi04] pour la description de l'action des operateurs $U_i(p)$ sur ces modules.

Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique

$$Y_{t,m} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong Y[1/E] \times_{\overline{Y}} S_{t,n,m}$$

On en déduit des morphismes injectifs pourtout n, m et ψ:

$$\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k},\psi}(\Delta_1(p^m), O_L) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow H^0(S_{0,n,m}, \omega_{\underline{k},\psi} \otimes O_L \otimes \pi^*\mathcal{I}_s)$$

Ces morphismes injectifs commutent à l'action des opérateurs de Hecke $U_i(p)$ et $T_i(q)$. En particulier, on endéduit un morphisme injectif Hecke-équivariant

$$e.\mathbf{M}^{g,s}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow e.\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \tag{2.4.10.b}$$

Corollaire 2.4.11. *Soit* $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{g,+}$. *Si* $\underline{k}$ *est suffisamment régulier, alors* (2.4.10.b) *est un isomorphsme si* $s = 0$ *ou* 1.

Preuve. Ce résultat est dû à Hida pour les formes cuspidales (i.e. lorsque $s = 0$). Nous le déduisons pour $s = 1$ à partir de celui pour $s = 0$ pour les genres g et $g - 1$ qui entrainent que les flêches verticales de droite et de gauche entre les suites exactes ci-dessous sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & e.\mathcal{M}^{g,0}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & e.\mathcal{M}^{g,1}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & \bigoplus_{Z \in C_{g-1}(\Delta)} e.\mathcal{M}^{g-1,0}_{\underline{k}^\tau}(\Delta_Z, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & e.\mathbf{M}^{g,0}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[u] & e.\mathbf{M}^{g,1}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus_{Z \in C_{g-1}(\Delta)} e.\mathbf{M}^{g-1,0}_{\underline{k}^\tau}(\Delta_Z, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

La flêche verticale du milieu est donc un isomorphisme. ■

2.4.12. On pose

$$V^{g,s}_{n,m} = V^{g,s}_{n,m}(K) := H^0(T_{n,m}, \mathcal{O}_{T_{n,m}} \otimes_{\mathcal{O}_{S_n}} \pi^*\mathcal{I}_s),$$
$$W^{g,s}_{n,m}(K) := H^0(S_{1,n,m}, \mathcal{O}_{S_{1,n,m}} \otimes_{\mathcal{O}_{S_n}} \pi^*\mathcal{I}_s)$$

et

$$\mathcal{V}^{g,s}_{ord} = \mathcal{V}^{g,s}_{ord}(K) := \varinjlim_n e.V^{g,s}_{n,m}(K)$$
$$\mathcal{W}^{g,s}_{ord} = \mathcal{W}^{g,s}_{ord}(K) := \varinjlim_n e.W^{g,s}_{n,m}(K)$$

On a une action naturelle de $\mathcal{T}_{p^m} \cong B_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})/N_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ sur $W^{g,s}_{n,m}$ pour tout n, m . $\mathcal{W}^{g,s}_{ord}(K)$ est donc muni d'une action de $\mathcal{T}_{p^\infty} = \varprojlim_n \mathcal{T}_{p^n}$ dont on fixe une décomposition

$$\mathcal{T}_{p^\infty} \cong \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}^1_{p^\infty}$$

où $\mathcal{T}^1_{p^\infty}$ désigne le noyau de la réduction modulo p de $\mathcal{T}_{p^\infty}$ sur $\mathcal{T}_p$. Pour tout poids $\underline{k} \in (\mathbb{Z}^g)^+$ et ψ un caractère d'image fini de $\mathcal{T}^1_{p^\infty}$, soit

$$\psi_{\underline{k}}(t) = \psi(t).t^{\underline{k}} \tag{2.4.12.a}$$

pour tout $t \in \mathcal{T}_{p^\infty}$.

Théorème 2.4.13. *On suppose $s = 0$ ou 1. Soit ψ un caractère de $\mathcal{T}_{p^m}$ à valeurs dans O_L et $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{g,+}$. Alors, on a un isomorphisme canonique entre O_L-modules divisibles:*

$$e.\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k}}(K_0(p^m), \psi, L/O_L) \cong \mathcal{W}_{ord} \otimes O_L[\psi_{\underline{k}}] = \{v \in \mathcal{W}_{ord} \otimes O_L |\ t.v = \psi_{\underline{k}}(t)v\ \forall t \in \mathcal{T}_{p^\infty}\}$$

Ce théorème est bien-entendu une généralisation de résultats de Hida pour les formes modulaires elliptiques d'une part et les formes cuspidales de Siegel d'autre part; c'est à dire pour $s = 0$.

Lemme 2.4.14. *Soient $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{g,+}$ et ψ un caractère de $\mathcal{T}_{p^m}$ à valeurs dans O_L. Alors, on a un isomorphisme canonique:*

$$H^0(S_{0,n,m}, \omega_{\underline{k},\psi} \otimes \pi^*\mathcal{I}_s) = H^0(Gal(B(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})), V^{g,s}_{n,m}) \otimes R_{\underline{k}} \otimes \psi).$$

pour tout n et m tels que $m \geq n$.

Preuve. Soit $A_{/T_{n,m}}$ la variété abelienne universelle au dessus de $T_{n,m}$. Lorsque $m \geq n$, on a des isomorphismes canoniques de $GL_g(\mathbb{Z}_p)$-module

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{/T_{n,m}} &= Hom(Lie(A[p^m]), \mathcal{O}_{T_{n,m}} \\ &= Hom(Lie(A[p^m]^\circ), \mathcal{O}_{T_{n,m}}) \\ &\cong Hom(Lie(\mu^g_{p^m}), \mathcal{O}_{T_{n,m}}) \\ &\cong \mathcal{O}^g_{T_{n,m}} \end{aligned}$$

On en déduit un isomorphisme canonique de faisceaux cohérents commutant à l'action de $GL_g(\mathbb{Z}_p)$

$$\omega_{\underline{k}/T_{n,m}} \cong \mathcal{O}_{T_{n,m}} \otimes R_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p)$$

où l'action de $GL_g(\mathbb{Z}_p)$ sur le premier facteur du membre de droite se factorise par $GL_g(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ $\cong Gal(T_{n,m}/S_m)$ et celui sur le second facteur est l'action algébrique naturelle de $GL_g(\mathbb{Z}_p)$ sur $R_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p)$. Pour obtenir le résultat recherché, on prend les sections globales de l'isomorphisme obtenu en tensorisant l'isomorphisme ci-dessus par $\mathcal{I}_s$ et on applique la théorie de Galois.∎

Lemme 2.4.15. *On conserve les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent. On a l'isomorphisme:*

$$\varinjlim_{m'} e.H^0(S_{0,n,m'}, \omega_{\underline{k},\psi} \otimes \pi^*\mathcal{I}_s) \cong e.H^0(S_{0,n,m}, \omega_{\underline{k},\psi} \otimes \pi^*\mathcal{I}_s)$$

Preuve. Pour obtenir cet isomorphisme, il suffit de démontrer que l'on a:

$$e.H^0(S_{1,n,m}, \mathcal{O}_{S_{1,n,m}} \otimes \pi^*\mathcal{I}_s \otimes \omega_{\underline{k}})) \cong e.H^0(S_{1,n,m'}, \mathcal{O}_{S_{1,n,m'}} \otimes \pi^*\mathcal{I}_s \otimes \omega_{\underline{k}})^{H_{m,m'}}$$

pour tout $m' \geq m$ avec $H_{m,m'}$ le noyau de $\mathcal{T}_{p^{m'}} \to \mathcal{T}_{p^m}$. Clairement, le premier membre s'injecte dans le second. Pour montrer la surjectivité on peut se ramener facilement en utilisant un raisonnement par reccurence au cas $m' = m+1$. Soit φ un élément du second membre. C'est une fonction sur les quintuplets $(A_S, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta)$ tel que A_S, λ est un schéma abelien muni d'une polarisation principale, $H(A_S)$ est inversible dans $\mathcal{O}_S$, $F_\bullet$ est une filtration de $A[p^{m+1}]^\circ$, β est un isomorphisme $Gr(F_\bullet) \cong \mu^g_{p^{m+1}}$. Etant donné un tel quintuplet, on peut considerer $F'_.$ la filtration de $A[p^m]^\circ$ induite par $F_\bullet$ et β' l'isomorphisme $Gr(F'_.) \cong \mu^g_{p^m}$ induit par β. Nous devons montrer que la valeur $\varphi(A_S, \lambda, \alpha, F_\bullet, \beta)$ ne dépend que $F'_.$ et β'. Le fait que φ soit invariant par $H_{m,m+1}$ montre que cette valeur ne dépend que de β'. Le fait qu'elle ne dépende que de $F'_.$ va provenir de l'ordinarité de ϕ. Pour voir cela, il faut expliciter l'action de $U(p)$ sur φ. Cela résulte facilement du fait que $\delta_p^{-1}\Gamma_0(p^{m+1})\delta_p \subset \Gamma_0(p^m)$ et d'un résultat analogue pour $\Gamma_1(p^m)$. ∎

Corollaire 2.4.16. *On conserve les hypothèses et notations du lemme précédent. Alors on a l'isomorphisme:*

$$e.\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m), L/O_L) \cong (\mathcal{W}^{g,s}_{ord} \otimes O_L)[\psi_{\underline{k},\psi}]$$

Preuve. Rappelons que $R_{\underline{k}}$ est l'induite algébrique du caractère algébrique dominant $\underline{k}$. Par définition de $R_{\underline{k}}$, le module $H^0(B(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}), V^{g,s}_{n,m} \otimes R_{\underline{k}} \otimes \psi)$ s'identifie aux fonctions algébriques ϕ sur $GL_g(\mathbb{Z}_p)$ à valeurs dans $e.V^{g,s}_{n,m}$ et telles que:

(a) $\phi(bg) = b^{\underline{k}}\phi(g)$ pour tout $b \in B(\mathbb{Z}_p)$,
(b) $\psi(b)\phi(gb) = b^{-1}.\phi(g)$ pour tout $b \in B(\mathbb{Z}_p)$

Le morphisme d'évaluation $\phi \mapsto \phi(1)$ induit donc un morphisme

$$H^0(B(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}), e.V^{g,s}_{n,m} \otimes R_{\underline{k}} \otimes \psi) \to (e\mathcal{W}^{g,s}_{n,m})[\psi_{\underline{k}}]$$

qui est clairement un isomorphisme. On conclut aisément en passant à la limite inductive sur m puis sur n et en utilisant les deux lemmes précédents.∎

2.4.17. *Formes Λ-adiques.* On définit également $\omega_{\underline{a}}$ comme le caractère défini pour tout $\underline{a} = (a_1, \dots, a_g) \in \mathbb{Z}^g$ par

$$\omega^{\underline{a}}(t) := \omega(t_1)^{a_1} \dots \omega(t_g)^{a_g}$$

pour tout $t = diag(t_1, \dots, t_g) \in \mathcal{T}_{p^\infty}$.

Soit $\Lambda_g = O_K[[\mathcal{T}^1_{p^\infty}]]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et ψ un caractère d'image fini de $\mathcal{T}^1_{p^\infty}$, $\psi_{\underline{k}}$ définit canoniquement un caractère de Λ_g dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et nous notons $P_{\psi,k}$ le noyau de ce dernier. On note $W^{g,s}_{ord}$ le dual de Pontrjagin de $\mathcal{W}_{ord}$ et $\mathcal{M}^{g,s}_{ord}(\Delta, \Lambda_g) = Hom_{\Lambda_g}(W^{g,s}_{ord}, \Lambda_g)$. On pose $\mathcal{S}^g(\Delta, \Lambda_g) = \mathcal{M}^{g,0}_{ord}(\Delta, \Lambda_g)$.

L'action de $\mathcal{T}_p = \mu^g_{p-1} \subset \mathcal{T}_{p^\infty}$ sur $\mathcal{M}^{g,s}_{ord}(\Delta, \Lambda_g)$ permet de décomposer ce dernier. On a

$$\mathcal{M}^{g,s}_{ord}(\Delta, \Lambda_g) = \oplus_{\underline{a}}\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g)$$

avec

$$\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) := \{v \in \mathcal{M}^{g,s}_{ord}(\Delta, \Lambda_g) |\ x.v = \omega^{\underline{a}}(x)\ \forall x \in \mathcal{T}_p\}$$

Corollaire 2.4.18. *Supposons $s = 0$ ou 1. Alors $\mathcal{M}^{g,s}_{ord}(\Delta, \Lambda_g)$ et $W^{g,s}_{ord}$ sont des Λ_g-modules libres et pour tout k assez grand et tout ψ fini, on a un isomorphisme canonique:*

$$\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) \otimes \Lambda_g/P_{\psi,k} \cong e\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k}}(\Delta_0(p^m), \psi\omega^{\underline{a}-\underline{k}}, O)$$

Preuve. $V^{g,s}_{N,ord}$ est libre grâce au Théorème 2.4.13 (contrôle) et le fait que $e.\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Delta_0(p^m), \psi, K/O)$ soit divisible par le l2.4.10 pour un ensemble Zariski dense d'idéaux premiers $P_{\underline{k},\psi}$. ∎

2.4.19. *Homomorphisme de Siegel Λ-adique.* Soit Z une composante rationelle de genre $g-1$ de $\overline{Y}$. Son adherence $\overline{Z}$ dans $\overline{Y}$ est une compactification toroidale de Z. Soit $\mathcal{G}_{\overline{Z}}$ le schema semi-abelien au dessus de $\overline{Z}$. On a une suite exacte

$$1 \to \mathbb{G}_{m/\overline{Z}} \to \mathcal{G} \times_{\overline{Y}} \overline{Z} \to \mathcal{G}_{\overline{Z}} \to 0$$

D'après la suite exacte ci-dessus, une filtration de $\mathcal{G} \times_{\overline{Y}} \overline{Z}[p^m]^\circ$ et un isomorphisme de son gradué avec $\mu^{g-1}_{p^m}$ induit canoniquement une filtration $F_\bullet$ de $\mathcal{G}_{\overline{Z}}[p^m]^0$ et un isomorphisme β de son gradué avec $\mu^g_{p^m}$. On en déduit que l'on a un morphisme canonique $S_{1,m,n}(K_Z) \to S_{1,m,n}(K)$ qui commute a l'action de $\mathcal{T}^{g-1}_{p^\infty}$, ce dernier agissant sur $T_{n,m}/N$ via le morphisme

$$\mathcal{T}^{g-1}_{p^\infty} \overset{i_g}{\hookrightarrow} \mathcal{T}^g_{p^\infty}$$

défini par $i_g(t) := diag(t, 1)$. Remarquons qu'on a le diagramme:

$$\begin{tikzcd} S_{1,m,n}(K_Z) \arrow[r] \arrow[d] & S_{1,m,n}(K) \arrow[d] \\ S_n(K_Z) \arrow[r] & S_n(K) \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des immersions fermées. Le morphisme de restriction à $S_n(K_Z)$ fournit alors un morphisme de Siegel:

$$e.W^{g,1}_{n,m}(K) \to e.W^{g-1,0}_{n,m}(K_Z)$$

En passant à la limite et au dual de Pontrjagin, on obtient l'homomorphisme de Λ_{g-1}-modules:

$$W^{g-1,0}_{ord}(K_Z) \to W^{g,1}_{ord}(K)$$

en considérant le Λ_g-module de droite comme un Λ_{g-1}-module via l'homomorphisme d'anneau $\Lambda_{g-1} \to \Lambda_g$ induit par l'homomorphisme de groupe i_g. En utilisant la propriété universelle du produit tensoriel $\otimes_{i_g,\Lambda_{g-1}}\Lambda_g$ et en passant au Λ_g-dual, on en déduit l'homomorphisme de Siegel Λ_g equivariant:

$$\Phi^\Lambda_Z : \mathcal{M}^{g,1}_{ord}(\Delta, \Lambda_g) \to \mathcal{S}^{g-1}_{ord}(\Delta_Z, \Lambda_{g-1}) \otimes_{i_g,\Lambda_{g-1}} \Lambda_g$$

Soit $[\underline{a}]$ la suite tronquée obtenue en retirant le dernier terme de la suite $\underline{a}$. Alors, il est aisé de vérifier que l'image de $\mathcal{M}^{g,1}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g)$ par Φ^Λ_Z est contenue dans $\mathcal{S}^{g-1}_{[\underline{a}]}(\Delta_Z, \Lambda_{g-1}) \otimes_{i_g,\Lambda_{g-1}} \Lambda_g$. On a le théorème suivant:

Théorème 2.4.20. *On a la suite exacte courte suivante:*

$$0 \to \mathcal{S}^g_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) \to \mathcal{M}^{g,1}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) \stackrel{\oplus_Z \Phi_Z^\Lambda}{\longrightarrow} \bigoplus_{Z \in C_{g-1}(\Delta)} \mathcal{S}^{g-1}_{[\underline{a}]}(\Delta_Z, \Lambda_{g-1}) \otimes_{i_g, \Lambda_{g-1}} \Lambda_g \to 0$$

Preuve. Pour tout poids dominant $\underline{k}$ congru à $\underline{a}$ modulo $p-1$, la reduction modulo $P_{\underline{k}}$ de la suite ci-dessus s'identifie à la suite:

(2.4.20.a)

$$0 \to e.\mathcal{M}^{g,0}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Z}_p) \to e.\mathcal{M}^{g,1}_{\underline{k}}(\Delta, \mathbb{Z}_p) \to \bigoplus_{Z \in C_{g-1}(\Delta)} e.\mathcal{M}^{g-1,0}_{\underline{k}^\tau}(K_Z, \mathbb{Z}_p) \to 0$$

D'après le Lemme 2.4.10, apres tensorisation de la suite ci-dessus par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, on obtient la suite exacte de ce lemme. La suite courte (2.4.10) est donc exacte. Les termes de la suite de l'énoncé étant libres de type fini sur Λ_g, la suite en question est exacte puisque'elle l'est modulo P pour P variant dans un ensemble Zariski dense d'élément de $Spec(\Lambda_g)$. ■

2.4.21. *Principe du q-développement pour les formes Λ_g-adiques.* Par le (2.3.5.a), pour tout $m \geq 0$, on a un morphisme O-linéaire injectif:

$$e.H^0(S_{1,n,m}, \omega_{\underline{k}} \otimes \mathcal{I}_s) \hookrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[q^{S_g^+}]]$$

Par passage à la limite inductive sur m et n et successivement au dual de Pontrjagin et au Λ_g-dual, on en déduit le principe du q-développement pour les formes Λ-adiques ordinaires i.e. un homomorphisme injectif:

$$\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) \hookrightarrow \Lambda_g[[q^{S_g^+}]]$$

Soit $\mathcal{M}'_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g) \subset \Lambda_g[[q^{S_g^+}]]$, les sous-ensemble des séries $G = \sum_{h \in S_g^+} a_h q^h$, telles que pour tout ψ et tout k, on ait $G \; mod \; P_{\psi,k} \in e\mathcal{M}^{g,s}_{k,\psi\omega^{a-k}}(\Delta_0(p^m), \mathbb{Z}_p(\psi))$ pour presque tout ψ. Par le théorème précédent et le principe du q-developpement, on a

(2.4.21.a) $$\mathcal{M}(\Delta, \Lambda_g) \hookrightarrow \mathcal{M}'(\Delta, \Lambda_g)$$

On a la proposition suivante:

Proposition 2.4.22. *L'inclusion* (2.4.21.a) *est une égalité. Le résultat analogue pour l'espaces des formes cuspidales est aussi vrai.*

Preuve. Comme la dimension de $e\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{k},\psi\omega^{-k}}(\Delta_0(p^m), \mathbb{Z}_p(\psi))$ est bornée indépendamment de k et ψ (i.e. par le rang sur Λ_g de $\mathcal{M}^{g,s}_{\underline{a}}(\Delta, \Lambda_g)$), Il est facile et classique de montrer voir que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(\Delta, \Lambda_g)$ est de type fini sur Λ_g. Il existe donc une famille finie $q_1, \ldots q_N \in q^{S_g^+}$ tel que le morphisme i de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{R} = \oplus_{i=1}^N \Lambda_g.q_i \simeq \Lambda_g^N$ déterminé par

$$f = \sum_{q_\alpha \in q^{S_g^+}} a(f, q_\alpha) q_\alpha \mapsto \sum_{i=1}^N a(f, q_i) q_i \in \mathcal{R}$$

soit injectif. Choisissons alors un couple (k,ψ) tel que $Coker(i)$ localisé en $P_{\underline{k},\psi}$ soit libre sur le localisé A de Λ_g en $P_{\underline{k},\psi}$ et pour lequel on a les morphismes canoniques suivants (c'est possible car les ideaux $P_{\underline{k},\psi}$ forment un ensemble Zariski dense de $Spec(\Lambda_g)$):

$$\mathcal{M}(\Delta,\Lambda_g)\otimes\Lambda_g/P_{\underline{k},\psi}\overset{j_{\underline{k},\psi}}{\to}\mathcal{M}'(\Delta,\Lambda_g)\otimes\Lambda_g/P_{\underline{k},\psi}\overset{i_{\underline{k},\psi}}{\to}e\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Delta_0(p^m),\psi\omega^{-k},O)$$

tels que $i_{\underline{k},\psi}\circ j_{\underline{k},\psi}$ soit un isomorphisme par le théorème 2.4.18. Soit $G\in\mathcal{M}'$. $G \mod P_{\underline{k},\psi}=G_{\underline{k},\psi}\in\mathcal{M}_{\underline{k},\psi}(\Delta_0(p^m),O)$ Il existe donc $F\in\mathcal{M}(\Delta,\Lambda_g)$ telle que $F \mod P_{\underline{k},\psi}=G_{\underline{k},\psi}=G \mod P_{\underline{k},\psi}$. Cela entraine que $G\in\mathcal{M}+P_{\underline{k},\psi}.\mathcal{R}\cap\mathcal{M}'$. En répétant cet argumentn pour un système de générateurs de $\mathcal{M}'$, on voit donc que $\mathcal{M}'=\mathcal{M}+P_{\underline{k},\psi}.\mathcal{R}\cap\mathcal{M}'$. Par ailleurs, notre choix de (k,ψ) nous dit que $Tor_A(Coker(i)\otimes_A,A/P_{\underline{k},\psi}.A)=0$. On en déduit que $P_{\underline{k},\psi}.\mathcal{R}\otimes A\cap\mathcal{M}'\otimes A=P_{\underline{k},\psi}.\mathcal{M}'\otimes A$. Par conséquent, $\mathcal{M}'\otimes A=\mathcal{M}\otimes A+P_{\underline{k},\psi}.\mathcal{M}'\otimes A$ et donc $\mathcal{M}\otimes A=\mathcal{M}'\otimes A$ par le lemme de Nakayama. En particulier, on en déduit que $\mathcal{M}'/\mathcal{M}$ est un Λ_g-module de torsion. Comme il s'injecte dans $\Lambda_g[[q^{S_g^+}]]/i(\mathcal{M})$, on a $\mathcal{M}'/\mathcal{M}=0$ c'est à dire $\mathcal{M}=\mathcal{M}'$ grâce au lemme ci-dessous.∎

Lemme 2.4.23. *Soit N le conoyau de l'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\Lambda_g[[q^{S_g^+}]]$ obtenu par le principe du q-développement. Alors $Tor_{\Lambda_g}(N,\mathbb{F}_p)=0$ en particulier N est sans torsion sur Λ_g.*

Preuve. On considère la suite exacte $0\to\mathcal{M}\overset{j}{\to}\Lambda_g[[q^{S_g^+}]]\to N\to 0$. En tensorisant par $\mathbb{F}_p$ sous Λ_g, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Tor_{\Lambda_g}(\Lambda_g[[q^{S_g^+}]],\mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Tor_{\Lambda_g}(N,\mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}\otimes\mathbb{F}_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{F}_p[[q^{S_g^+}]] \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & Tor_{\Lambda_g}(N,\mathbb{F}_p) \arrow[r] & e.H^0(S_{1,1,1},\mathcal{O}_{S_{1,1,1}}) \arrow[r, "j\otimes\mathbb{F}_p"] & \mathbb{F}_p[[q^{S_g^+}]]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $j\otimes\mathbb{F}_p$ est injectif par le principe du q-developpement. La nullité de $Tor_{\Lambda_g}(N,\mathbb{F}_p)$ s'en déduit.∎

2.4.24. *Algèbres de Hecke.* Pour tout entier N premierà p, on pose $H^{ord}(N,\Lambda_g)$ (resp. $h^{ord}(N,\Lambda_g)$) la sous-Λ_g-algèbre de $End_{\Lambda_g}(\mathcal{M}(\Delta,\Lambda_g))$ (resp. $End_{\Lambda_g}(\mathcal{S}(\Delta,\Lambda_g))$ engendrée par les opérteurs de Hecke $T_i(\ell)$ et $S(\ell)$ pour ℓ premiersà N. Ces algèbres sont de type fini sur Λ_g et si on note $H^{ord}_{\underline{k},\psi}(N,O)$ l'algèbre de Hecke engendré sur O par les opérateurs $T_i(\ell)$ et $S(\ell)$ opérant sur $e\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Delta_0(p^m),\psi\omega^{-k},O)$, le morphisme surjectif suivant est de noyau nilpotent.

$$H^{ord}(N,\Lambda_g)\otimes\Lambda_g/P_{\underline{k},\psi}\to H^{ord}_{\underline{k},\psi}(N,O)\to 0$$

La démonstration de ce fait est similaireà celle du corollaire 7.3 de [TU].

3. Séries d'Eisenstein

Dans ce chapitre, les formes de Siegel étudiées seront scalaires de poids k un entier positif. Avec les convention du chapitre précédent, cela signifi qu'elles sont de poids $(k, \ldots, k)$.

3.1. **Séries d'Eisenstein-Siegel.**

Soit $g \geq 1$ un entier naturel. Dans cette section, $G = GSp_{2g}$ et Q désigne la parabolique de Siegel $P^{g,0}$. On rappelle que ι_g désigne le représentant de l'élément du groupe de Weyl de longueur maximal défini par

$$\begin{pmatrix} 0_g & -1_g \\ 1_g & 0_g \end{pmatrix}.$$

Pour tout z dans le demi-espace de Siegel, on note $g.z = (a_g z + b_g)(c_g z + d_g)$ pour tout $g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R})$. On pose aussi $j(g, z) := det(c_g z + d_g)$. Soit $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices k_∞ satisfaisant $k_\infty.(i1_g) = i1_g$.

3.1.1. *Définitions classiques.*

Soit N un entier naturel positif et soit $\Gamma_0(N) \subset Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ le sous-groupe des matrices dont la réduction modulo N appartient à $Q(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ (i.e est triangulaire par blocs de taille $g \times g$). On fixe un entier k et χ un caractère de Dirichlet de niveau N tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. La série d'Eisenstein-Siegel "classique" est celle définie par

$$E^g(z, s; \chi, N) = det(y)^s \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N) \cap P_{g,0} \backslash \Gamma_0(N)} \chi(det(d_\gamma)) j(\gamma, z)^{-k-2|s|}$$

Pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_n$. Cette série converge pour $Re(s) >> 0$ et est prolongeable en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit

$$G^g(z, s; \chi, N) = N^{\frac{g(g+1)}{2}} L^N(2s + k, \chi) \prod_{i=1}^{[g/2]} L^N(4s + 2k - 2i, \chi^2) \times E^g|_k \iota_g(z, s; \chi, N)$$

Il résulte de travaux de Shimura dans [Sh83] et [Sh82] que l'évaluation en $s = \frac{g+1}{2} - k$ de la série d'Eisenstein ci-dessus définit une forme de Siegel holomorphe. Il est commode également de considérer la série

$$F_k^g(z, s; \chi, N) := \sum_{(c,d)} \chi(det(c)) det(cz + d)^{-k} |det(cz + d)|^{-2s}$$

la somme portant sur les matrices c et d de tailles $n \times n$ telles que (c, d) soit primitif et $det(c)$ soit premier à N. On vérifie aisément la relation bien connue:

$$det(Im(z))^{-s} N^{g(k+s)} . E_k^{g,*}(Nz, s; \chi, N) = F_k^g(z, s; \chi, N)$$

avec $E_k^{g,*}(z, s; \chi, N) = E_k^g|\iota_g(z, s; \chi, N)$.

3.1.2. *Préliminaires locaux.* Soit F un corps local de caractéristique résiduelle p. Soit ϖ l'uniformisante de $O = O_F$ et $k = O_F/\varpi$. On note $q = \sharp(k)$. On note $|.|$ la norme de F tel que $|\varpi| = q^{-1}$. On note v la valuation normalisée de O_F par $v(\varpi) = 1$. On fixe χ_1 et χ_2 des caratcères de $F^\times$ et on pose $c_i = v(cond(\chi_i))$. Soit $I(\chi_1, \chi_2, s)$ l'ensemble des fonctions lisses $\phi : G(F) \to \mathbb{C}$ telles que

$$\phi(\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} g) = \chi_1(det(a_1))\chi_2(det(a_2)) \left|\frac{det(a_1)}{det(a_2)}\right|^{s+\frac{g+1}{4}} \phi(g)$$

pour tout $g \in G(F)$ et $a_1, a_2 \in GL_g(F)\}$.

On note $K(n) \in G(O_F)$ le sous-groupe parahorique de Siegel de profondeur n pour tout entier $n > 0$ (i.e. triangulaire par blocs modulo ϖ^n).

Lemme 3.1.3. *Soit $n = c_1 + c_2$. Alors, l'espace des fonctions $\phi \in I(\chi_1, \chi_2, s)$ telles que*

$$\phi(g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \chi_1\chi_2(det(d))\phi(g)$$

pour tout $g \in G(F)$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K(n)$ est de dimension 1 et est de support $Q(F) \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ \varpi^{c_2} 1_g & 1_g \end{pmatrix} K(n)$.

Preuve. Pour toute suite croissante d'entiers positifs ou nuls $\underline{t} = (t_1, \dots, t_g)$, on pose $S_{\underline{t}} = diag(\varpi^{t_1}, \dots, \varpi^{t_g})$. Alors, on a la décomposition disjointe suivante en classes doubles:

$$G(O_F) = \bigsqcup_{\substack{\underline{t}=(t_1,\dots,t_g) \\ 0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le n}} Q(O_F) \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix} K(n)$$

D'après cette décomposition, une telle fonction est déterminée par les valeurs

$$\phi(\begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix}) \tag{3.1.3.a}$$

Considérons les éléments appartenant à la classe $B(O_F) \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix} K(n)$ s'écrivant de deux façon différentes modulo ϖ^n:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \pmod{\varpi^n} \tag{3.1.3.b}$$

On doit avoir

$$(\chi_1(det(a))\chi_2(det(d)) - \chi_1\chi_2(det(d')))\phi(\begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ S_{\underline{t}} & 1_g \end{pmatrix}) = 0$$

Par ailleurs, on voit facilement que la relation (3.1.3.b) est équivalente à

$$\begin{aligned} b &\equiv b' \pmod{\varpi^n} \\ dS_{\underline{t}} &\equiv S_{\underline{t}}a' \pmod{\varpi^n} \\ a - a' &\equiv bS_{\underline{t}} \pmod{\varpi^n} \\ d' - d &\equiv S_{\underline{t}}b \pmod{\varpi^n} \end{aligned}$$

Si $n - t_g < c_1$ (i.e. $t_g > c_2$), on peut facilement choisir a, b, d, a', b', d' tels que $b \equiv b' \equiv 0 \pmod{\varpi^n}$, $a \equiv a' \pmod{\varpi^n}$, $d \equiv d' \pmod{\varpi^n}$, $dS_{\underline{t}} \equiv S_{\underline{t}}a' \pmod{\varpi^n}$ et tels que $\chi_1(det(a)) \neq \chi_1(det(d'))$. En effet, il suffit de choisir $d = 1_g$ et a' de la forme $diag(1, \ldots, 1, x)$ avec $x \in 1 + \varpi^{n-t_g} O_F$ tel que $\chi_1(x) \neq 1$. On en déduit que (3.1.3.a) s'annule.

Si $t_1 < c_2$ (i.e. $n-t_1 > c_1$), soit x tel que $\chi_2(1+x\varpi^{t_1}) \neq 1$. On peut choisir a, b, d, a', b', d' tels que $b \equiv b' \equiv diag(x, 0, \ldots, 0) \pmod{\varpi^n}$, $a' \equiv 1_g \pmod{\varpi^n}$, $d \equiv 1_g \pmod{\varpi^n}$. Alors $d' \equiv diag(1 + x\varpi^{t_1}, 1, \ldots, 1) \pmod{\varpi^n}$. Donc $\chi_2(det(d)) \neq \chi_2(det(d'))$ et on en déduit que (3.1.3.a) s'annule. On conclut que (3.1.3.a) vaut zéro à moins que $t_1 \geq c_2$ et $t_g \leq c_2$. La fonction ϕ est donc déterminée par la valeur $\phi(\begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ \varpi^{c_2}1_g & 1_g \end{pmatrix})$ et notre espace est de dimension au plus 1. A partir des formules ci-dessus, on vérifie sans difficulté qu'il contient une fonction non nulle de support $Q(F) \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ \varpi^{c_2}1_g & 1_g \end{pmatrix} K(n)$.■

Si $c_1 = 0$, on note $\phi^0_{\chi_1,\chi_2,s}$ l'unique fonction de support $Q(F).K(n)$ et valant 1 en la matrice identité. Si $c_2 = 0$, on note $\phi^{0*}_{\chi_1,\chi_2,s}$ l'unique fonction de support $Q(F)\iota_g K(n)$ valant 1 en la matrice ι_g.

Corollaire 3.1.4. *Si $c_1 = 0$ (resp. si $c_2 = 0$), la function $\phi^0_{\chi_1,\chi_2,s}$ (resp. $\phi^{0*}_{\chi_1,\chi_2,s}$) est l'unique fonction de $I(\chi_1, \chi_2, s)$ telle que*

$$\phi(g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \chi_1\chi_2(det(d))\phi(g)$$

et valant 1 en 1_{2g} (resp. en ι_g). De plus, si χ_1 est non ramifié (i.e. $c_1 = 0$), on a

$$\phi^0_{\chi_2,\chi_1,s}(x) = \chi_2(\varpi)^{-ng} q^{n(s+\frac{g(g+1)}{4})} \chi_1\chi_2(\nu_G(x))^g \phi^0_{\chi_1^{-1},\chi_2^{-1},s}(x \begin{pmatrix} 0_g & -1_g \\ \varpi^n.1_g & 0_g \end{pmatrix}^{-1})$$

Preuve. Pour la première partie, le cas $c_1 = 0$ est trivial et le cas $c_2 = 0$ résulte de légalité

$$\begin{pmatrix} 1_g & -1_g \\ 0_g & 1_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ 1_g & 1_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_g & -1_g \\ 0_g & 1_g \end{pmatrix} = \iota_g$$

Pour la deuxieème partie, on voit que les deux fonctions de part et d'autre de l'égalité appartiennent à $I(\chi_2, \chi_1, s)$ et on même support $Q(F)\iota_g K(n)$. Un calcul direct montre qu'ils ont la même valeur en ι_g d'òu le résultat.■

3.1.5. *Opérateur d'entrelacement.* On conserve les notations et convention du paragraphe précédent et on considère l'opérateur d'entrelacement local M_s de $I(\chi_1, \chi_2, s)$ dans $I(\chi_2, \chi_1, -s)$ défini par l'intégrale:

$$M_s(\phi)(g) := \int_{N_Q(F)} \phi(\iota_g ng)dn$$

Ici dn est la mesure sur $N_Q(F)$ normalisée telle que $N_Q(O_F)$ est de mesure totale 1. Cet opérateur est bien défini lorsque $Re(s) >> 0$ et se prolonge méromorphiquement au plan complexe.

Corollaire 3.1.6. *On suppose que $c_1 = 0$ et $c_2 = n > 0$, alors on a:*

$$M_s(\phi^0_{\chi_1,\chi_2,s})(x) = q^{-ng(g+1)/2}.\phi^0_{\chi_2,\chi_1,-s}(x) =$$
$$\chi_2(\varpi)^{-ng}q^{-n(s+\frac{g(g+1)}{4})}\chi_1\chi_2(\nu_G(x))^g\phi^0_{\chi_1^{-1},\chi_2^{-1},-s}(x\begin{pmatrix} 0_g & -1_g \\ \varpi^n.1_g & 0_g\end{pmatrix}^{-1}).$$

Preuve. Par le lemme précédent, $M_s(\phi^0_{\chi_1,\chi_2,s})$ est un multiple de $\phi^0_{\chi_2,\chi_1,-s}$. Puisque $\phi^0_{\chi_2,\chi_1,s}$ est de support $Q(F)\iota_g K(n)$, le coefficient est donné par la valeur

$$\int_{N_Q(F)} \phi^0_{\chi_1,\chi_2,s}(\iota_g n \iota_g)dn = \int_{\overline{N}_Q(\varpi^n O_F)} dn = q^{-ng(g+1)/2}.$$

La première égalité venant du fait que $\phi^0_{\chi_1,\chi_2,s}$ est de support $Q(F)K(n)$ et que $Q(F)K(n)\cap \overline{N}_Q(F) = \overline{N}_Q(\varpi^n O_F)$. La seconde résulte du corollaire précdent. ■

3.1.7. *Définition adélique.* On donne maintenant une définition adélique des série d'Eisenstein Siegel. Soient χ_1, χ_2 des caractères de Hecke, on définit $I(\chi_1, \chi_2, s)$ comme l'ensemble des fonctions lisses sur $G(\mathbb{A})$ à valeurs complexes telles que

$$\phi(\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_2\end{pmatrix} x) = \chi_1(det(a_1))\chi_2(det(a_2))\left|\frac{det(a_1)}{det(a_2)}\right|^{s+\frac{g+1}{4}}\phi(x)$$

pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ et $a_1, a_2 \in GL_g(\mathbb{A})$. Toute fonction $\phi \in I(\chi_1, \chi_2)$ est invariante à gauche par $Q(\mathbb{Q})$, nous considérons donc la série d'Eisenstein $E_{\mathbb{A}}(x, s; \phi)$ définie par

$$E_{\mathbb{A}}(x, s; \phi) := \sum_{\gamma \in Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \phi_\chi(\gamma x)$$

pour tout $x \in G(\mathbb{A})$. Cette série converge absolument lorsque $Re(s) >> 0$ et se prolonge méromorphiquement au plan complexe.

On note $K_0(N)$ le sous-groupe ouvert compact de $G(\hat{\mathbb{Z}})$ des matrices triangulaire par bloc modulo N et $K_1(N) \subset K_0(N)$ le sous-groupe des matrices γ telles que $det(d_\gamma) \equiv 1 \pmod N$. On considère la fonction $\phi_s = \phi_{\chi,N,s}$ sur $G(\mathbb{A})$ de support $Q(\mathbb{A}).K_0(N)$ telle que

$$\phi_s(g) = j(k_\infty, i1_g)^{-k}\chi_{\mathbb{A}}(det(d_q))\chi_N(det(d_k))\left|\frac{det(a_q)}{det(d_q)}\right|_{\mathbb{A}}^{s+\frac{g+1}{4}}$$

pour tout $g = qkk_\infty \in Q(\mathbb{A}).K_0(N).K_\infty$. On peut décomposer ϕ en produit de fonctions ϕ_v avec v parcourant l'ensemble des places de v. Pour $v = \infty$, $\chi_\infty = sgn^k$ et

$$\phi_\infty(g_\infty) = \phi_{\infty,k,s}(g_\infty) = j(k_\infty, i1_g)^{-k}\chi_\infty(det(d_{q_\infty}))\left|\frac{det(a_\infty)}{det(d_\infty)}\right|^{s+\frac{g+1}{4}}$$

pour tout $g_\infty = q_\infty k_\infty$ avec $k_\infty \in K_\infty$ et $q_\infty \in Q(\mathbb{R})$. Pour chaque place v finie, soit χ_v le caractère $\mathbb{Q}_v^\times$ associé à χ et soit $\chi_{0,v}$ le caractère trivial. Avec les notations des paragraphes précdents, on a

$$\phi_{v,s} = \phi^0_{\chi_{0,v},\chi_v,s}$$

On vérifie facilement que $E(z,s;\chi,N)$ est la forme holomorphe associée à la série d'Eisenstein adélique $E(x, s+k/2-(g+1)/2; \phi^0_{\chi,N,s+k/2-(g+1)/2})$.

Plus généralement, on a une décomposition $I(\chi_{\mathbb{A}},1,s) = \otimes'_v I(\chi_v,1,s)$ et pour toute fonction $\phi_N \in \otimes_{v|N} I(\chi_v,1,s)$, on note $E(z,s;\chi,\phi_N)$ la la forme holomorphe associée à la série d'Eisenstein adélique $E(x, s+k/2-(g+1)/2, \tilde{\phi}_{N,s+k/2-(g+1)/2})$ avec $\tilde{\phi}_{N,s}(x) = \phi_{N,s}(x_N)\phi^0_{N,\chi,s}(x^N)$ où $x = x_N.x^N$ est la décomposition de x suivant les places divisant N et premières à N respectivement.

Remarquons qu'avec les notations de Shimura [Sh95], on a $\phi_{\chi,N,s}(x) = \mu(x)\epsilon(x)^{-s-\frac{g+1}{4}}$ et

$$E_{\mathbb{A}}(x,s;\phi_{\chi,N,s}) = E_{\mathbb{A}}(x, s+\frac{g+1}{4}; \chi, K_0(N)).$$

Remarque: Le lecteur prendra garde au décalage de $\frac{g+1}{4} - k/2$ du choix de s dans ce paragraphe avec celui du paragraphe 3.1.1. Ce dernier est le choix "classique", alors qu'ici le choix est celui de Langlands (i.e. avec l'équation fonctionelle $s \mapsto -s$).

3.2. **Equation fonctionelle.** On reprend les notations du paragraphe 3.1.7 et on définit un opérateur d'entrelacement $M_{\mathbb{A},s}$ de $I(\chi_1,\chi_2,s)$ dans $I(\chi_2,\chi_1,s)$ par l'intégrale:

$$M_{\mathbb{A}}(\phi)(x) = \int_{N_Q(\mathbb{A})} \phi(\iota_g n x) dn$$

Bien entendu, $M_{\mathbb{A}}$ est le produit des opérateurs locaux M_v pour v parcourant les places de $\mathbb{Q}$. Le principal mérite de cet opérateur global est le équation fonctionelle dûe Langlands [MW]. On a:

$$E_{\mathbb{A}}(g,s;\phi) = E_{\mathbb{A}}(g,-s;M_{\mathbb{A}}(\phi))$$

Le but de ce paragraphe est d'expliciter cette formule dans certains cas particuliers.

3.2.1. La méthode de Gindikin-Karpelevitch fournir le calcul de l'opérateur d'entrelacement aux places non ramifiées et à l'infini.

Soit v est une place finie ne divisant pas N. Pour tout caractère χ_v de $\mathbb{Q}_v^\times$, on pose

$$a_{g,v}(s,\chi_v) = L(2s+(1-g)/2,\chi_v)\prod_{i=1}^{[g/2]} L(4s+2i-g,\chi_v^2)$$

$$b_{g,v}(s,\chi_v) = L(2s+(1+g)/2,\chi_v)\prod_{i=1}^{[g/2]} L(4s-2i+g+1,\chi_v^2)$$

Alors, on a (Voir par exemple [PSR]):

$$M_v(\phi_{\chi_{1,v},\chi_{2,v},s}) = \frac{a_{g,v}(s,\chi_{1,v}/\chi_{2,v})}{b_{g,v}(s,\chi_{1,v}/\chi_{2,v})}\phi_{\chi_{2,v},\chi_{1,v},-s}$$

Pour $v=\infty$, nous avons [KR]:

$$M_\infty(\phi_{\infty,k,s}) = \gamma_k(s)\phi_{\infty,k,-s}$$

avec

$$\gamma_k(s) = 2^{g(1-2s)}\pi^{g(g+1)/2}\frac{\Gamma_g(2s)}{\Gamma_g(\frac{4s+2k+g+1}{4})\Gamma_g(\frac{4s-2k+g+1}{4})}$$

où on a posé

$$\Gamma_g(s) := \pi^{g(g-1)/4}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{1}{2})\ldots\Gamma(s-\frac{g-1}{2})$$

3.2.2. *Produit de séries de Dirichlet.* Nous posons

$$a_g(s,\chi) = \prod_{v,v(N)=0} a_{g,v}(s,\chi_v),$$
$$b_g(s,\chi) = \prod_{v,v(N)=0} b_{g,v}(s,\chi_v),$$
$$\Lambda_g^N(s,\chi) = L(2s,\chi)\prod_{i=1}^{[g/2]} L^N(4s-2i,\chi^2)$$

Si N est le conducteur de χ, on note $\Lambda_g(s,\chi) = \Lambda_g^N(s,\chi)$. Soit $\epsilon(s,\chi)$ le facteur epsilon intervenant dans l'équation fonctionelle

$$G_\epsilon(s)L(s,\chi) = \epsilon(s,\chi)G_\epsilon(1-s)L(1-s,\chi^{-1}),$$

avec

$$\epsilon(s,\chi) = G(\chi)N^{-s}$$

où $G(\chi)$ désigne la somme de Gauss de χ et avec

$$G_\varepsilon(s) = \pi^{\frac{-s+\varepsilon}{2}}\Gamma(\frac{-s+\varepsilon}{2})$$

où $\varepsilon = (1+\chi(-1))/2$. On pose alors

$$\epsilon_g(s,\chi) := \epsilon(2s-g,\chi)\prod_{i=1}^{[g/2]}\epsilon(4s+2i-2g-1,\chi^2)$$
$$\gamma_g^\varepsilon(s) := G_\varepsilon(2s-g)\prod_{i=1}^{[g/2]}G_0(4s+2i-2g-1)$$
$$\delta_g^\varepsilon(s) := G_\varepsilon(1-2s+g)\prod_{i=1}^{[g/2]}G_0(2-4s-2i+2g)$$

On vérifie aisément que

$$\gamma_g^\varepsilon(s)a_g(s-\frac{g+1}{4},\chi) = \delta_g^\varepsilon(s)\epsilon_g(s,\chi)\Lambda_g(\frac{1+g}{2}-s,\chi^{-1}) \tag{3.2.2.a}$$

3.2.3. *Une équation fonctionnelle explicite.* Pour tout $z \in \mathcal{H}_g$, on pose

$$\mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x, s, \chi, N) = \frac{\Gamma_g(s+k)}{\Gamma_g(s+k/2)} \gamma_g^{\varepsilon}(s+k/2) \Lambda^g(s+k/2, \chi) E_{\mathbb{A}}(x, s; \chi, N)$$

Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 3.2.4. *Supposons que χ soit un caractère de Dirichlet de conducteur N et k un entier tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. Alors la série d'Eisenstein $G_k(z, s; \chi, N)$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante:*

$$\mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x, s; \chi, N) = \epsilon_g(s + \frac{k}{2}, \chi) N^{-sg-kg/2} \mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x\tau_N^{-1}, \frac{g+1}{2} - k - s; \chi^{-1}, N)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $x \in Sp_{2g}(\mathbb{A})$.

Preuve. Pour tout $x \in Sp_{2g}(\mathbb{A})$, on a

$$E_{\mathbb{A}}(x, s; \chi, N) = E_{\mathbb{A}}(x; \phi_{\chi, N, s+\frac{k}{2}-\frac{g+1}{4}})$$

D'après les formules du 3.2.1 et les corollaires 3.1.4 et 3.1.6, pour tout $x \in Sp_{2g}(\mathbb{A})$, on a

$$M_{\mathbb{A}}(\phi_{\chi,N,s'})(x) = \gamma_k(s') \frac{a_g(s', \chi)}{b_g(s', \chi)} N^{-sg-kg/2} \phi_{\chi^{-1}, N, -s}(x\tau_{N,g}^{-1})$$

avec $\tau_{N,g} = diag(1_g, N.1_g)\iota_g$ et $s' = s + k/2 - (g+1)/4$. On en déduit aisément l'équation fonctionnelle voulue à l'aide de l'équation fonctionelle de Langlands et en utilisant la formule (3.2.2.a) et l'expression de $\gamma_k(s)$. Notons que le traitement du facteur archimédien se fait au moyen des equations fonctionelles des fonctions Gamma et de la formule de duplication de Legendre. Le lecteur peut également se reférer á l'article de Mizumoto [Mi]. ∎

Lorsque N contient des facteurs premiers ne divisant pas le conducteur de χ, l'équation fonctionelle n'est pas aussi simple. Introduisont la section $\phi^1_{\chi,N,s}$ par la formule suivante:

(3.2.4.a)
$$\phi^1_{\chi,N,s} := \epsilon_g(s + \frac{g+1}{4}, \chi) \prod_{v|N} \frac{b_v(-s,\chi)}{a_v(s,\chi)} M_N(\phi^0_{\chi^{-1},N,-s})$$

Pour toute fonction $\phi_{N,s} \in \bigotimes_{v|N} I(\chi_v, s+k/2-1)$, soit $\tilde{\phi}_{N,s} \in I(\chi_{\mathbb{A}}, s+k/2-1)$ la fonction qui s'eétend par les section sphériques canoniques aux places ne divisant pas N. On pose

$$\mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x, s, \chi, \phi_N) = \frac{\Gamma_g(s+k)}{\Gamma_g(s+k/2)} \gamma_g^{\varepsilon}(s+k/2) \Lambda^g(s+k/2, \chi) E_{\mathbb{A}}(x; \tilde{\phi}_{N, s+\frac{k}{2}-\frac{g+1}{4}})$$

Alors l'équation fonctionelle de Langlands se transcrit par

(3.2.4.b)
$$\mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x, s; \chi, N) = \mathbf{E}_{\mathbb{A}}(x, \frac{g+1}{2} - k - s; \chi^{-1}, \phi^1_{\chi,N})$$

On considère l'évaluation en $s = 0$ suivante

$$G_k(z; \chi, \phi_N) := N^{\frac{g(g+1}{2}} \mathbf{E}_{\mathbb{A}}(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \tau_N^{-1}, \frac{g+1}{2} - k; \chi^{-1}, \phi_N)$$

On va voir que cette série d'Eisenstein s'interpole p-adiquement lorsque k et la p-partie du conducteur de χ varient.

3.3. **Coefficients de Fourier.**

3.3.1. Soit S un ensemble de nombres premiers divisant N. Posons $N_S = \prod_{v\in\Sigma} q_v^{v(N)}$. Soit $\eta_S \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que

$$(\eta_S)_v = \begin{cases} \iota_g & \text{si } v \in S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit χ un caractère de Dirichlet de niveau N et k un entier tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. On considère la série d'Eisenstein

$$E^S(z, s; \chi, N) = E_{\mathbb{A}}(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \eta_S; \phi_{\chi,N,s+\frac{k}{2}-\frac{g+1}{4}})$$

Le but de cette section est d'étudier les coefficients de Fourier de l'évaluation en $s = 0$ de cette série d'Eisenstein en vue d'une interpolation p-adique qui sera conduite dans la section quatre. On va calculer les coefficients de Fourier de cette dernière suivant une méthode dûe à Shimura [Sh83] dont on reprendra librement les notations.

Lemme 3.3.2. *Supposons que S soit non vide et posons $g_\infty = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$, on a:*

$$E^S(z, s; \chi, p^r) = \sum_{\gamma\in\iota_g N_P(\mathbb{Q})} \phi_{\chi,N,s+k/2-\frac{g+1}{4}}(\gamma g_\infty \eta_\Sigma)$$

Preuve. La somme devrait porter sur un système de représentants de $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$. Un représentant γ intervient dans la somme si et seulement si $\gamma\eta_\Sigma \in K_0(N)$. Cela entraine que $det(c_\gamma) \in \mathbb{Z}_v^\times$ pour tout $v \in \Sigma$ et donc que $det(c_\gamma) \neq 0$, c'est à dire $\gamma \in P(\mathbb{Q})\iota_g P(\mathbb{Q})$. Comme $\iota_g N_P(\mathbb{Q})$ est un système de représentants de $P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{Q})\iota_g P(\mathbb{Q})$, le lemme en découle.$\blacksquare$

3.3.3. Soit v une place de $\mathbb{Q}$. Pour tout $x, y \in S_g(\mathbb{Q}_v)$, on pose $\psi_v(x_v y_v) = \mathbf{e}_v(tr(x_v y_v))$Âº avec $\mathbf{e}_v(t_v) = e^{2i\pi(-\tilde{t}_v)}$ où $\tilde{t}_v \in \mathbb{Q}$ est tel que $t_v - \tilde{t}_v \in \mathbb{Z}_v$ si $v < \infty$ et $\mathbf{e}_\infty(t_\infty) = e^{2i\pi t_\infty}$ pour tout $t_\infty \in \mathbb{R}$. On définit également $\psi_{\mathbb{A}}(xy) := \prod_v \psi_v(x_v y_v)$ pour tout $x, y \in S_g(\mathbb{A})$ avec $x = (x_v)_v$ et $y = (y_v)_v$. Pour tout $s \in S_g$, on note $\tau(s) = \begin{pmatrix} 1_g & s \\ 0 & 1_g \end{pmatrix}$ et $\tau(s)^* = \iota_g \tau(s) \iota_g^{-1}$. Soient $g_f \in G(\mathbb{A}_f)$ et $h \in S_g(\mathbb{Q})$, on pose

$$b(g_\infty g_f, h, s, \chi, N) := \int_{S_g(\mathbb{A})/S_g(\mathbb{Q})} E_{\mathbb{A}}(\tau(s) g_\infty g_f, s; \chi, N) \psi_{\mathbb{A}}(hs) ds$$

Si $g_f = \eta_S$ avec S non vide, on a donc par un calcul similaire à celui de [Sh83]:

$$b(g_\infty \eta_S, h, s, \chi, N) = \int_{S_g(\mathbb{A})} \phi_{\chi,N,s}(\iota_g \tau(s)\eta_S g_\infty)\psi_{\mathbb{A}}(hs)ds =$$

$$\prod_{v<\infty} \int_{S_g(\mathbb{Q}_v)} \phi_{\chi_v,N_v,s}(\iota_g \tau(s_v)(\eta_\Sigma)_v)\psi_v(hs_v)ds_v \times$$

$$\int_{S_g(\mathbb{R})} \phi_{\chi_\infty,s}(\iota_g \tau(s_\infty)g_\infty)\psi_v(hs_\infty)ds_\infty =$$

$$N_S^{g(g+1)/2}\xi(y,h;k+s/2,s/2) \prod_{\substack{v|N \\ v\notin S}} \xi_v(\chi_v,h,s) \prod_{\substack{v<\infty \\ v(N)=0}} \alpha_v(h,\chi_v(q_v)q_v^{-k-2s})$$

avec

$$\xi(y,h;s,s') = \int_{S_g(\mathbb{R})} \psi_\infty(-hs)det(s+iy)^{-s}det(s-iy)^{-s'}ds$$

la fonction hyper-géométrique confluente étudiée par Shimura dans [Sh82],

$$\xi_v(\chi_v,h,s) := \int_{S_g(\mathbb{Q}_v)} \phi_{\chi_v,s}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s_p \end{pmatrix})\psi_p(hs_p)ds_p$$

et enfin pour tout $v<\infty$, $\alpha_v(h,t)\in\mathbb{Z}[[t]]$ désigne la série formelle de Siegel associée à h et v (voir par exemple [Sh83, (3.21)]).

Pour tout h comme ci-dessus (local ou global) et non dégénérée, on note D_h son discriminant (i.e. $D_h := (-1)^{[g/2]}2^{2[g/2]}det(h)$). Si h est équivalente à $diag(h',0)$ avec h' non dégénérée, on pose $D_h := D_{h'}$.

Rappelons que $\alpha_v(h,t)$ est une fraction rationelle qui lorsque g est impair est de la forme

$$\alpha_v(h,t) = P_v(h,t).(1-t)\prod_{i=1}^{(g-1)/2}.(1-q_v^{2i}t^2)\times\beta_v(h,t)$$

avec

$$\beta_v(h,t) = \begin{cases} (1-q_v^g)^{-1}\prod_{i=1}^{[g/2]}(1-q_V^{2g+1-2i}t^2)^{-1} & \text{si } h=0 \\ \prod_{i=1}^{[(g-r-1)/2]}(1-q_V^{2g-r-2i}t^2)^{-1} & \text{si } r \text{ est impair} \\ (1-\xi\theta^{r/2}q_v^{g-r/2})^{-1}\prod_{i=1}^{[(g-r)/2]}(1-q_v^{2g-r-2i}t^2)^{-1} & \text{si } r \text{ est pair non nul} \end{cases}$$

avec r le rang de h, $\theta = (\frac{-1}{q_v})$ et $\xi = (\frac{\varepsilon(h)}{p})$ où $\varepsilon(h)$ est l'unité de $\mathbb{Z}_v$ égal au quotient de $det(h_v)$ par une puissance de q_v et $P_h(t)$ est un polynôme ne dépendant que des diviseurs élémentaires de h dans $\mathbb{Z}_v$ et valant 1 si $D_h\in\mathbb{Z}_v^\times$. On vérifie aisément à partir des définitions que les fonctions $\xi_p(h,\chi_p,s)$ et respectivement $\alpha_v(h,t)$ ne dépendent que des diviseurs élémentaires de h dans $\mathbb{Z}_p$ respectivement $\mathbb{Z}_v$.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans le dernier chapitre de cet article pour construire une interpolation p-adique des series d'Eisenstein-Siegel.

Lemme 3.3.4. *Soit v une place finie divisant N. On note χ_v^1 la restriction de χ_v à $\mathbb{Z}_v^\times$. Alors, il existe un polynôme $R(h,\chi_v^1,v(N);T)$ en T à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}[1/q_v]$ ne dépendant que de h, χ_v^1 et de $v(N)$ tel que*

$$R(h,\chi_v^1,v(N);\chi_v(q_v)q_v^{-s}) = \xi_v(\chi_v,h,s) := \int_{S_g(\mathbb{Q}_v)} \phi_{\chi_v,s}(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & s_p\end{pmatrix})\psi_p(hs_p)ds_p$$

Preuve. Puis que l'énoncé est local, on le démontre avec les notations du paragraphe 3.1.2 $F=\mathbb{Q}_v$, $O=\mathbb{Z}_v$, $n=v(N)$, $\varpi_v = q_v$ et $q=\#(O/\varpi.O)$. On pose $\chi=\chi_v$, $\psi=\psi_v$ et on note $\phi_{\chi,s}=\phi_{frm[o]--,\chi,s}$. Pour tout matrice $T\in S_g(F)$, on pose $v(T)$ et on appelle valuation de T la valuation minimale des coefficients de T. Pour tout entier m, on note S_m^* l'ensemble des matrices de valuation m. Puisque le support de $\phi_{\chi,s}$ est $Q(F)K(n)$, on a

$$\phi_{\chi,s}(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & T\end{pmatrix}) = \begin{cases} 0 & \text{si } det(T)=0 \text{ ou si } T\in S_m^* \text{ avec } m>-n\\ \chi(det(T))|det(T)|^{-s-\frac{g+1}{4}} & \text{sinon}\end{cases}$$

En remarquant que $S_m^* = \varpi^m.S_0^*$, on en déduit que

$$\xi(\chi_v,h,s) := \int_{S_g(F)} \phi_{\chi,s}(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & T\end{pmatrix})\psi(h)dT =$$
$$\sum_{m=n}^{\infty}\chi(\varpi)^m q^{-mgs+\frac{g+1}{4}+mg^2}\int_{S_0^*}\chi(det(T))\psi(h\varpi^{-m}T)dT$$

Il est clair que $c_m := \int_{S_0^*}\chi(det(T))\psi(h\varpi^{-m}T)dT$ ne dépend que de $\chi|_{O^\times}$ et h et que $c_m\in\overline{\mathbb{Z}}[1/q]$. Pour démontrer le lemme. il suffit donc de montrer que c_m est nul pour m suffisament grand. Pour cela on décompose S_0^* en un nombre fini de classes modulo l'action de $1+\varpi^n M_g(O)$ par $x.T = x^tTx$. Soit $(T_i)_{i\in I}$ un systeme de reprśentant de ces classes. On a donc

$$c_m = \sum_i \chi(det(T_i).\int_{1+\varpi^n M_g(O)}\psi(\varpi^{-m}h^t xT_ix)dx$$

et il est aisé de vérifier que les termes de cette somme s'annulent lorsque m est supérieur à la somme du maximum des valuations des coefficients des T_i et du maximum des valuations des coefficients de h.■

Lemme 3.3.5. *Soit χ un caractère de Dirichlet et supposons que $S_1\sqcup S_2$ soit une partition de l'ensemble des premiers divisant le conducteur de χ. Alors, on a l'équation fonctionelle suivante*

$$N_{S_2}^{g(g+1)/2}.\prod_{v<\infty}\beta_v(h,\chi(q_v)q_v^{-k-2s})\prod_{v\in S_1}\xi_v(h,\chi_v,s) =$$
$$N_{S_1}^{r(g(g+1)/2}.\prod_{v<\infty}\beta_v(h,\chi(q_v)q_v^{2s-(g+1)})\prod_{v\in S_2}\xi_v(h,\chi_v,s)$$

Preuve. Cela résulte de l'équation fonctionelle du Théorème 3.2.4 et du calcul précédent en prenant pour N le conducteur de χ et avec S respectivement égale à S_1 et S_2.■

3.4. **Séries d'Eisenstein-Klingen.**

3.4.1. *Notations et définitions.* On pose $\mathbf{G} = GSp_4$. Soit $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ le sous-groupe parabolique de Klingen défini par

$$\mathbf{P} = \{\gamma \in \mathbf{G} | a_2(\gamma) = c_2(\gamma) = 0, c_3(\gamma) = d_3(\gamma) = 0, c_4(\gamma) = 0\}$$

On considère sa décomposition de Lévi $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ avec $\mathbf{N}$ son radical unipotent et $\mathbf{M}$ son sous-groupe de Lévi standard (i.e. contenant le tore des matrices diagonales). On fixe l'identifiera avec $GL_2 \times \mathbb{G}_m$ au moyen de l'isomorphisme défini par

$$(x,t) \mapsto m(x,t) = \begin{pmatrix} a_x & 0 & b_x & 0 \\ 0 & det(x)t^{-1} & 0 & 0 \\ c_x & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

pour tout $x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} \in GL_2$ et $t \in \mathbb{G}_m$. On considère le caractère de $\mathbf{P}$ défini par $\delta(m(x,t)n) = |det(x)^2 t^{-4}|_{\mathbb{A}}$ pour tout $x \in GL_2$, $t \in \mathbb{G}_m$ et $n \in \mathbf{N}$. On en fait uncaractère de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ en posant $\delta(g) = \delta(p)$ pour tout $g = pk$ avec $p \in \mathbf{P}(\mathbb{A})$ et $k \in \mathbf{G}(\hat{\mathbb{Z}}).K_\infty$.

Soit N un entier positif. On note $K_0(N)$ (resp. $K_1(N)$) le sous-groupe de $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ des matrices triangulaires supérieures (resp. unipotentes supérieures) modulo N.

On considère $V_0(N)$ (resp. $V_1(N)$) le sous-groupe de $\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ constitué des matrices dont la réduction modulo N appartient au Borel Standard (resp. son radical unipotent). On pose aussi $V_i'(N) := \tau_N V_i(N) \tau_N^{-1}$ avec $\tau_N = \mathrm{D}iag[1_2, N]\iota_2$. Le sous-groupe $V_0'[N]$ est donc l'ensemble des matrices $\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ telles que c_γ est triviale et d_γ est triangulaire supérieure modulo N. Pour tout sous-groupe de congruence Δ, on notera $\Delta_i(N) = \Delta \cap V_i[N]$.

3.4.2. *Série d'Eisenstein.* Soit $A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$, l'ensemble des fonctions lisses ϕ_s sur $\mathbf{G}(\mathbb{A})$, invariante à gauche par $\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})$ et telles que

- $\phi_s(ag) = \delta(a)^{s/2+1/2}\phi_s(g)$ pour tout $a \in \mathbf{Z_M}(\mathbb{R})$.
- Pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$, la restriction de $g.\phi_s$ à $\mathbf{M}(\mathbb{A})$ est une forme automorphe cuspidale.

Pour tout $\phi \in A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$, on considère la série d'Eisenstein:

$$E(\phi)(x) = \sum_{\gamma \in P^{2,1}(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{Q})} \phi(\gamma x)$$

Depuis Langlands (cf. [MW, Thm IV.1.8.a]), on sait que cette série est convergente lorsque $Re(s) >> 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe de la variable s sur $\mathbb{C}$.

3.4.3. Soient un entier naturel $k \geq 2$ et χ un caractère de Dirichlet modulo N tel que:

$$\chi(-1) = (-1)^k \tag{3.4.3.a}$$

Soit h une forme modulaire cuspidale elliptique de poids k, niveau N et de nebentypus ψ. On note $h_{\mathbb{A}}$ la forme automorphe correspondante sur $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. On suppose que $h_{\mathbb{A}}$ est propre pour les opérateurs de Hecke de support premier N. Par hypothèse, elle vérifie également

$$h_{\mathbb{A}}(gk) = \psi(d_k)h_{\mathbb{A}}(g)$$

pour tout $g \in GL_2(\mathbb{A})$ et $k \in K_0(N)$.

On définit la fonction $\phi = \phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}$ sur $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ par $\phi(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{P}(\mathbb{A}).V_0'(N)K_\infty$ et pour $x = p_x u_x k_\infty \in \mathbf{P}(\mathbb{A}).V_0'[N]K_\infty$, on pose

$$\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}(x) = \psi(d_1(u_x))\chi_{\mathbb{A}}^{-1}(d_4(p_x)d_4(u_x))j_k(k_\infty, i)^{-1}h_{\mathbb{A}}(\pi_1(p_x))\delta(x)^{s/2+1/2}.$$

On vérifie facilement que $\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}(\gamma x) = \phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}(x)$ pour $\gamma \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})$ et on pose pour $s \in \mathbb{C}$,

$$E_{\mathbb{A}}(x, s; h_{\mathbb{A}}, \chi, N) = E(\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s})(x) = \sum_{\gamma \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})\backslash \mathbf{G}(\mathbb{Q})} \phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}(gx)$$

Cette série est convergente pour $\Re(s) >> 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, on a la relation:

$$E_{\mathbb{A}}(xu, s; h_{\mathbb{A}}, \chi) = \psi(d_1(u))\chi(d_4(u))E_{\mathbb{A}}(x, s; h_{\mathbb{A}}, \chi)$$

pour tout $u \in V_0'(N)$. On note $E(z, s; h, \chi, N)$ la forme modulaire (non holomorphe) correspondante sur $\mathcal{H}_2$.

3.4.4. Pour toute forme modulaire elliptique f de poids k et niveau N propre pour les opérateurs de Hecke, on pose

$$G_{\mathbb{A}}(x, s; f_{\mathbb{A}}, \chi, N) := \frac{\pi.L^N(\hat{\pi}(f) \otimes \chi, 2s+1)}{(2i)^k 2^{2s+k}(s+1+k/2)} E_{\mathbb{A}}(x\tau_N^{-1}, s; (f|_k\tau_N)_{\mathbb{A}}, \chi, N)$$

On note $G(z, s; f, \chi, N)$ la forme de Siegel de poids k associée à cette forme automorphe adélique.

3.4.5. Il est utile de généraliser les définitions précédentes. Soit $\pi = \pi(f)$ la représentation cuspidale engendrée par $f_{\mathbb{A}}$. On note $A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)_{\pi,\chi}$ le sous-espace des fonctions de ϕ telles que pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$, $\phi(m(x,t)g) = \chi_{\mathbb{A}}(t)\phi(m(x,1)g$ et $m \mapsto \phi(m(x,1)g)$ est une forme cuspidale sur $GL_2(\mathbb{A})$ engendrant π. On voit aisément que $A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)_{\pi,\chi}$ s'identifie canoniquement à $I(\pi, \chi, s)$ l'ensemble des fonctions ϕ de $G(\mathbb{A})$ dans l'espace des formes cuspidales correspondant à π telles que $\phi(m(x,t)g) = \chi_{\mathbb{A}}^{-1}(t)x.\phi(g)\delta(m(x,t))^{s/2+1/2}$.

On a également une définition locale de ces induites paraboliques. Soit v une place de $\mathbb{Q}$ et soient respectivement σ_v et χ_v une représentation irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ et un caractère de $\mathbb{Q}_v^\times$. On note $I(\sigma_v \otimes \chi_v, s)$ l'induite parabolique définie comme l'ensemble des fonctions lisses ϕ_v de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$ dans π_v vérifiant la relation

$$\phi_{v,s}(m(x,t)ng) = \chi_v^{-1}(t)\sigma_v(x).\phi_{v,s}(g)\delta(m(x,t))^{s/2+1/2}\}$$

pour tout $t \in \mathbb{Q}_v^\times, x \in GL_2(\mathbb{Q}_v), g \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$. Pour une telle fonction $\phi_{v,s}$, on pose $\phi_v = \phi_{v,-1/2}$ de telle sorte que l'on a la relation $\phi_{v,s}(x) = \phi_v(x)\delta(x)^{s/2+1/2}$.

3.4.6. On va considérer certaines fonctions lisses $\phi_s \in I(\pi(f), \chi, s) \subset A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$. Avec $h = f|\tau_N$, on a déjà consideré dans le paragraphe précdent la fonction donné par $\phi_{h_\mathbb{A},\chi,s} \in I(\pi(f), \chi, s)$ avec et $\phi_{h_\mathbb{A},\chi,s}(x) = \phi_{h_\mathbb{A},\chi}(x)\delta(x)^{s/2+1/2}$.

Pour définir des sections ϕ_s plus générales, nous allons les décomposer en produit de sections locales. Pour cela, il convient de fixer un isomorphisme

$$\pi(f) \cong \sigma_k \otimes \bigotimes_v \pi_v \tag{3.4.6.a}$$

avec σ_k la representation unitaire de $GL_2(\mathbb{R})$ telle que $\sigma_k|_{SL_2(\mathbb{R})}$ est isomorphe à la série discrète $\mathcal{D}_k^+$ de $SL_2(\mathbb{R})$ holomorphe et de K-type minimal $k_\infty \mapsto j(k_\infty, \mathbf{i})^{-k}$.

Pour chaque place finie v , on fixe un nouveau vecteur $\varphi_v \in \pi_v$. Si v est premier à N, on considère $\phi^0_{\pi_v,\chi_v,s} \in I(\pi_v \otimes \chi_v, s)$ l'unique section invariante à droite par $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$ et telle que $\phi^0_{\pi_v,\chi_v,s}(1) = \varphi_v$.

Pour $v = \infty$, on fixe φ_∞ un vecteur de plus bas poids dans la série discrète σ_k et on considère $\phi_{\infty,s} \in I(\sigma_k, s)$ l'unique section telle que $\phi_{\infty,s}(gk_\infty) = j(k_\infty, \mathbf{i})^{-k}\phi_{\infty,s}(g)$ et $\phi_{\infty,s}(1) = \varphi_\infty$.

On en déduit une décomposition $\phi_{h_\mathbb{A},\chi,s} = \prod_v \phi_{h_\mathbb{A},\chi,v,s}$ telle que $\phi_{h_\mathbb{A},\chi,v,s} = \phi^0_{\pi_v,\chi_v,s}$ pour tout v premier à N et $\phi_{h_\mathbb{A},\chi,\infty,s} = \phi_{\infty,s}$.

Soit maintenant une section quelconque $\phi_{N,s} \in \otimes_{v|N} I(\pi_v, \chi_v, s)$. On peut la décomposer sous la forme $\phi_{N,s} = \prod_{v|N} \phi_{v,s}$ avec $\phi_{v,s} \in I(\pi_v(\otimes\chi_v, s)$. On pose alors

$$\tilde{\phi}_{N,s} = \phi_{N,s} \otimes_{v\nmid N} \phi_{h_\mathbb{A},\chi,v,s} \in I(\pi(f), \chi, s) \subset A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$$

Etant donnée une fonction $\phi_{N,s}$ comme ci-dessus, on pose $\phi_N = \phi_{N,1-k/2}$ et on considére alors les séries d'Eisenstein suivantes:

$$E_\mathbb{A}(x, s; f, \chi, \phi_N) = \sum_{\gamma\in\mathbf{P}(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{Q})} \tilde{\phi}_{N,s}(gx)$$

$$G_\mathbb{A}(x, s; f, \chi, \phi_N) := \frac{\pi.L^N(\hat{\pi}(f)\otimes\chi, 2s+1)}{(2i)^k 2^{2s+k}(s+1+k/2)} E_\mathbb{A}(x\tau_N^{-1}, s; f, \chi, \phi_N)$$

$$G_k(z; f, \chi, \phi_N) := \frac{N^{3-k/2}}{\pi^4 i^k 2^{3k-2}} G(Nz, 1-k/2; f, \chi, \phi_N)$$

Lorsque $\phi_N = \phi^0_{f|\tau_N,\chi,N}$, on retrouve les séries d'Eisenstein que nous avons définies aux paragraphes précdents (remplacer ϕ_N par N dans les notations).

3.5. **Opérateurs d'entrelacement.**

3.5.1. *Définition.* On considère $M_{\mathbb{A}}$ désigne l'opérateur d'entrelacement défini par

$$M_{\mathbb{A}} : A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s) \to A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), -s)$$

défini par

$$M(\phi)(x) = \int_{\mathbf{N}(\mathbb{A})} \phi(w_0 nx)dn \quad \text{avec} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet opérateur n'est à priori défini que lorsque $s >> 0$ mais il admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ [MW, Thm IV.1.8.b]. Une des propriétés fondamentales de cet opérateur est l'équation fonctionnelle:

$$E(\phi) = E(M(\phi))$$

Il sera également très utile pour le calcul des termes constants de $E(\phi)$.

Pour $Re(s) >> 0$ et toute place v de $\mathbb{Q}$, on définit M_v par

$$M_v(\phi_{v,s})(g) = \int_{\mathbf{N}(\mathbb{Q}_v)} \phi_{v,s}(w_0 ng)dn$$

pour tout $\phi_{v,s} \in I(\pi_v \otimes \chi_v, s)$. On vérifie facilement que M_v entrelace $I(\sigma_v \otimes \chi_v, s)$ avec $I(\sigma_v \otimes \chi_v^{-1}, -s)$.

Si $\pi = \otimes'_v \pi_v$ est une représentation cuspidale de $GL_2(\mathbb{A})$, $I(\pi \otimes \chi, s) = \otimes'_v I(\pi_v \otimes \chi_v, s)$ s'injecte naturellement dans $A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$ de la façon suivante. Soit $\phi_s \in I(\pi \otimes \chi, s)$, son image dans $A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$ est la fonction automorphe définie par $g \mapsto \phi_s(g)(1)$. Alors, la restriction de $M_{\mathbb{A}}$ à $I(\pi\otimes\chi, s)$ entrelace cette dernière avec $I(\pi\otimes\chi^{-1}, -s)$ et on a $M_{\mathbb{A}} = \otimes'_v M_v$.

Lemme 3.5.2. *Soit M_∞ l'opérateur d'entrelacement archimedien entre $I(\sigma_k, \chi_\infty, s)$ et $I(\sigma_k, \chi_\infty, -s)$. Alors on a:*

$$M_\infty(\varphi_{\infty,s}) = a_0(2s+1-k)a_{-k}(2s)a_0(k+2s-1)\varphi_{\infty,-s}$$

avec pour tout entier i,

$$a_i(s) = \pi^{1/2}\frac{\Gamma((s-|i|)/2)}{\Gamma((s-|i|+1)/2)}\prod_{j=1}^{|i|}\frac{s-j}{s+|i|+1-2j}$$

En particulier pour $s = 1 - k/2$, on obtient:

$$M_\infty(\varphi_{1-k/2}) = \pi^2 2^{k-1}\varphi_{k/2-1}$$

Preuve. Posons $G' = Sp_4(\mathbb{R})$, D son tore diagonal et B le Borel standard. Soit $L = GL_2(\mathbb{R})^\pm = \{m(x,1)\ x \in GL_2(\mathbb{R})\ |det(x) = \pm 1\}$ et $A = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times = \{m(t,t')\ t,t' \in \mathbb{R}_+^\times\}$.

On va se ramener au cas du rang 1 en décomposant M_∞ en opérateurs d'entrelacements associées au symétries élémentaire du groupe de Weyl de G. Pour cela, on doit d'abord plonger $I(\sigma_k, s)$ dans une serie principale induite de B. Pour $k > 0$, on a la suite exacte de representations de $L(\mathbb{R})$:

$$0 \to \sigma_k \to Ind_{B_L}^{L}(\delta_L \otimes [k-1] \to W_k \to 0$$

où δ_L est le caractère de $\{diag(\pm 1, \pm 1\}$ tel que $\delta_L(-Id) = (-1)^{k+1}$ et $[k]$ est le caractère de B_L, le Borel standard de $L = SL_2(\mathbb{R})$, défini par

$$[k](\begin{pmatrix} t & * \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}) = t^k$$

et W_k est une representation de dimension finie de L. Soit

$$\delta_G : \{diag(\pm 1, \pm 1 \ \pm 1, \pm 1\} \cap Sp_4(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$$

défini par $\delta_G(t_1, t_2, t_1, t_2) = (t_1 t_2)^k$. Soit λ_i le poids de $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie du rore diagonal de $Sp_4(\mathbb{R})$ définis par

$$\lambda_i(diag(x_1 x_2, -x_1, -x_2)) = x_i$$

On a:

$$I(\sigma_k, s) \hookrightarrow Ind_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}^{\mathbf{G}'(\mathbb{R})}(Ind_{L_B}^{L}(\delta_L \otimes e^{(k-1)\lambda_1}) \otimes e^{-2s\lambda_2})$$

et par transitivité de l'induction unitaire, on obtient

$$Ind_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}^{\mathbf{G}'(\mathbb{R})}(Ind_{B_L}^{L}(\delta_L \otimes e^{(k-1)\lambda_1}) \otimes e^{-2s\lambda_2} = Ind_B^{G'} \delta_G \otimes e^{(k-1)\lambda_1 - 2s\lambda_2}$$

Soit Ψ_s l'image de Φ_s dans cette dernière induction. On va déterminer l'image de Ψ_s par un opérateur d'entrelacement défini sur cette dernière induction et que l'on va pouvoir decomposer en trois opérateurs élementaires. Pour tout caractère ν de B, on considère $I(\nu) = Ind_B^G \nu \otimes e^{\rho_B}$ où $\rho_B = \lambda_1 + 2\lambda_2$ est la demi-somme des racines intervenant dans le radical unipotent de B.

Soient s_c et s_l les symétries élémentaires du groupe de Weyl de $Sp_4(\mathbb{R})$ associées respectivement aux racines simples $\lambda_1 - \lambda_2$ et $2\lambda_1$. En identifiant s_c et s_l avec les éléments du normalisateur $N(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t}$ dans Sp_4, on a:

$$s_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $w \in N(\mathfrak{t})$, soit $A(w)$ l'opérateur défini par

$$A(w).f(x) = \int_{w\overline{N}w^{-1} \cap N} f(w^{-1}nx)dn$$

C'est un opérateur de $I(\nu)$ dans $I(\nu \circ w)$. On a $w_0 = s_c.s_l.s_c$ et $A(w_0) = A(s_c) \circ A(s_l) \circ A(s_c)$. Pour tout caractère ν, soit $\Psi_\nu \in I(\nu)$ tel que $\Psi_\nu(k_\infty) = j(k_\infty, \mathbf{i})^{-k}$. Il existe un nombre complexe $a(w, \nu)$ tel que $A(w).\Psi_\nu = a(w, \nu)\Psi_{\nu \circ w}$ de tel sorte que

$$A(s_c.s_l.s_c).\Psi_\nu = a(s_c, \nu \circ s_c s_l) a(s_l, \nu \circ s_c) a(s_c, \nu) \Psi_{\nu \circ s_c s_l s_c}$$

Pour $\nu = exp((k-1)\lambda_1 + (2s-2)\lambda_2)$, on a $\nu \circ s_c = exp((2s-2)\lambda_1 + (k-1)\lambda_2)$,$\nu \circ s_c s_l = exp((-2s+2)\lambda_1 + (k-1)\lambda_2)$ et $\nu \circ s_c s_l s_c = exp((k-1)\lambda_1 + (-2s+2)\lambda_2)$. Par ailleurs, il résulte facilement des formules de [KS, section 5] que:

$$a(s_c, exp(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2)) = a_0(x_2 - x_1) \qquad a(s_l, exp(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2)) = a_{-k}(x_1)$$

Le lemme découle facilement de ces formules.■

3.5.3. *Calcul au places sphériques finies.* Soit v une place finie de $\mathbb{Q}$. Soit π_v une représentation sphérique (i.e. non ramifiée) de $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ et χ_v un caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_v^\times$. Rappelons que l'on a noté $\phi^0_{v,\chi_v,s} \in I(\sigma_v \otimes \chi_v, s)$ et $\phi^0_{v,\chi_v^{-1},-s} \in I(\sigma_v \otimes \chi_v^{-1}, -s)$ les fonctions sphériques (i.e. invariante par translation à droite par $\mathbf{G}(\mathbb{Z}_v)$) valant φ_v en l'identité. Par Langlands [L1], on a:

$$M_v(\phi^0_{v,\chi_v,s}) = \frac{L(\hat{\pi}_v \otimes \chi_v, 2s)}{L(\hat{\pi}_v \otimes \chi_v, 2s+1)} \phi^0_{v,\chi_v^{-1},-s}$$

3.6. **Termes constants.**

3.6.1. *Termes constant et opérateurs de Siegel.* Rappelons que pour toute forme de Siegel $F \in \mathcal{M}^2_{\underline{k}}(\Gamma, \mathbb{C})$, on désigne par $F_{\mathbb{A}}$ la forme automorphe correspondante définie sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})$. On note alors $(F_{\mathbb{A}})_{\mathbf{P}}$ la fonction "terme constant" associé au parabolique maximal $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ de décomposition de Lévi $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$. On a donc pour $g \in G(\mathbb{A})$:

$$(F_{\mathbb{A}})_{\mathbf{P}}(g) = \int_{\mathbf{N}(\mathbb{A})/\mathbf{N}(\mathbb{Q})} F_{\mathbb{A}}(ng)dn$$

avec dn la mesure de Haar quotient de $\mathbf{N}(\mathbb{A})/\mathbf{N}(\mathbb{Q})$ de mesure totale 1. On vérifie sans difficulté que

$$(\Phi F)_{\mathbb{A}}(x) = (F_{\mathbb{A}})_{\mathbf{P}}(m(x,1)) \tag{3.6.1.a}$$

pour tout $x \in GL_2(\mathbb{A})$.

3.6.2. Pour tout $\phi \in A^0(\mathbf{M}(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}), s)$ pour laquelle $E(\phi)$ est définie, le calcul du terme constant de $E(\phi)$ est donné par la formule suivante (cf. par exemple [MW, Prop. II.1.7]):

$$E_{\mathbf{P}}(\phi) = \phi + M_{\mathbb{A}}(\phi) \tag{3.6.2.a}$$

3.6.3. Soit $\pi_N = \otimes_{v|N}\pi_v$. Pour tout $\varphi_N \in \pi_N$, on considère $z \mapsto g(z, \varphi_N)$ la forme modulaire de poids k associée à la forme automorphe adélique $g_{\mathbb{A}}(\varphi_N) := \varphi_N \otimes \varphi^N$ modulo l'isomorphisme (3.4.6.a) avec φ^N le produit tensoriel des fonctions sphériques φ_v pour v premier à N.

Proposition 3.6.4. *Soit $\gamma \in Sp_4(\mathbb{Q})$, alors*

$$\Phi(G_k(*, s; f, \chi, \phi_N)|_k\gamma)(z) = N^{3-k/2}\frac{L^N(\widehat{\pi}(f) \otimes \chi, 2-k)}{(-1)^k 2^{3k+2}\pi} \times g(z, M(\phi_N)(\gamma_N^{-1}))$$

Preuve. On a

$$G(g,s;f\chi,N)_{\mathbf{P}} = \frac{\pi.L^N(\hat{\pi}(f)\otimes\chi,2s+1)}{(2i)^k2^{2s+k}(s+1+k/2)}(\tilde{\phi}_{N,s}(g)+M_{\mathbb{A}}(\tilde{\phi}_{N,s})(g))$$

Par ailleurs grâce au lemme 3.5.2 et au paragraphe 3.5.3 , on déduit la relation suivante (modulo l'isomorphisme (3.4.6.a)):

$$L^N(\hat{\pi}(f)\otimes\chi,2s+1).M_{\mathbb{A}}(\tilde{\phi}_{N,s}) = \pi^2.2^{k-1}.L^N(\hat{\pi}(f)\otimes\chi,2s).M(\phi_{N,s})\times\prod_{v\not| N}\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,v,s}$$

En tenant compte de ce que $L^N(\hat{\pi}(f)\otimes\chi,3-k)=0$, on évalue les formules ci-dessus en $s=1-k/2$ et pour $g=m(\begin{pmatrix} v^{1/2} & u.v^{-1/2} \\ 0 & v^{-1/2}\end{pmatrix}\gamma_f^{-1},1)$ avec $z=u+iv\in\mathcal{H}_1$ et γ_f l'image de γ dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. L'énoncé de la proposition s'en déduit immédiatement en tenant compte de nos définitions et identifications.∎

3.6.5. On considère maintenant le cas où $N=N_\Sigma p^r$ avec N_Σ premier à p, ici Σ désigne l'ensemble des places divisant N et premières à p. Pour toute fonction $\phi_{\Sigma,s}\in I(\pi(f)_\Sigma,\chi_\Sigma,s)$, soit $\phi_\Sigma=\phi_{\Sigma,1-k/2}$. On considère la série d'Eisenstein

$$G_k(z,s;f,\chi,\phi_\Sigma,p^r):=G_k(z,s;f,\chi,\phi_N)$$

avec $\phi_{N,s}=\phi_{\Sigma,s}\times\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,p,s}$. On définit également $g_{\mathbb{A}}(\varphi_\Sigma)=\varphi_\Sigma\otimes\varphi_p\otimes\varphi^N$ ainsi que $z\mapsto g(z,\varphi_\Sigma)$ comme au paragraphe précédent avec φ_p la composante locale de $f_{\mathbb{A}}$ en p.

Soit $M_\Sigma=\prod_{v\in\Sigma}M_v$ le produit des opérateurs d'entrelacements aux places de Σ. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 3.6.6. *Soit $\gamma\in Sp_4(\mathbb{Q})\cap I_r$, alors*

$$\Phi(G_k(*,s;f,\chi,\phi_\Sigma,p^r)|_k\gamma)(z) = N_\Sigma^{3-k/2}\frac{L^N(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,2-k)}{(-1)^k2^{3k+2}\pi}\times g(z,M_\Sigma(\phi_\Sigma)(\gamma_\Sigma^{-1}))$$

Preuve. D'après la proposition précédente, il nous faut calculer $M(\phi_{p,s})(\gamma)$ avec $\phi_{p,s}(g):=\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,p,s}(g\tau_{p^r}^{-1})$. Le support de ϕ_p est exactement $\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)w_0.I_r$ (c'est la fonction ϕ' de la preuve de la proposition 3.7.5). Puisque ϕ_p est invariant à droite par I_r, il suffit de traiter le cas $\gamma=1$. Rappelons que

$$M(\phi_{p,s})(\gamma)=\int_{\mathbf{N}(\mathbb{Q}_p)}\phi_{p,s}(w_0n\gamma)dn$$

On a $w_0n\in\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)w_0I_r$ si et seulement si $n\in w_0^{-1}\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)w_0I_r\cap\mathbf{N}(\mathbb{Q}_p)=I_r\cap\mathbf{N}(\mathbb{Q}_p)$. Comme ce sous ensemble est de mesure p^{-r}, on en déduit que

$$M(\phi_{p,s})(1)=p^{-r}\phi_{h_{\mathbb{A}},\chi,p,s}(w_0\tau_{p^r}^{-1})=p^{-r(-2-s)}\pi_p(\tau_{p^r}^{-1}).v_p$$

v_p étant le vecteur de π_p correspondant à $h_{\mathbb{A}}$ dans la décomposition (3.4.6.a). Lorsque $s=1-k/2$, on a obtient donc $p^{-3r+rk/2}\pi_p(\tau_{p^r}^{-1}).v_p$. On en déduit la formule du corollaire.
∎

3.6.7. *Etude de l'arithméticité des termes constants.* Remarquons d'abord que puisque $M_\Sigma = \prod_{v\in\Sigma} M_v$ est un opérateur local en les places appartenant à Σ, il commute aux operateurs de Hecke T_m avec m premier à N_Σ. On en déduit aisément que

$$a(mn, g(*, M_\Sigma(\phi_\Sigma)(\gamma^{-1}))) = a(m, f).a(n, g(*, M_\Sigma(\phi_\Sigma)(\gamma^{-1}))) \tag{3.6.7.a}$$

pour tout entier m premier à N_Σ et tout entier positif n.

Le but des pages qui suvent est de choisir ϕ_Σ au mieux pour maximiser les propriétés d'intégralité de $a(n, g(*, M(\phi_\Sigma)(\gamma^{-1})))$ pour les n divisant une puissance de N_Σ. Pour ce faire, le controle de l'intégralité sera obtenue grâce au modèle de Whittaker de π_Σ et de l'induite semi-locale associée à π_Σ et χ. Le lecteur est avisé de lire l'appendice A avant de poursuivre sa lecture.

3.6.8. Soit $\mathbb{A}_\Sigma$ l'anneau semi-local $\prod_{v\in\Sigma}\mathbb{Q}_v$. Pour H un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ et tout élément $\alpha \in H(\mathbb{Q})$, on note α_Σ son image canonique dans $H(\mathbb{A}_\Sigma)$. Plus généralement pour tout objet global, le rajout de l'indice Σ signifiera que l'on regarde l'objet semi-local relatif à $\mathbb{A}_\Sigma$ qu'il induit. Par exemple, π_Σ désigne le produit des composantes locales de la représentation cuspidale $\pi = \pi(f)$ aux places dans Σ. Soit $C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\Sigma), \pi_\Sigma) \subset C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\Sigma))$ le $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$-sous-espace engendrée par f_Σ la restriction de $f_\mathbb{A}$ à $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$. De même, on notera $g_\Sigma(\varphi_\Sigma) \in C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\Sigma), \pi_\Sigma)$ la restriction de $g_\mathbb{A}(\varphi_\sigma)$ à $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$. Soit ψ_Σ le caractère (additif) de $\mathbb{A}_\Sigma$ défini par

$$\psi_\Sigma((x_v)_{v\in\Sigma}) = \mathbf{e}(\sum_{v\in\Sigma} x_v)$$

On le considère également comme un caractère sur le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$ en posant $\psi_\Sigma(\begin{pmatrix} 1 & x_\Sigma \\ 0 & 1\end{pmatrix}) := \psi_\Sigma(x_\Sigma)$ pour tout $x_\Sigma = (x_v)_{v\in\Sigma} \in \mathbb{A}_\Sigma$. Soit λ_Σ la fonctionnelle de Whittaker sur $C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\Sigma), \pi_\Sigma)$ valant 1 en f_Σ associée au caractère ψ_Σ. Pour tout $g_\Sigma \in C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_\Sigma), \pi_\Sigma)$, on pose

$$W_{\lambda_\Sigma}(g_\Sigma)(\gamma) := \lambda_\Sigma(\gamma.g_\Sigma)$$

Un calcul élémentaire et bien connu montre que pour tout entier n divisant une puissance de N_Σ, on a:

$$a(n, g(*, \varphi_\Sigma) = W_{\lambda_\Sigma}(g_\Sigma(\varphi_\Sigma))(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix})) \tag{3.6.8.a}$$

3.6.9. *Induction, fonctions de Whittaker et intégralité.* Etant donné une fonctionnelle de Whittaker λ_σ pour un caractère non dégégnéré ψ sur une représentation (σ, V_σ) d'un groupe G sur un produit fini de corps locaux, on note $Wh(\lambda_\sigma, \psi, \mathbb{C})$ le modèle de Whittaker correspondant ainsi que $W_{\lambda_\sigma}(v)$ la fonction de Whittaker associée à tout élément $v \in V_\sigma$ de l'espace de σ (i.e. définie par $W_{\lambda_\sigma}(v)(g) = \lambda_\sigma(\sigma(g).v)$).

Soit $\mathbf{N}_B$ le radical unipotent du sous-groupe de Borel standard de $\mathbf{G}$. On fixe un prolongement de ψ_Σ vu comme caractère de $\mathbf{N}_B(\mathbb{A}_\Sigma)\cap\mathbf{M}(\mathbb{A}_\Sigma)$ à $\mathbf{N}_B(\mathbb{A}_\Sigma)$ de noyau contenant $\mathbf{N}_B(\mathbb{A}_\Sigma\cap\hat{\mathbb{Z}})$. D'après Casselman et Shalika (voir l'appendice), il existe une unique fonctionnelle non nulle $\Omega = \Omega_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s}$ sur $I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s) = \prod_{v\in\Sigma} I(\pi(f)_v \otimes \chi_v, s)$ telle que pour tout ouvert compact $K \in G(\mathbb{A}_\Sigma)$, il existe $N_B(K) \subset \mathbf{N}_B(\mathbb{A}_\Sigma)$ un sous-groupe ouvert compact tel que pour tout fonction K-invariante $\phi_\Sigma \in I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s)$, on ait:

$$\Omega(\phi_\Sigma) = \int_{N_B(K)} \lambda_{\pi_\Sigma}(\phi_\Sigma(w_0 n))\psi(n)dn \tag{3.6.9.a}$$

Dans ce qui suit, pour allèger les notations, nous posons $\lambda = \lambda_{\pi_\Sigma}$. Soit $N'_B(K) = N_B(K) \cap K \cap Ker\psi$. Ce groupe est ouvert dans $N(K)$ donc d'indice fini, on prend S_K un ensemble de représentants des classes à droites $N(K)/N'(K)$. Dans ce qui suit, on renormalise la mesure de Haar sur $\mathbf{N}(\mathbb{A}_\Sigma)$ de telle sorte que $N'(K)$ soit de volume 1, ce qui ne créera aucun problème lorsque l'on considèrera les structures entières p-adique car p et N sont premiers entre eux. Alors on a:

$$\Omega_{M,\sigma}(\varphi) = \sum_{n \in S_K} \lambda_\sigma(\varphi(w_0 n))\psi(n) \tag{3.6.9.b}$$

pour toute φ invariante à droite par K.

Ceci permet de déterminer deux réseaux comparables de $I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s_0)$ avec $s_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. En effet, soit L un corps de rationalité pour $\pi(f)$ et $\chi\delta^{s_0/2+1/2}$ contenant les racines de l'unités suivant les puissances de N_Σ et $A \subset L$ l'anneau des entiers de L localisé en p. Soit $L(\pi_\Sigma, \lambda) \subset \pi_\Sigma$ le réseau des vecteurs v tels que $Wh_\lambda(v)(g) \in A$. C'est un réseau admissible de π_Σ au sens de [Vig2]. De même, on peut définir $L(I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s_0), \Omega_{s_0})$ le rśeau de $I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s_0)$ déterminé par la fonctionnelle de Whittaker Ω_{s_0}. La relation 3.6.9.b entraine l'inclusion

$$I(L(\pi_\Sigma, \lambda) \otimes \chi_\Sigma, s_0) \subset L(I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s_0), \Omega_{s_0}) \tag{3.6.9.c}$$

Proposition 3.6.10. *L'inclusion 3.6.9.c est une égalité seulement lorsque la reprśentation induite est résiduellement irréductible modulo l'ideal maximal de A. Par contre, une fonction dans le plus grand réseau ayant son support dans $\mathbf{P}(\mathbb{A}_\Sigma)w_0V_1(N_\Sigma$ appartient également au premier.*

Preuve. Cela résulte du lemme A.3.1.∎

3.6.11. *Entrelacement et fonctions de Whittaker.* Soit $M_\Sigma = \prod_{v\in\Sigma} M_v$ l'opérateur d'entrelacement semi-local

$$M_\Sigma : I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s) \mapsto I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, -s)$$

La composition $\Omega_{-s} \circ M_\Sigma$ est une fonctionnelle de Whittaker sur $I(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s)$ C'est donc un multiple de Ω_s et il existe un coefficient méromorphe en s que l'on note $C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s)$ tel que:

$$\Omega_s = C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s)\Omega_{-s} \circ M_\Sigma \tag{3.6.11.a}$$

C'est le produit des coefficients locaux définis par Shahidi. En d'autre terme, on a:

$$W_{\Omega_{2-s}}(M_\Sigma(\phi_\Sigma)) = C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, s)^{-1} W_{\Omega_s}(\phi_\Sigma) \tag{3.6.11.b}$$

c'est à dire que sur les modèle de Whittaker, l'opérateur d'entrelacement est juste la multiplication par le coefficient $C(\pi_\Sigma, \chi_\Sigma, \psi_\Sigma, s)^{-1}$.

Lemme 3.6.12.
$$C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s)=\prod_{v\in\Sigma}\epsilon_{\psi_v}(2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v)\frac{L(1-2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v^{-1})}{L(2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v)}$$

Preuve. En fait pour tout v, on devrait avoir
$$C_{\psi_v}(\pi_v,s)=\varepsilon(2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v)\frac{L(1-2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v^{-1})}{L(2s,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi)}$$
Si $v=\infty$ ou si π_v est non ramifiée, cette formule est démontrée dans [Sha2, 3.2, 3.4] Le lemme résulte donc de la comparaison des équations fonctionnelles de Gelbart-Jacquet [GJ] et de Shahidi [Sha].■

3.6.13. L'évaluation en $s=1-k/2$ donne donc:
$$C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,1-k/2)=\prod_{v|N}\epsilon_{\psi_v}(2-k,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v)\frac{L(k-1,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v^{-1})}{L(2-k,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v)}$$
On en déduit la proposition suivante:

Proposition 3.6.14. *Soit $\phi_\Sigma\in I(L(\pi_\Sigma,\lambda)\otimes\chi_\Sigma,1-k/2)$ telle que la fonction $x\mapsto M_\Sigma(\phi_\Sigma)(x\tau_{N_\Sigma})$ soit de support contenu dans $\mathbf{P}(\mathbb{A}_\Sigma)w_0V_1(N_\Sigma)$. Alors pour tout $\gamma\in Sp_4(\mathbb{Q})\cap I_r$, on a*
$$\Phi(G_k(*,s;f,\chi,\phi_\Sigma,p^r)|_k\gamma)(z)\in\frac{L^{\{p\}}(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,2-k)}{(-1)^k2^{3k+2}\pi}\prod_{v\in\Sigma}L(k-1,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v^{-1})^{-1}.A[[q]]$$
avec A l'anneau local défini dans le paragraphe précédent la proposition 3.6.10 et $q=\mathbf{e}(z)$.

Preuve. D'après la proposition 3.6.10 appliquée à $s_0=k/2-1$ et $M_\Sigma(\phi_\Sigma)$ et le lemme précédent, on voit que $M_\Sigma(\phi_\Sigma)(\gamma_\Sigma^{-1}))\in C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,1-k/2)^{-1}I(L(\pi_\Sigma,\lambda)\otimes\chi_\Sigma,k/2-1)$. On conclut facilement en utilisant le corollaire 3.6.6 et les formules 3.6.7.a, 3.6.8.a.■

3.6.15. *Le bon choix de ϕ_Σ.* Pour tout χ de conducteur divisant N, les fonctions $\phi_{f,\chi,N,s}$ définis au paragraphe 3.4.6, se décomposent en un produit local canonique $\phi^{0*}_{f,\chi,N,s}=\prod_{v|N}\phi^0_{\pi_v,\chi_v,s}$. Notons que pour chaque $v|N$, $\phi^{0*}_{\pi_v,\chi_v,s}$ est de support contenu dans $\mathbf{P}(\mathbb{Q}_v)w_0K_{\mathbf{B}}(N_v)$ avec $K_{\mathbf{B}}(N_v)\subset\mathbf{G}(\mathbb{Z}_v)$ le sous-groupe d'Iwahori associé à $\mathbf{B}$ de profondeur N_v. On pose
$$\phi^1_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s}:=C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma\otimes\chi_\Sigma,\chi_\Sigma^{-1},-s).M_v(\phi^{0*}_{\pi_v\otimes\chi_v,\chi_v^{-1},-s})$$
et on note $\phi^1_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma}$ son évaluation en $s=1-k/2$.

Lemme 3.6.16. *La fonction $\phi^1_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s}$ satisfait les hypothèses de la proposition précdénte. Autrement dit, on a les propriétés suivantes:*

(i) *la fonction $M_\Sigma(\phi^1_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma})$ à support dans $\mathbf{P}(\mathbb{Q}_v)w_0K_{\mathbf{B}}(N_v)$*
(ii) *Soit $s_0\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, alors $\phi^1_{\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s_0}$ appartient au réseau $L(I(\pi_\Sigma,\chi_\Sigma,s_0),\Omega_{s_0})$.*

Preuve. Soit $\phi(g) = \phi^0_{h\otimes\chi,\chi^{-1},-s}(g\tau_N^{-1})$. Par la relation globale $M_{\mathbb{A}}(M_{\mathbb{A}}(\phi)) = \phi$ et le fait que la fonction ϕ et l'opérateur $M_{\mathbb{A}}$ se décomposent en produit local, le point (i) résulte de ce que ϕ est de support contenu dans $\mathbf{G}(\mathbb{R}).\mathbf{P}(\mathbb{A}_f)w_0.V_1(N)$.

Pour le point (ii), on sait que $\phi^0_{\pi_v\otimes\chi_v,\chi_v^{-1},-s_0} \in I(L(\pi_\Sigma,\lambda)\otimes\chi_\Sigma,\chi_\Sigma^{-1},s_0)$ et l'énoncé résulte donc de la définition de $C_{\psi_\Sigma}(\pi_\Sigma\otimes\chi_\Sigma,\chi_\Sigma^{-1},-s_0)$.■

3.6.17. Pour tout couple (f,χ) de niveau $N_\Sigma p^r$, on note $G_k^\Sigma(z,f,\chi,p^r)$ la série d'Eisenstein $G_k(z,f,\chi,\phi^1_\Sigma,p^r)$ avec ϕ^1_Σ la section définie au 3.6.15. Par la proposition 3.6.14 et le lemme 3.6.16, on a le corollaire suivant:

Corollaire 3.6.18. *Pour tout $\gamma \in Sp_4(\mathbb{Q})\cap I_r$, on a*

$$\Phi(G_k(*,s;f,\chi,\phi_\Sigma,p^r)|_k\gamma)(z) \in \frac{L^{\{p\}}(\widehat{\pi}(f)\otimes\chi,2-k)}{(-1)^k 2^{3k+2}\pi}\prod_{v\in\Sigma} L(k-1,\widehat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v^{-1})^{-1}.A[[q]]$$

avec A l'anneau local p-adique défini dans la proposition 3.6.10.

Lemme 3.6.19. *Supposons que $\chi_v = 1$ alors l'évaluation en $s=0$ de $C_{\psi_v}(s,\hat{\pi}(f)_v,1,-s).M_v(\phi_{\pi(f)_v,1,s})$ est égal à $\phi^{0*}_{\pi(f)_v,1,0}$.*

Preuve. L'opérateur $\phi_v \mapsto C_{\psi_v}(s,\hat{\pi}(f)_v,1,s).M_v(\phi_{v,s})|_{s=0}$ entrelace $I(\pi(f)_v,1,0)$ avec lui-même. Comme cette dernière représentation est irréductible, cet opérateur est un scalaire. Mais par la relation 3.6.11.a ce scalaire est 1. D'oú le résultat.■

Pour la suite, l'équation fonctionnelle suivante sera utile:

Proposition 3.6.20. *Supposons que f soit depoids k et niveau N et χ un caractère de Dirichlet de conducteur N. Alors on a la relation suivante:*

$$G_k(z,k/2-1;f\otimes\chi,\chi^{-1},N) = G_k(z;1-k/2,f,\chi,\phi^1_N)$$

avec ϕ^1_N la section définie comme au 3.6.15.

Preuve. Posons $\tilde{\phi}_{N,-s} := \prod_{v|N}\phi^{0*}_{\pi_v\otimes\chi_v,\chi_v^{-1},-s}$. Par un théorème de Langlands, nous avons l'équation fonctionnelle:

$$E_{\mathbb{A}}(\tilde{\phi}_{N,-s},-s) = E_{\mathbb{A}}(M_{\mathbb{A}}(\tilde{\phi}_{N,-s}),s)$$

Par le lemme 3.5.2 et la sous-section 3.5.3, on a

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{A}}(\tilde{\phi}_{N,-s}) = {} & \frac{L^N(-2s,\hat{\pi}(f)\otimes\chi^{-1})}{L^N(1-2s,\hat{\pi}(f)\otimes\chi^{-1})}\phi^N_{h,\chi,s} \\ & \times M_N(\phi^{0*}_{N,-s})\times a_0(-2s+1-k)a_{-k}(-2s)a_0(k-2s-1)\phi_{\infty,s} \end{aligned}$$

Rappelons que $G_{\mathbb{A}}(s,f,\chi,\phi_N) = L^N(2s+1,\hat{\pi}(f)\otimes\chi)E_{\mathbb{A}}(\phi_{N,s}\phi^N_{h,\chi,s})$. A partir des formules ci-dessus, on obtient donc:

$$\begin{aligned} &L^N(2s+1,\hat{\pi}(f)\otimes\chi)G_{\mathbb{A}}(-s,f,\chi,\phi_{N,-s}) = \\ &\qquad L^N(-2s,\hat{\pi}(f)\otimes\chi^{-1})a_0(-2s+1-k)a_{-k}(-2s)a_0(k-2s-1)G_{\mathbb{A}}(s,\chi,M_N(\phi_{N,-s}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'équation fonctionelle satisfaite par $L(s,\hat{\pi}(f)\otimes\chi)$, entraine que

$$\begin{aligned} &\frac{L^N(-2s,\hat{\pi}(f)\otimes\chi^{-1})}{L^N(2s+1,\hat{\pi}(f)\otimes\chi)}M_N(\phi_{N,-s}) = \\ &\qquad \times\prod_{v|N} C_{\psi_v}(-2s,\hat{\pi}(f)_v\otimes\chi_v,\chi_v^{-1})\times M_N(\phi_{N,-s}) = \phi^1_{N,s} \end{aligned}$$

On évalue maintenant en $s = 1-k/2$. En combinant ceci avec les deux dernières égalités, on obtient le résultat désiré.■

3.7. **Opérateurs de Hecke.**

3.7.1. D'après la section précédente, la série d'Eisenstein $\langle f,f\rangle_N^{-1}G_k(z;f,\chi,\phi_N)$ est une forme de Siegel holomorphe définie sur le corps des coefficients de Fourier auquel on a ajouté les valeurs de χ. On va s'interesser à l'action des opérateurs de Hecke sur celle-ci. Les opérateurs de Hecke de support premier à N agissent par un scalaire car la section définissant cette série d'Eisenstein est sphérique aux places premières à N. Les valeurs propres correspondantes sont données par la proposition suivante.

Proposition 3.7.2. Soit $\lambda_{f,\chi}$ le caractère de l'algèbre de Hecke donnant l'action des opérateurs de Hecke sur la série d'Eisenstein $G_k(z;f,\chi,\phi_N)$. Alors, on a:

$$\lambda_{f,\chi}(Q_\ell(X)) = (X^2 - a(\ell,f)X + \ell^{k-1}\psi_f(\ell))(X^2 - a(\ell,f)\chi(\ell)\ell^{k-2}X + \ell^{3k-5}\chi^2\psi_f(\ell))$$

Preuve. Commencons par rappeler quelques faits sur les paramètres de Satake. Soit F un corps local non archimédien de corps résiduel de cardinal q. Soit τ une représentation irréductible lisse et non ramifiée de $GL_2(F)$. Soient α_1 et α_2 les paramètres de Satake de τ et soient $s_1,s_2\in\mathbb{C}$ tels que $\alpha_i = q^{1/2-s_i}$. Par définition, cela signifie que

$$\tau = \pi(s_1,s_2) = Ind_{B(F)}^{G(F)}\theta_{s_1,s_2} \quad avec \quad \theta_{s_1,s_2}(diag(a,b)) = |a|_F^{s_1}.|b|_F^{s_2}$$

ici Ind désigne l'induite unitaire. Supposons maintenant que $\theta_{a_1,a_2;c}$ soit le caractère non ramifié du tore diagonal de $GSp_4(F)$ tel que

$$\theta_{a_1,a_2;c}(diag(x_1,x_2,zx_1^{-1},zx_2^{-1}) = |x_1|_F^{a_1}|x_2|_F^{a_2}|z|_F^{(c-a_1-a_2)/2}$$

avec $a_1,a_2,c\in\mathbb{C}$. Les paramètres de Satake du quotient de Langlands $\pi(a_1,a_2;c)$ de l'induite unitaire $Ind_{B(F)}^{GSp_4(F)}\theta_{a_1,a_2;c}$ sont donnés par

$$q^{3/2-(c-a_1-a_2)/2}, q^{3/2-(c+a_1-a_2)/2}, q^{3/2-(c-a_1+a_2)/2}, q^{3/2-(c+a_1+a_2)/2}$$

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas N et $\pi(f)_\ell$ la composante locale en ℓ de la représentation $\pi(f_{\mathbb{A}})$ engendrée par $f_{\mathbb{A}}$. On a $\pi(f)_\ell = \pi(s_1, s_2)$ avec $\ell^{(k-1)/2-s_i}$ et $\ell^{(k-1)/2-s_i}$ les racines u polynÃ´me:

$$X^2 - a(\ell, f)X + \ell^{k_1}\psi_f(\ell).$$

Soit $\tau = \pi(f|_k\tau_N)_\ell = \pi(-s_1, -s_2)$. Soit ξ la restriction à $\mathbb{Q}_\ell^\times$ de $\chi_{\mathbb{A}}^{-1}$. C'est un caractère non ramifié et on pose $s_3 \in \mathbb{C}$ tel que $\xi(a) = |a|_F^{s_3} = \chi(\ell)^{-val_\ell(a)}$. On considère $\tau \otimes \xi$ la représentation de $\mathbf{P}$ obtenue en identifiant $\mathbf{M}$ avec $GL_2 \times \mathbb{G}_m$ via $(x, t) \mapsto m(x, t)$. On considère l'induite unitaire

$$I(\tau, \xi, s) = Ind_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_\ell)}^{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)} \tau \otimes \xi\delta^{s/2}.$$

Par transitivité de l'induction, on vérifie que:

$$I(\tau, \xi, s) = Ind_{\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)}^{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)} \theta(-s_1 + s_2, -s_3 + s; -s_1 - s_2 + s_3)$$

Puisque $\phi_{f|_k\tau_N,\chi,s}|_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)} \in I(\tau, \xi, 1-k/2)$, la représentation de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ engendrée par $(G_k(z; f, \chi, N))_{\mathbb{A}}$ est $\pi(s_1 - s_2, s_3 - 2s; s_1 + s_2 - s_3)$ avec $s = 1 - k/2$. Les paramètres de Satake de cette représentation sont donc

$$\ell^{1/2-s_2+s_3+k/2}, \ell^{1/2-s_1+s_3+k/2}, \ell^{5/2-s_2-k/2}, \ell^{5/2-s_1-k/2}$$

En tenant compte de (2.3.7.a), on en déduit que les racines de $\lambda_{f,\chi}(Q_q(X))$ sont:

$$\ell^{(k-1)/2-s_2+s_3+k-2}, \ell^{(k-1)/2-s_1+s_3+k-2}, \ell^{(k-1)/2-s_2}, \ell^{(k-1)/2-s_1}$$

Par définition des s_i, la proposition en découle.■

3.7.3. Pour tout $\gamma \in \Delta_0(N)$, on vérifie facilement que:

(3.7.3.a) $$G(z, s; f, \chi, N)|_k\gamma = (\psi \times \chi)(\gamma)G_k(z; f, \chi, N)$$

où $\psi \times \chi$ est le caractère de $\Delta_0(N)$ induit par

$$\Delta_0(N) \to \mathcal{T}(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \stackrel{\psi\times\chi}{\longrightarrow} \mathbb{C}^\times.$$

Cela résulte des définitions de $\phi^0_{h_{\mathbb{A}},\chi,s}$ et $G(z, s; f, \chi, N)$

3.7.4. Soit maintenant p un nombre premier divisant N et soit I_r la composante locale en p de $V_1[N]$. On écrit sa décomposition d'Iwahori sous la forme $I_r = I_r^- I^+$ avec $I^+ \subset B(\mathbb{Q}_p)$ et $I_r^- \subset U^-(\mathbb{Q}_p)$, U^- désignant le sous-groupe unipotent opposé au Borel standard B. Rappelons que l'on a posé $\delta_0 = [1, 1; p]$ et $\delta_1 = [1, p; p^2]$. Les opérateurs $U_i(p)$ sont définis localement en p par $U_i(p) := I_r\delta_i(p)^{-1}I_r$.

Proposition 3.7.5. *Soit f et χ comme au paragraphe 3.4.4 de niveau Np^r. Alors , pour tout $p|N$, on a*

$$G_k(z; f, \chi, Np^r)|_k U_0(p) = a(p, f).G_k(z; f, \chi, Np^r)$$
$$G_k(z; f, \chi, Np^r)|_k U_1(p) = \chi'(p)a(p, f)^2 p^{k-3}.G_k(z; f, \chi, Np^r)$$

avec χ' la composante de χ première à p. En particulier, si f est p-ordinaire, il en est de mÃªme de $G(z; f, \chi, N)$.

Preuve. Soit ϕ la composante locale en p de la fonction de Schwarz-Bruhat de l'induite parabolique qui définit la série d'Eisenstein $E_{\mathbb{A}}(x,s;h_{\mathbb{A}},\chi,N)$ avec $h=f|\tau_N$. Soit r la valuation p-adique de N Posons ϕ' la fonction lisse définie par $\phi'(x)=\phi(x\tau_{p^r}^{-1})$ pour tout $x\in\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$. Son support est donc $\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)V'(p^r)\tau_{p^r}=\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)\iota I_r=w_0\overline{\mathbf{P}}(\mathbb{Q}_p)I_r$ avec $w_0=s_cs_ls_c$. On considère une décomposition de la classe double $U_i(p)$:

$$U_i(p)=\bigsqcup_\alpha u_\alpha\delta_i^{-1}I_r$$

avec u_α unipotent supérieur. On va calculer $(U_i(p).\phi')(y)$ pour $y\in\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$. Ecrivons y sous la forme $y=qwu^-v$ avec $q\in\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)$, $v\in\mathbf{B}(\mathbb{Z}_p)$, $u^-\in\overline{\mathbf{N}}(p\mathbb{Z}_p)$ et w dans le groupe de Weyl de G modulo (à gauche) le groupe de Weyl de $\mathbf{M}$. On a:

$$(U_i(p).\phi')(qwu^-v):=\sum_\alpha\phi'(qwu^-u_\alpha\delta_i^{-1})$$

Les termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquelles $qwu^-u_\alpha\delta_i^{-1}\in w_0\overline{\mathbf{P}}(\mathbb{Q}_p)\mathbf{N}(\mathbb{Z}_p)$. On doit donc avoir $w=w_0$ et $u'_\alpha=\delta_iu_\alpha\delta_i^{-1}\in\overline{\mathbf{P}}(\mathbb{Q}_p)\mathbf{N}(\mathbb{Z}_p)\cap\delta_iI_r\delta_i^{-1}$. En particulier, le support de $U_i(p).\phi'$ est le même que celui de ϕ'. Les termes $u_\alpha\delta_i^{-1}$ intervenant non trivialement dans le calcul sont donnés par $m(\begin{pmatrix}1&\alpha/p\\0&1/p\end{pmatrix},1/p)$ avec $\alpha\in\{0,\dots,p-1\}$ pour $i=0$ et par $m(\begin{pmatrix}1&x/p&\alpha/p^2&0\\0&1/p&0&0\\0&0&1/p^2&0\\0&0&-x/p^2&1/p\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\{0,\dots,p^2-1\}$ et $x\in\{0,\dots,p-1\}$.

En utilisant la relation $\phi'(q.\tau_{p^r}m(x,t))=\phi'(q.m(\tau_{p^r}x\tau_{p^r}^{-1},tdet(x)^{-1})\tau_{p^r})$. On en déduit sans difficultés que

$$G_{\mathbb{A}}(x,s;f_{\mathbb{A}},\chi)=p^{s+1}G_{\mathbb{A}}(x,s;U_p.f_{\mathbb{A}},\chi)=a(p,f)p^{2+s-k/2}G_{\mathbb{A}}(x,s;f_{\mathbb{A}},\chi)$$
$$G_{\mathbb{A}}(x,s;f_{\mathbb{A}},\chi)=p.\chi_{\mathbb{A}}(p).G_{\mathbb{A}}(x,s;U_{p^2}.f_{\mathbb{A}},\chi)=\chi_{\mathbb{A}}(p)p^{3-k}a(p,f)^2G_{\mathbb{A}}(x,s;f_{\mathbb{A}},\chi)$$

car a $U_p.f_{\mathbb{A}}=a(p,f)p^{1-k/2}f_{\mathbb{A}}$. Après évaluation en $s=1-k/2$ et l'utilisation de la relation (2.3.7.a), on obtient les valeurs propres de l'énoncé.■

3.8. **"Pull-back".** L'objet de cette section est de rappeler la formule de *pull-back* de Shimura [Sh95] qui est fondamental pour determiner une normalisation entière des séries d'Eisenstein-Klingen que nous considérons dans cet article.

3.8.1. On considère le morphisme de groupe de $SL_2\times SP_4$ dans SP_6 défini par $(g,g')\mapsto g\times g'$ en notant par bloques

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&A&0&B\\c&0&d&0\\0&C&0&D\end{pmatrix}$$

Soit P_3 le sous-group parabolique de Siegel de Sp_6 et $P_{2,1} := \mathbf{P} \cap Sp_4$. Alors on a par le lemme 4.2 de [Sh95] la décomposition en classes doubles:

$$Sp_3(\mathbb{Q}) = P_3(\mathbb{Q}).(SL_2(\mathbb{Q}) \times Sp_4(\mathbb{Q})) \sqcup P_3(\mathbb{Q})x_0(SL_2(\mathbb{Q}) \times Sp_4(\mathbb{Q})) \tag{3.8.1.a}$$

avec

$$x_0 := \begin{pmatrix} 1_3 & 0_3 \\ \Upsilon & 1_3 \end{pmatrix} \text{ et } \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, on a (Lemme 4.3 [Sh95]):

$$P_3 \cap SL_2 \times Sp_4 = P_1 \times P_2 \text{ et} \tag{3.8.1.b}$$

$$x_0^{-1}P_3x_0 \cap SL_2 \times Sp_4 = \{g \times g' \in SL_2 \times P_{2,1} |\ \pi_{2,1}(g') = \iota_1 g \iota_1^{-1}\} \cong P_{2,1} \tag{3.8.1.c}$$

avec $\pi_{2,1}$ la projection canonique de $P_{2,1}$ sur SL_2 telle que $\pi_{2,1}(m(g,1)) = g$.

3.8.2. On introduit et rappelle quelques notations. Soit $\Gamma(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ le sous-groupe des matrices congrues à la matrice identité modulo N. Soit $K(N) \subset Sp_{2g}(\hat{\mathbb{Z}})$ le sous-groupe ouvert compact des matrices congrues à l'identité modulo N. On suppose que f est une forme nouvelle normalisée et on fixe une décomposition de $f_{\mathbb{A}}$ comme produit tensoriel restreint de nouveaux vecteurs φ_v pour v finie et de φ_∞ pour $v = \infty$ comme dans la section 3.4.6 tels que $f_{\mathbb{A}}$ corresponde à $\otimes'_v \varphi_v$ via l'isomorphisme $\pi(f) \cong \otimes'_v \pi_v$.

Proposition 3.8.3. *Pour toute place finie v, on une application linéaire unique $\phi_{v,s} \mapsto \phi^{pb}$ de $I(\chi_v, s+1-k/2)^{K(N)}$ dans $I(\pi_v, \chi_v, s)$ telle que pour tout $\phi_N \in \otimes_{v|N} I(\chi_v, s+1-k/2)$, on ait:*

$$G(z, s; h, \chi, \phi_N^{pb}) =< f^c|(w), G^3(diag[w, Nz]_\Upsilon, s+1-k/2; k, \chi, \phi_N) >_{\Gamma(N)}$$

De plus, pour toute place finie v, on a $(\phi^0_{\chi_v,s+1-k/2})^{pb} = \phi_{\pi_v,\chi_v,s}$.

Preuve. Soient f, $h = f|_k\tau_N$ et χ comme au 3.4.4. Comme cas particulier de la formule de P. Garrett généralisée par G. Shimura dans [Sh95], on a:

$$\begin{aligned} \frac{\pi.L^N(\hat{\pi}(f) \otimes \chi, 2s+1)}{(2i)^k 2^{2s+k}(s+1+k/2)} \times E(z, s; h, \chi, N) &= L^N(2s, \chi)L^N(4s-2, \chi^2) \\ &\times < h^c|\iota_1(w), E^3| \begin{pmatrix} 1_3 & 0_3 \\ \Upsilon & 1_3 \end{pmatrix} (diag[w, z], s+1-k/2; k, \chi, N) >_{\Gamma(N)} \end{aligned} \tag{3.8.3.a}$$

On en déduit la formule de la proposition pour $\phi_{N,s}(x_N) = \phi^0_{\chi,s}(x_N)$ et avec $\phi^{pb}_{N,s} = \phi^0_{h_{\mathbb{A}},\chi,N,s}$. Pour une fonction ϕ_N quelconque, il est utile de rappeler comment la formule ci-dessus est obtenue. Les details des calculs sont laissés aux lecteurs. Soit $\phi_s \in I(\chi, s+1-k/2)$ telle que $\phi_s(g) = \prod_v \phi_{v,s}(g_v)$ avec $\phi_{v,s} = \phi^0_{v,s}$ pour toute place v en dehors d'un ensemble de places finies. On déduit aisément de (3.8.1.a), (3.8.1.b) et (3.8.1.c) que

$$\int_{SL_2(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{A})} E_{\mathbb{A}}(g\times g',\phi)\overline{h}_{\mathbb{A}}(g)dg =$$

$$\int_{SL_2(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{A})} \left(\sum_{\delta\times\delta'\in P_1(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{Q})\times P_2(\mathbb{Q})\backslash Sp_4(\mathbb{Q})} \phi(\delta g\times\delta' g')\right)\overline{h}_{\mathbb{A}}(g)dg$$

$$+\int_{SL_2(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{A})} \left(\sum_{\delta\times\delta'\in SL_2(\mathbb{Q})\times P_{2,1}(\mathbb{Q})\backslash Sp_4(\mathbb{Q})} \phi(\delta g\times\delta' g')\right)\overline{f}_{\mathbb{A}}(g)dg$$

Le premier terme de cette somme vaut:

$$\sum_{\delta'\in P_2(\mathbb{Q})\backslash Sp_4(\mathbb{Q})}\int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{A})}\phi(g\times\delta' g')\overline{f}_{\mathbb{A}}(g)dg$$

et le fait que $\overline{h}_{\mathbb{A}}$ soit cuspidale entraine que chaque integrale dans cette somme s'annule. On obtient donc:

$$\int_{SL_2(\mathbb{Q})\backslash SL_2(\mathbb{A})} E_{\mathbb{A}}(g\times g',\phi)\overline{h}_{\mathbb{A}}(g)dg = \sum_{\delta'\in\mathbf{P}(\mathbb{Q})\backslash Sp_4(\mathbb{Q})}\int_{SL_2(\mathbb{A})}\phi(x_0(g\times\delta' g')\overline{h}_{\mathbb{A}}(g)dg$$

On en déduit que $g'\mapsto\phi_v^{pb}(g')$ définie par une normalisation évidente de l'intégrale suivante répond à la question.

$$g'\mapsto\int_{SL_2(\mathbb{Q}_v)}\phi(x_0.(g\times g'))\pi_v(g_v).\varphi_v dg$$

∎

3.8.4. Comme $G^3(z,s;\chi,k,\phi_N)|_{s=2-k}$ définit une forme de Siegel holomorphe, on en déduit que $G(z,s;f,\chi,(\phi_N)^{pb})|_{s=1-k/2}$ est définie et est une forme de Siegel holomorphe de genre 2. On pose alors

$$G_k(z;f,\chi,\phi_N):=\frac{N^{3-k/2}}{\pi^4 i^k 2^{3k-2}}G(Nz,1-k/2;f,\chi,\phi_N)$$

En remarquant que $G(z,s;f,\chi,N)=N^k.E|\iota_2(Nz,s;h,\chi)$, on obtient après évaluation en $s=1-k/2$ de la formule (3.8.3.a):

(3.8.4.a) $G_k(z;f,\chi,\phi_N^{pb})=N^{k/2-3}< f^c|_k\tau_N, G_k^3(diag[w,Nz]+\Upsilon;\chi,\phi_N)>_{\Gamma(N)}$

Rappelons que l'on a un opérateur d'entrelacement pour les induites $I(\chi_v,s)$. Il est défini de $I(\chi_v,s)$ dans $I(\chi_v,\frac{g+1}{2}-k-s)$ par l'intégrale:

$$M_v(\phi_{v,s})(g)=\int_{N_Q(\mathbb{Q}_v)}\phi_{v,s}(\iota_g ng)dn$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.8.5. *On suppose $g = 3$. Pour tout $\phi_{v,s} \in I(\chi_v, s)$ et $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$(\phi^1_{\chi_v,2-k})^{pb} = M_v(\phi^1_{\pi_v,\chi_v,1-k/2})$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la relation $(\phi^0_{\chi_v,0})^{pb} = \phi^0_{\pi_v,\chi_v,k/2-1}$ et l'équation fonctionnelle de la Proposition 3.6.20 et la formule (3.2.4.b).∎

3.9. **Coefficients de Fourier.** Le but de cette section est de calculer certains coefficients de Fourier de la série d'Eisenstein-Klingen que nous avons définie. On montrera ensuite qu'une certaine combinaison lineaire à coefficients entiers d'entre eux est non triviale modulo un nombre premier p fixé.

3.9.1. Pour tout f, χ et N, on pose:

$$G_k(z; f, \chi, N) := \sum_{h \geq 0} a(h; f, \chi, N) exp(2i\pi tr(hz)).$$

On va appliquer la formule de Garrett-Shimura pour calculer les coefficients de Fourier $a(h; f, \chi, N)$. L'idée d'utliser cette formule dans le cas des séries d'Eisenstein-Klingen de niveau 1 est dûe à Böcherer. Elle a été étendue au cas de $\Gamma_0(N)$ par Böcherer-Schulz-Pillot [BSP] lorsque $\chi = \psi_f$. Nous traitons dans ce qui suit le cas général. Soit $\mathcal{X}^g_N$ un système complet de représentants de $\Gamma^g_0(N) \cap P^{g,0} \backslash \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ avec $(det(c), N) = 1\}$. On a

$$F^g(z, s; \chi, N) = \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^g_N} \chi(c) det(cz + d)^{-k-2|s|}$$

Lemme 3.9.2.

$$\begin{aligned} G_k(z, f; \chi, N) = \frac{N^{1-3k/2}}{\pi^4 i^k 2^{3k-2}} det(Im(z))^s L^N(2s + k, \chi) L^N(4s + 2k - 2, \chi) \times \\ \langle f^c | \tau_N(w), F^3(diag[z, w/N] + N^{-1}\Upsilon, s; \chi, N) Im(w)^s \rangle_{w,\Gamma(N)} |_{s=2-k} \end{aligned}$$

Preuve. C'est une simple reformulation de la formule 3.8.4.a.∎

3.9.3. *Développement de Fourier-Jacobi.* Soient maintenant r, m, n des entiers positifs avec $m = n + r$ et considérons le développement de Fourier-Jacobi de $F^m_k(Z, s; \chi, N)$:

$$F^m_k(Z, s; \chi, N) = \sum_{S \in S^+_n} \vartheta_S(w, u; s, \chi, N) \mathbf{e}(tr(Sz))$$

pour tout $Z = \left(\begin{smallmatrix} w & u \\ {}^t u & z \end{smallmatrix}\right)$ avec $w \in \mathcal{H}_r$ et $z \in \mathcal{H}_n$. On pose

$$F^{m,n}_k(Z, s; \chi, N) = \sum_{\substack{S \in S^+_n \\ S > 0}} \vartheta_S(w, u; s, \chi, N) \mathbf{e}(tr(Sz))$$

Pour tout tout sous-groupe $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$, on note $\mathcal{Y}(\Gamma) = \Gamma \cap P^{1,0}\backslash\Gamma$.

Pour toutes matrices α et β telles que α soit carré et β ait le même nombre de lignes que α, on posera $\alpha[\beta] := {}^t\beta\alpha\beta$.

Proposition 3.9.4. *On a:*

$$F_k^{3,2}(\begin{pmatrix} z & u \\ u' & w \end{pmatrix}, s; \chi, N) = \sum_{\substack{\Omega,\omega \\ \gamma\in\mathcal{X}_N^1}} \chi(c_\gamma) j(\gamma, w)^{-k} |j(\gamma, w)|^{-2s} \times$$
$$F_k^2(z[\Omega] + (\gamma.w)[\omega - c_\gamma \Omega.u] + a_\gamma(c_\gamma[\Omega.u] + 2.{}^t\omega.\Omega.u), s; \chi, N)$$

avec (Ω, ω) *parourant l'ensembe des couples tels que* $\Omega \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2(\mathbb{Q})$, $\omega \in \mathbb{Z}^2$ *avec* $(det(\Omega), N) = 1$ *et* (Ω, ω) *primitif (i.e il existe une matrice* $m \in GL_3(\mathbb{Z})$ *telle que* $m = \begin{pmatrix} \Omega & \omega \\ * & * \end{pmatrix}$*).*

Preuve. Pour $\gamma_1 \in Sp_4$ et $\gamma_2 \in SL_2$, on considère les matrices $\gamma_1^\uparrow, \gamma_2^\downarrow \in Sp_6$ définies par

$$\gamma_1^\uparrow = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma_2^\downarrow = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1_2 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

avec $\gamma_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\gamma_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{X}_N^{3,2}$ l'ensemble des matrices de $Sp_6(\mathbb{Z})$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\gamma_1^\uparrow diag(m, {}^tm^{-1})\gamma_2^\downarrow$ avec $\gamma_1 \in \mathcal{X}_N^1$, $\gamma_2 \in \mathcal{X}_N^2$ et m parcourant un système de représentants de matrices de $GL_3(\mathbb{Z})$ dont le bloc 2×1 superieur droit est congru à 0 modulo N module le sous-groupe parabolique de $GL_3(\mathbb{Z})$ constitués des matrices dont le bloc 1×2 inferieur gauche est nul.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z & u \\ u' & w \end{pmatrix}$. En imitant [BSP, p. 380] où le calcul est fait pour $\chi = 1$, on a

$$E_k^{3,2,*}(Z, s; \chi, N) = \sum_{g\in\mathcal{X}_N^{3,2}} \chi(det(c_g)) j(g, Z)^{-k} |j(g, Z)|^{-2s}$$

On écrit m sous la forme $m = \begin{pmatrix} \Omega & \omega \\ * & * \end{pmatrix}$ avec $\Omega \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2(\mathbb{Q})$ et $\omega \in \mathbb{Z}^2$ et $m^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$. Soit $g = \gamma_1^\uparrow diag(m, {}^tm^{-1})\gamma_2^\downarrow$, on a:

$$c_g = \begin{pmatrix} C\Omega & C\omega a + Dx_2 c \\ 0 & x_4 c \end{pmatrix} \text{ et } d_g = \begin{pmatrix} Dx_1 & C\omega b + Dx_2 d \\ x_3 & x_4 d \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$det(c_gZ+d_g)=x_4(cw+d)\times$$
$$det\left(C\Omega z+Dx_1+(C\omega a+Dx_2c)u'-\frac{C\Omega u+C\omega(aw+b)+Dx_2(cw+d)}{x_4(cw+d)}(x_4cu'+x_3)\right)$$

En remarquant que $x_3{}^t\Omega+x_4{}^t\omega=0$ et $x_1{}^t\Omega+x_2{}^t\omega=1_2$, on voit que $x_4det({}^t\Omega)=1$ et on obtient après un calcul simple

$$\begin{aligned}det(c_gZ+d_g)&=(cw+d).det\left(C(z[\Omega]+(\gamma_2.w)[\omega]+\frac{2.\Omega.u.\omega-c[\Omega.u]}{cw+d})+D\right)\\&=(cw+d).det\left(C\left(z[\Omega]+(\gamma_2.w)[\omega-c\Omega.u]+a(c[\Omega.u]+2^t\omega.\Omega.u)\right)+D\right)\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$F_k^{3,2}(Z,s,\chi,N)=\sum_{\gamma_1,\gamma_2,m}\chi(d)\chi(det(D))(cw+d)^{-k}|cw+d|^{-2s}\times$$
$$det\left(C\left(z[\Omega]+(\gamma_2.w)[\omega-c\Omega.u]+a(c[\Omega.u]+2^t\omega.\Omega.u)\right)+D\right)^{-k}\times$$
$$\left|det\left(C\left(z[\Omega]+(\gamma_2.w)[\omega-c\Omega.u]+a(c[\Omega.u]+2^t\omega.\Omega.u)\right)+D\right)\right|^{-2s}$$

L'énoncé de la proposition s'en déduit.■

Corollaire 3.9.5.

$$F_k^{3,2}(diag(z,w/N)+N^{-1}\Upsilon,s;\chi,N)=N^{2k+4s}$$
$$\times\sum_{\substack{\Omega,\omega\\ \gamma\in\mathcal{Y}(\Gamma_0(N^2))}}\chi(d_\gamma)j(\gamma\tau_N,w)^{-k}.|j(\gamma\tau_N,w)|^{-2s}F_k^2(z[\Omega]+(\gamma\tau_N).w[N.\omega-d_\gamma\Omega^t(1,0)],s;\chi,N)$$

avec (Ω,ω) variant dans le même ensemble que la proposition précédente.

Preuve. On applique la proposition précédente avec $u={}^t(1/N,0)$ et $Z=diag(z,w/N)+N^{-1}\Upsilon$. Pour chaque classe dans $\mathcal{X}_N^1$, on choisit un reprśentant tel que a_γ est divisible par N^2, de tel sorte que

$$\begin{aligned}&F_k^2(z[\Omega]+(\gamma.(w/N))[\omega-c_\gamma\Omega.{}^t(1/N,0)]+a_\gamma(c_\gamma[\Omega.{}^t(1/N,0)]+2.{}^t\omega.\Omega.{}^t(1,0)),s;\chi,N)\\&\qquad=F_k^2(z[\Omega]+(\gamma.(w/N))[\omega-c_\gamma\Omega.{}^t(1/N,0)])\\&\qquad\qquad=F_k^2((z/N)[\Omega]+\frac{aw/N+b}{cNw+dN^2}[N\omega-c_\gamma\Omega.{}^t(1,0)])\end{aligned}$$

On obtient la formule du corollaire en remarquant que $\frac{aw/N+b}{cNw+dN^2}=(\gamma'\tau_N).w$ avec $\gamma'=\begin{pmatrix}-b_\gamma & a_\gamma/N^2\\ -N^2.d_\gamma & c_\gamma\end{pmatrix}$ et en utilisant le fait que $\gamma\mapsto\gamma'$ établit une bijection entre $\mathcal{X}_N^1$ et $\mathcal{Y}(\Gamma_0(N^2))$ et que $d_{\gamma'}=c_\gamma$. ■

3.9.6. Soit f la forme modulaire elliptique de poids k et niveau N et nebentypus ψ du paragraphe prćdent. Supposons que les developpement de Fourier de f et $F_k^2(z,s;\chi,N)$ soient donnés par:

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,f)\mathbf{e}(w)$$
$$F_k^2(x+iy,s;\chi,N) = \sum_H a(y,H;s,k,\chi)\mathbf{e}(tr(Hx))$$

On déduit de la proposition 3.9.4, le corollaire suivant.

Proposition 3.9.7. *Avec les notations précédentes, on a:*

$$< f^c|_k\tau_N(w), F_k^{3,2}(diag(x+iy,w/N)+N^{-1}\Upsilon,s;\chi,N)Im(w)^s >_{w,\Gamma(N)} = \sum_h b(y,h,s)\mathbf{e}(tr(hx))$$

avec

$$b(h,s,y) = N^{k+4s}\sum_{t\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}\chi\overline{\psi}(t)\sum_{\Omega,\omega,H} a(H[X_t(\omega,\Omega)],f)$$
$$\int_0^\infty e^{-2\pi H[X_t(\omega,\Omega)]v} a(y[\Omega]+v[X_t(\omega,\Omega)],H;s,k,\chi)v^{k+s-2}dv$$

La somme portant sur (Ω,ω,H) tel que $(det(\Omega),N)=1$, (Ω,ω) primitif et $H[\Omega]=h$ et $X_t(\omega,\Omega)=N\omega+t^t\Omega(0,1)$ et Ω variant dans un système de représentants modulo $GL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve. Pour alléger les notations, on pose $E(Z) = F_k^2(Z,s;\chi,N)$ et $F_{\Omega,\omega,t}(w) = Im(w)^s E(z[\Omega]+w[N\omega+t\Omega^t(1,0)])$. En utilisant (3.9.4) et la relation $f^c|N.1_2 = N^{-k}f^c$, on a:

$$< f^c|\tau_N(w), F_k^{3,2}(diag(z,w/N)+N^{-1}\Upsilon,s;\chi,N)Im(w)^s >_{w,\Gamma(N)} =$$
$$N^{k+4s}\sum_{\substack{\Omega,\omega\\ \gamma\in\mathcal{Y}(\Gamma_0(N^2))}}\chi(d(\gamma)) < f^c, F_{\Omega,\omega,d_\gamma}|\gamma >_{\Gamma(N)}$$

Soit $\Gamma' = \Gamma_0(N^2)\cap\Gamma_1(N)$. En utilisant la décomposition

$$\mathcal{Y}(\Gamma_0(N^2)) = \bigsqcup_{t\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}\mathcal{Y}(\Gamma')\sigma_t$$

le terme de droite de l'équation précédente devient

$$N^{k+4s}\sum_{t\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}\chi\bar{\psi}(t)\sum_{\substack{\Omega,\omega\\ \gamma\in\mathcal{Y}(\Gamma')}} < f^c, F_{\Omega,\omega,t}|\gamma >_{\Gamma(N)}$$

Remarquons également que $< f^c, F_{\Omega,\omega,t}|\gamma >_{\Gamma(N)} = < f^c, F_{\Omega,\omega,t}|\gamma >_{\Gamma'}$ car $\Gamma \cap \Gamma(N)$ est de même indice N dans $\Gamma(N)$ ou Γ'. Posons $w = u + iv$, on a

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\Gamma')} < f^c(w), j(\gamma, w)^{-k} Im(\gamma.w)^s E(z[\Omega] + \gamma.w[N\omega + t\Omega^t(1,0)]) >_{w,\Gamma'}$$

$$= \int_{P^{1,0} \cap \Gamma' \backslash \mathcal{H}} f(w) E(z[\Omega] + w[N\omega + t\Omega^t(1,0)]) > v^{s+k-2} du dv$$

$$= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ H}} \mathbf{e}(tr(Hx[\Omega])) \int_0^\infty dv e^{-2\pi H[X_t(\omega,\Omega)]v} a(n,f) a(y[\Omega] + v[X_t(\omega,\Omega)], H; s, k, \chi) v^{k+s-2}$$

$$\times \left(\int_0^1 \mathbf{e}(u(H[N\omega + t\Omega^t(1,0)] - n)) du \right)$$

$$= \sum_{\substack{n \geq 1,\ H \\ H[X_t(\omega,\Omega)] = n}} \mathbf{e}(tr(Hx[\Omega])) \int_0^\infty dv e^{-2\pi H[X_t(\omega,\Omega)]v} a(n,f) a(y[\Omega] + v[X_t(\omega,\Omega)], H; s, k, \chi) v^{k+s-2}$$

On en déduit aisément la formule de la proposition. ∎

3.9.8. D'après G. Shimura [Sh83] et [Ka], on a:

$$a(y, H; s, k, \chi) = \frac{(-1)^k 4\pi^{2(k+2s)}}{\Gamma_2(s+k)\Gamma_2(s)} \eta(y, H; s+k, s) \frac{L^N(2s+k-1, \chi\chi_H)}{L^N(2s+k, \chi) L^N(4s-2+2k, \chi^2)}$$

où η est la fonction hyper géométrique confluente introduit par Shimura et définie par:

$$\eta(y, H; s, s') = \int_{Q(H)} e^{-2\pi tr(yx)} det(x+H)^{s-3/2} det(x-H)^{s'-3/2} dx$$

avec $Q(H)$ l'ensemble des matrices 2×2 reelles symétriques x telles que $x \pm H > 0$.

Remarque 3.9.9. *La notation pour η est légèrement différente de celle de G. Shimura.*

Une généralisation de cette fonction, introduite dans [BSP], est :

$$\eta(y, h; s, s', \omega) := \int_{Q(H)} e^{-2\pi tr(yx)} det(x+H)^{s-3/2} det(x-H)^{s'-3/2} det((x+y)[\omega])^{1-s} dx$$

Théorème 3.9.10. *Soit f une forme primitive de poids 2 et niveau N. Pour tout $h > 0$ primitif (i.e. $det(h)$ est sans facteur carré premier à N), on a:*

$$a(h; f, \chi, N) = -\frac{L^N(1, \chi\chi_h)}{4\pi^2 det(h)} \left[\sum_{\substack{t \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \\ \omega \in \mathbb{Z}^2}} \chi\overline{\psi}_f(t) a(h[X_t(\omega)], f) h[X_t(\omega)]^{-1-s} \right]_{s=0}$$

où $X_t(\omega) = X_t(\omega, 1_2)$.

Preuve. L'hypothèse sur h et la relation $h = H[\Omega]$ implique que $\Omega = 1_2$ et que ω prend toutes les valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ dans la sommation de la proposition 3.9.7 que l'on va appliquer à l'aide de la formule du 3.9.8. Remarquons d'abord qu'un calcul élémentaire donne :

$$\int_0^\infty e^{-2\pi H[\omega]v}\eta(y+v[\omega],H;s+k,s)v^{s+k-2}dv = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(2\pi)^{s+k-1}}\eta(y,H;s+k,s,\omega)$$

Par ailleurs, on a

$$\eta(h^{-1}[\Omega],H;s+k,X_t(\omega,\Omega)) = \eta(H^{-1},H;s+k,X_t(\omega,\Omega)) = \\ det(H)^{2s+k-3}(H[X_t(\omega)])^{1-s-k}\eta(1_2,1_2,s+k,s,{}^t(1,0))$$

En remplaçant (3.9.8) dans la formule de la proposition 3.9.7 et en utilisant le calcul ci-dessus , on obtient donc:

$$L^N(2s+k,\chi)L^N(4s-2+2k,\chi^2)b(h^{-1},h,s) = \\ \frac{(-1)^kN^{k+4s}\eta(1_2,1_2,s+k,s,{}^t(1,0))\Gamma(s+k-1)4\pi^{2k+4s}}{\Gamma_2(s+k)\Gamma_2(s)(2\pi)^{s+k-1}}\times \\ L^N(2s+k-1,\chi\chi_h)\times\sum_{\substack{t\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\\ \Omega,\omega,H}}\chi\overline{\psi}_f(t)\overline{c}(H[X_t(\omega,\Omega)])det(H)^{2s+k-3}$$

Pour $k=2$, un calcul élémentaire montre que

$$\frac{\eta(1_2,1_2,s+2,s,{}^t(1,0))}{\Gamma_2(s)}|_{s=0} = e^{-4\pi}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.9.2 et la proposition 3.9.7, on a

$$a(h;f,\chi,N) = e^{4\pi}\left.\frac{L^N(2s+2,\chi)L^N(4s+2,\chi^2)}{-\pi^4 2^4}b(h^{-1},h,s)\right|_{s=0}$$

La formule du théorème s'en déduit. ∎

3.9.11. *Fonction L sur un corps imaginaire quadratique.* Soit M un corps imaginaire quadratique de discriminant $-D$. On note O_M l'anneau des entiers de M. Pour tout entier f, on note $O_f = \mathbb{Z}+f.O_M$ l'ordre maximal de conducteur f . Soient Cl_f le groupe des classes d'ideaux de O_M de conducteur f et Cl_f^+ le sous-groupe de Cl_f des éléments fixés par la conjugaison complexe de M. Alors on a une suite exacte:

$$1\to Cl_f^+\to Cl_f\to H_f\to 1$$

où H_f désigne le groupe des classes des O_f-sous-modules projectif de rang 1 de $\mathcal{K}$.

Soient ξ un caractère de Cl_f et g une forme modulaire cuspidale primitive normalisée de nebentypus ψ_g, on pose

$$L(g,\xi,s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset O_{\mathcal{K}}}\xi(\mathfrak{a})a(N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}),g)N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$$

Soit $L(g \otimes \xi, s)$ la fonction L standard de g sur M tordue par ξ définie par G.Shimura ou H.Jacquet. Supposons que f n'est pas à multiplication complexe par M, alors on a

$$L(g \otimes \xi, s) = L^C(\xi_{\mathbb{Q}} \psi_g \chi_D, s) L(g, \xi, s) \tag{3.9.11.a}$$

où $\xi_{\mathbb{Q}}$ est le caractère de Dirichlet induit par ξ par restriction et χ_D est le caractère quadratique associé à l'extension $M/\mathbb{Q}$ et C est le plus petit commun multiple des conducteurs de g et de ξ.

Lemme 3.9.12. *Soit $\mathfrak{a}$ un module sur O_f et $\{\alpha, \beta\}$ une base sur $\mathbb{Z}$ de $\mathfrak{a}$. La forme quadratique sur $\mathbb{Z}^2$ défini par*

$$F_{\mathfrak{a}}(x, y) = \frac{N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(x.\alpha + y\beta)}{N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})}$$

est entière, primitive et de discriminant $-Df^2$.

Preuve. C'est bien connu. Voir par exemple le lemme 2.3.1 de [An74].∎

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$, on fixe $(x_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}})$ une base sur $\mathbb{Z}$ de $\mathfrak{a}^{-1}$ telle que $\mathfrak{a}^{-1} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}.x_{\mathfrak{a}}$. Soit $h_{\mathfrak{a}}$ la matrice de la forme quadratique $F_{\mathfrak{a}^{-1}}$ dans la base $(x_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}})$. Soit $[H_f]$ un système de représentants de H_f.

Proposition 3.9.13. *Soit f un entier divisant une puissance de N. Pour tout caractère θ de Cl_f dont la restriction à $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ vaut $\chi\overline{\psi}_f$, on a:*

$$\frac{L(f \otimes \xi, 1)}{4\pi^2} = \sum_{\mathfrak{a} \in [H_f]} \xi(\mathfrak{a}) det(h_{\mathfrak{a}}) a(h_{\mathfrak{a}}; f, \chi, N)$$

Preuve. Soit $[Cl_f]$ un système de représentants de Cl_f. Pour tout caractère ξ, on a:

$$L^N(g, \xi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in [Cl_f]} \xi(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{a}^{-1} \\ \lambda \equiv 1 \ mod \ f}} a(N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda), g) N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda)^{-s}$$

Comme $Cl_f^+ \cong (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$ on a:

$$L(g, \xi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in [H_f]} \xi(\mathfrak{a}) \sum_{b \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times} \xi(b) \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{a}^{-1} \\ \lambda \equiv b \ mod \ N}} a(N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda), g) N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda)^{-s}$$

Par définition de $h_{\mathfrak{a}}$, on a:

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{a}^{-1} \\ \lambda \equiv b \ mod \ M}} a(N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda), g) N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}.\lambda)^{-s} = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a(h[X_b(\omega)], f) h_{\mathfrak{a}}[X_b(\omega)]^{-s}$$

On conclut aisément à l'aide du corollaire 3.9.10 et de (3.9.11.a). ∎

Corollaire 3.9.14. *Soit f une forme de poids 2, niveau N et χ un caractère de Dirichlet pair satisfaisant l'hypothèse (1.4.2). Alors*

$$\frac{G(\overline{\chi}\psi_f)G_2(z,f,\chi)}{\pi^2 G(\psi_f)\Omega_f^+\Omega_f^-}$$

est non trivial modulo p.

Preuve. Soit M un corps imaginaire quadratique et f un entier divisant une puissance de N et tel que N divise une puissance de f. Pour tout caractère d'ordre fini ξ de M et de conducteur f. il résulte de la Proposition 3.9.13 qu'une combinaison linéaire à coefficients entiers des coefficients de Fourier de $\frac{G(\overline{\chi}\psi_f)G_2(z,f,\chi)}{\pi^2 G(\psi_f)\Omega_f^+\Omega_f^-}$ est égale à

$$\frac{G(\overline{\chi}\psi_f)L_K(f\otimes\xi,1)}{\pi^2 G(\psi_f)\Omega_f^+\Omega_f^-} \tag{3.9.14.a}$$

L'hypothèse (1.4.2) entraine donc le résutat.■

4. L'idéal d'Eisenstein-Klingen

4.1. **Interpolation des séries d'Eisenstein-Siegel.** Dans cette sous-esction nous ́etudions l'interpolation p-adique de certaines séries d'Eisenstein-Siegel.

4.1.1. On s'intéresse dans cette section aux séries d'Eisenstein-Siegel de genre $g = 3$. Nous utiliserons sans les rappeler les définitions et formules du paragraphe 3.1. On pose

$$G_k^3(z;\chi,N) = \frac{N^6}{\pi^4 i^k 2^{3k-2}} G^3(z,2-k;\chi,N)$$

et on considère son développement en série de Fourier:

$$G_k^3(z;\chi,N) = \sum_{h\in S^+} a(h;k,\chi,N)\mathbf{e}(\frac{tr(hz)}{N})$$

Pour tout $h \in S^+$ non nul de rang r_h, il existe h' défini positif et $g \in GL_g(\mathbb{Q})$ tel que $diag(h',0) = {}^tghg$. On note χ_h le caractère de Dirichlet quadratique associé à l extension $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{r_h}det(2h')}/\mathbb{Q}$.

Lemme 4.1.2. *Pour tout $h \in S^+$ on a:*

$$a(h;k,\chi,N) = 2^{r_h}\prod_{\ell|det(h)} M_\ell(h,\chi(\ell)l^{k-4})$$

$$\times\begin{cases} L^N(1-k,\chi)\times L^N(3-2k,\chi^2) & si\ h=0 \\ L^N(3-2k,\chi^2) & si\ r_h=1 \\ L^N(2-k,\chi\chi_h) & si\ r_h=2 \\ 1 & si\ r_h=3 \end{cases}$$

avec $P_\ell(h,X)$ un polynôme à coefficients entiers dépendant uniquement de ℓ et des diviseurs élémentaires de h.

Preuve. Ce la résule des calculs du paragraphe précdent spécialisé à $g = 3$ et $S = \{v;\ v|N\}$.

On fixe maintenant une décomposition $N = N_\Sigma p^r$ et on considère la série d'Eisenstein

$$G(z; \chi, \phi^1_{\chi,N_\Sigma} \phi^0_{\chi_p,p^r})$$

On a le lemme suivant.

Lemme 4.1.3. *Alors pour tout $h \in S^+$ et tout $v \in \Sigma$, il existe un polynome $R_{h,v}(X)$ à coefficients entiers tels que*

$$a(h, G(z; \chi, \phi^1_{\chi,N_\Sigma} \phi^0_{\chi_p,p^r})|\tau_{N_S}) = a(h; k, \chi, N_S p^r) \times \prod_{v\in\Sigma} R_{h,v}(\chi^{-1}(q_v) q_v^{-k})$$

Preuve. On applique l'équation fonctionelle satisfaite par $G(-; \chi, \phi^1_{\chi,N_\Sigma} \phi^0_{\chi_p,p^r})$ et le lemme 3.3.5 avec $S_1 = p$ combinées avec les formules de calculs de coefficients de Fourier qui le précédent et notamment le lemme 3.3.4 lorsque χ_v est ramifié.■

Corollaire 4.1.4. *Soit η un caractère de Dirichlet de niveau N_Σ premier à p et pair. On suppose $N_\Sigma \neq 1$ ou η non trivial. Alors, il existe $G^3_\Sigma(\eta, S) \in O_K[[q^{S_3^+}]]$ telle que pour tout charactère epsilon de conducteur p^r et tout entier $k \geq 2$, on ait $G^3_\Sigma(\eta, \epsilon(u)u^{k-2} - 1)$ soit le q-développement de $G^3(z, \eta\omega^{2-k}\epsilon, \phi^1_\Sigma, p^r)$.*

Preuve. Remarquons que ce résultat est certainement bien connu lorsque N_Σ est le conducteur de η. Il résulte immédiatement de l'existence de la fonction p-adique de Kubota-Leopoldt et des formule du lemme 4.1.2. Dans le cas général, ce dernier conjugué avec le lemme précédent prouve ce corollaire.■

4.2. **Etude préliminaire des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein.** Le but de cette section est de préparer le terrain à l'interpolation p-adique à deux variables des séries d'Eisenstein-Klingen. Notons qu'une interpolation à une variable a été obtenue par Kitagawa-Panchishkin [KP].

4.2.1. On considère ci-après une induite locale d'un caractère de Dirichlet χ de niveau N du sous-groupe parabolique de Siegel de genre trois: $\otimes_{v|N} I(\chi_v, s + 1 - k/2))$. Soit $K_N \subset GSp_6(\hat{\mathbb{Z}}_N)$ le sous-groupes des matrices congrues à 1 modulo N et soit $\phi_N \in (\otimes_{v|N} I(\chi_v, s + 1 - k/2))^{K_N}$. Pour tout entier x et tout $h \in S_2^+$, on introduit $B_{h,x} = B_{h,x,k,\chi,\phi_N}$ la forme modulaire de poids k de niveau Γ_N définie par

$$G^3(diag[w, z] + x\Upsilon; k, \chi, \phi_N) = \sum_{h\in S_2^+} B_{h,x}(\frac{w}{N})\mathbf{e}(\frac{tr(hz)}{N})$$

On vérifie facilement que $B_{h,x}$ dépend uniquement de la classe de x modulo N et que:

$$B_{h,x}|\sigma_y = \chi(y) B_{h,xy} \tag{4.2.1.a}$$

pour tout entier y premier à N et $\sigma_y \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\sigma_y \equiv \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ modulo N. Soit ϵ un caractère de Dirichlet modulo N, on pose:

$$B(h,k,\chi,\epsilon,\phi_N) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \bar{\epsilon}(x) B_{h,1}|_k\sigma_x = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi\bar{\epsilon}(x) B_{h,x}$$

Soit

$$S(h,n) = \{\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 | \begin{pmatrix} h & \sigma \\ {}^t\sigma & n \end{pmatrix} \in S_3^+\}.$$

C'est un ensemble fini et par définition de $B_{h,x}$ on a:

$$b_{h,x}(n) = c(n, B_{h,x}) = \sum_{\sigma\in S(h,n)} \zeta_N^{(x,0)\sigma} a(\begin{pmatrix} h & \sigma \\ {}^t\sigma & n \end{pmatrix}; k, \chi, N) \tag{4.2.1.b}$$

où $\zeta_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.

Lemme 4.2.2. *Soit ψ le nebentypus de f. Alors on a*

$$a(h; f, \chi, (\phi_N)^{pb}) = N^{k/2-2} < f^c|_k\tau_N, B(h,k,\chi,\psi,\phi_N)|_k U_N >_N$$

Preuve. Commençons par remarquer que si $\Gamma' \subset \Gamma$ est d'indice fini et f et f' sont respectivement des formes modulaires de poids k pour Γ et Γ', on a

$$< f, g >_{\Gamma'} = < f, Tr_\Gamma^{\Gamma'} g >_\Gamma \text{ avec } Tr_\Gamma^{\Gamma'} g = \sum_{\gamma\in\Gamma'\backslash\Gamma} g|_k\gamma \tag{4.2.2.a}$$

Par (3.8.4.a) et en utilisant le fait que $f^c|_k\tau_N$ est de nebentypus ψ, on a:

$$a(h; f, \chi, (\phi_N)^{pb}) = N^{k/2-3} < f^c|_k\tau_N, N^{k/2} B_{h,1}|_k \begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >_{\Gamma(N)} =$$

$$N^{k/2-3} < f^c|_k\tau_N, N^{k/2} \sum_{u\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \overline{\psi}(x) B_{h,1}|\sigma_x \begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >_{\Gamma_0(N)}$$

$$= N^{k/2-3} < f^c|_k\tau_N, N.B_{h,\psi,\phi_N}|_k U_N N^{-1} 1_2 >_{\Gamma_0(N)} =$$

$$N^{k/2-2} < f^c|_k\tau_N, B(h,k,\chi,\psi,\phi_N)|_k U_N >_{\Gamma_0(N)}$$

■

Pour tout entier t et caractère de Dirichlet ϵ de niveau M , on considère la somme de Gauss généralisée:

$$g(\epsilon, t, M) = \sum_{y\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \epsilon(y)\mathbf{e}(ty/M)$$

Lorsque $t = 1$ et M est le conducteur de ϵ, on retrouve la somme de Gauss classique que l'on note $G(\epsilon)$.

Lemme 4.2.3. (i) Soient M et M' deux entiers premiers entre eux et ϵ (resp. ϵ') un caractère de Dirichlet modulo M (resp. modulo M'), alors

$$g(\epsilon \times \epsilon', t, MM') = \epsilon(M')\epsilon'(M) g(\epsilon, t, M) g(\epsilon', t, M')$$

(ii) Soit $t = t_0t_1$ une décomposition de t telle que t_1 soit premier à M et t_0 divise une puissance de M. Alors

$$g(\epsilon, t, M) = \overline{\epsilon}(t_1)g(\epsilon, t_0, M)$$

(iii) Soit p un nombre premier et ϵ un caractère de conducteur p^α, alors on a:

$$g(\epsilon, p^\gamma, p^\beta) = \begin{cases} p^{\beta-\alpha}G(\epsilon) & \text{si } \beta = \alpha + \gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. facile et laissé au lecteur.■

4.2.4. On considère le cas maintenant où $N = N_\Sigma p^r$ et on prend $\phi_\Sigma \in (\otimes_{v\in\Sigma} I(\chi_v, s+1-k/2))^{K_{N_\Sigma}}$ et on considère la série d'Eisenstein

$$G^3(x, s+1-k/2; k, \chi, \phi_\Sigma, p^r) := G^3(x, s+1-k/2; k, \chi, \phi_N)$$

avec $\phi_N = \phi_\Sigma \phi^0_{\chi_p, s+1-k/2}$ où χ_p désigne la restriction de χ à $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$. En gardant ces notations, on pose aussi pour tout caractère ϵ de niveau N:

$$b(h, \chi, \epsilon, \phi_\Sigma, p^r) = b_{h,\chi,\epsilon,\phi_N}$$

On a le lemme suivant:

Lemme 4.2.5. Soient χ et ϵ des caractères de Dirichlet de niveau $N = N_\Sigma p^r$. Soit $\phi_\Sigma \in I(\chi_v, s+1-k/2))^{K_{N_\Sigma}}$. Supposons que $(\chi\overline{\epsilon})_p$ soit de conducteur p^r, alors on a

$$b_{h,\chi,\epsilon,\phi_\Sigma,p^r}(n) = c(n, B_{h,k,\chi,\epsilon,N}) = G((\chi\overline{\epsilon})_p)(\chi\overline{\epsilon})_N(p^r) \times$$
$$\sum_{\sigma\in S^p(h,n)} g((\chi\overline{\epsilon})_N, (1,0)\sigma, N)(\chi\overline{\epsilon})_p(N(1,0)\sigma)a(\begin{pmatrix} h & \sigma \\ {}^t\sigma & n \end{pmatrix}; k, \chi, \phi_\Sigma, p^r)$$

où $S^p(h,n)$ est le sous-ensemble de $S(h,n)$ des σ tels que $((1,0)\sigma, p) = 1$.

Preuve. D'apres (4.2.1.a), on a :

$$c(n, B_{h,k,\chi,\epsilon,N}) = \textstyle\sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi\overline{\epsilon}(x)b_{h,x}(n) =$$
$$\textstyle\sum_{\sigma\in S(h,n)}\sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi\overline{\epsilon}(x)\zeta_N^{(x,0)\sigma} a(\left(\begin{smallmatrix} h & \sigma \\ {}^t\sigma & n \end{smallmatrix}\right); k, \overline{\chi}, \phi_\Sigma, p^r)$$
$$= \textstyle\sum_{\sigma\in S(h,n)} g(\chi\overline{\epsilon}, (1,0)\sigma, N)a(\left(\begin{smallmatrix} h & \sigma \\ {}^t\sigma & n \end{smallmatrix}\right); k, \overline{\chi}, \phi_\Sigma, p^r)$$

Par ailleurs par le lemme 4.2.3.(i), on a:

$$g(\chi\overline{\epsilon}, (1,0)\sigma, Np^r) = (\chi\overline{\epsilon})_N(p^r)(\chi\overline{\epsilon})_p(N)g((\chi\overline{\epsilon})_N, (1,0)\sigma, N)g((\chi\overline{\epsilon})_p, (1,0)\sigma, p^r)$$

D'après le lemme 4.2.3(ii) et (iii), comme $(\chi\overline{\epsilon})_p$ est de conducteur p^r, on a:

$$g((\chi\overline{\epsilon})_p, (1,0)\sigma, p^r) = \begin{cases} (\chi\overline{\epsilon})_p((1,0)\sigma)G((\chi\overline{\epsilon})_p) & \text{si } ((1,0)\sigma, p) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme en découle. ■

4.3. **Interpolation p-adique des séries d'Eisenstein.**

4.3.1. *Induites Λ-adiques.* Soit Σ et N_Σ comme ci-dessus et soient η et ξ des caractères de niveau $N_\Sigma p$. On fixe également K un corps p-adique d'anneaux d'entiers O_K contenant les valeurs de η et ξ. Pour chaque $v \in \Sigma$, on considère le caractère $\tilde{\eta}_v(S) : \mathbb{Q}_v^\times \to O_K[[S]]^\times$ défini par

$$\tilde{\eta}_\Sigma(x) = \eta(x) < |x|_v^{-1} >_{(1+S)^{-1}u^2-1}$$

où $< z >_S := (1+S)^{\frac{\log_p(z\omega(z)^{-1})}{\log_p(u)}}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}_p^\times$. On note $\tilde{\eta}_\Sigma(S)$ le caractère de $\mathbb{A}_\Sigma^\times = \prod_v \mathbb{Q}_v^\times$ défini localement par les $\tilde{\eta}_v(S)$ avec $v \in \Sigma$.

On considère $I(\tilde{\eta}_v) = Ind_{Q(\mathbb{Q}_v)}^{GSp_6(\mathbb{Q}_v)} \tilde{\eta}_v$ et $I(\tilde{\eta}_v) := \bigotimes_{v\in\Sigma} I(\tilde{\eta}_v)$. Pour tout entier k, on vérifie aisément que

$$I(\tilde{\eta}_\Sigma) \otimes O_K[[S]]/(1 + S - u^{k-2}\epsilon(u)) \cong I((\eta\epsilon)_\Sigma, 2-k)$$

Notons $\phi_{\Sigma,S}$ un élément de $I(\tilde{\eta}_\Sigma)$. Son image dans $I((\eta\epsilon)_\Sigma, 2-k)$ par l'isomorphisme précédent sera notée $\phi_{\Sigma,\epsilon,k}$.

Proposition 4.3.2. *Soient η et ξ deux caractère de Dirichlet de niveau $N_\Sigma p$ à valeurs dans K. On suppose que $N_\Sigma \neq 1$ ou que p divise le conducteur de η. Soit $\phi_{\Sigma,S} \in I(\tilde{\eta}_\Sigma)$ telle que pour tout $H \in S_3^+$, il existe $a(H,\eta,\phi_\Sigma)(S) \in O_K[[S]]$ satisfaisant*

$$a(H,\eta,\phi_\Sigma)(u^{k-2}\epsilon(u)) = a(H,k,\eta\epsilon,\phi_{\Sigma,\epsilon,k},p^r)$$

pour tout $k \geq 2$ et tout caractère ϵ de $1+p\mathbb{Z}_p$ de conducteur p^r.

Alors pour tout $h \in S_2^+$, il existe $B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)(S,T) \in O_K[[S,T]][[q]]$ telle que pour tout entier $k \geq 2$ et toute paire de caractères ϵ_1, ϵ_2 de $1+p\mathbb{Z}_p$, on ait:

$$B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)(\epsilon_1(u)u^{k-2}-1, \epsilon_2(u)u^{k-2}-1) =$$
$$\xi_N\overline{\eta}_N(p^r)G(\eta_p\epsilon_1\overline{\xi_p\epsilon_2})^{-1}B_{h,k,\eta\omega^{-k}\epsilon_1,\xi\omega^{-k}\epsilon_2,\phi_{\Sigma,\epsilon,k},p^r}$$

où p^r le conducteur de $\overline{\epsilon_1}\epsilon_2$ avec $r \geq 0$.

Preuve. D'après le lemme précédent, il suffit de prendre

$$B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)(n)(S,T)q^n$$

avec $B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)(n)(S,T)$ défini par

$$B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)(S,T) = \sum_{\sigma\in S(h,n)} g(\eta_N\overline{\xi}_N,(1,0)\sigma,N) \times$$
$$\times\overline{\xi}\eta((1,0)\sigma) < N(1,0)\sigma >_{(1+S)(1+T)^{-1}-1} a(\begin{pmatrix} n & \sigma \\ {}^t\sigma & h\end{pmatrix},\eta,\phi_\Sigma)(S)$$

Par le lemme 4.2.5 et les propriétes des sommes de Gauss, on voit que $B(h,\xi,\eta,\xi,\phi_\Sigma)$ vérifie les propriétés d'interpolation voulues.∎

4.3.3. *Induites* $\mathbf{I}[[S]]$*-adiques.* Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{I}} = \sum a(n,\mathcal{F})(T) \in \mathbf{I}[[q]]$ la forme primitive normalisée $\mathbf{I}$-adique de conducteur modéré N_Σ du paragraphe 1.2.5. On munit $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}[[S]]$ d'une structure de $\Lambda_2 = \mathbb{Z}_p[[S_1, S_2]]$-algèbre en envoyant S_1 sur T et S_2 sur $(1+S)u^2 - 1$. On va construire une forme de Siegel Λ_2-adique à coefficients dans $\tilde{\mathbf{I}}$.

Soit $\Pi(\mathcal{F})_\Sigma$ la $\mathbf{I}$-représentation (semi-locale) de $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$ associée à $\mathcal{F}$ (voir l'appendice). L'espace $W(\pi(\mathcal{F})_\Sigma)$ de la $\mathbf{I}$-représentation est contenu dans l'espace des fonctions W localement constante sur $GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$ à valeurs dans $\mathbf{I}(\mu_{N_\Sigma^\infty})$ telles que

$$W(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) = \psi(a)W(g)$$

pour tout $a \in \mathbb{A}_\Sigma$ et $g \in GL_2(\mathbb{A}_\Sigma)$. Soit $W_{\mathcal{F},\Sigma}$ l'unique fonction $K_1(N_\Sigma)$-invariante propre pour les opérateurs de Hecke $_q$ pour $q \in \Sigma$ et telle que $W_{\mathcal{F}}(diag(n,1)) = a(n;\mathcal{F})$ pour tout entier n divisant une puissance de N_Σ.

On considère la représentation induite:

$$I(\pi(\mathcal{F})_N, \tilde{\eta}, S) = Ind_{\mathbf{P}(\mathbb{A}_\Sigma)}^{G(\mathbb{A}_\Sigma)} \pi(\mathcal{F})_\Sigma \times \tilde{\eta}_\Sigma$$

avec $\pi(\mathcal{F})_\Sigma \times \tilde{\eta}_\Sigma$ la reprśentation de $\mathbf{M}(\mathbb{A}_\Sigma) \cong GL_2(\mathbb{A}_\Sigma) \times \mathbb{A}_\Sigma^\times$ défini par

$$m(x,t) \mapsto \pi(\mathcal{F})_\Sigma(x) \otimes \eta_\Sigma(t) \langle |det(x)t^{-2}|_\Sigma \rangle_{u(1+S)^{-1/2}-1}$$

Par conséquent pour tout ideal arithmétique $P \subset \mathbf{I}$ et tout entier $l \in \mathbb{Z}$, on a

(4.3.3.a) $\quad I(\pi(\mathcal{F})_\Sigma, \tilde{\eta}_\Sigma, S) \otimes \mathbf{I}[[S]]/(P, 1+S-u^{l-2}) \cong I(\pi(f_P)_\Sigma, \eta_\Sigma, 1-l/2)$

Avant de poursuivre nous rappelons le lemme suivant

Lemme 4.3.4. Soint σ et ν respectivement des représentations irréductibles de $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ et $\mathbb{Q}_v^\times$. Si $\nu \neq |.|_v^{\pm 1}$, alors la représentation induite $Ind_{P^{2,1}(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)} \sigma \otimes \nu$ est irréductible.

Preuve. Cela résulte de travaux de Shahidi, Walspurger, Rodier et Tadic-Sally.■

On en déduit facilement (par la formule de spécialisation (4.3.3.a)) que $I(\pi(\mathcal{F})_\Sigma, \tilde{\eta}_\Sigma, S) \otimes Frac(\mathbf{I}[[S]])$ est une représentation irréductible.

4.3.5. *Construction et définition de* $G(\mathcal{F}, \eta, \phi_\Sigma)$. Soient K, Σ, N_Σ, η comme au paragraphe précdent. On fixe également $\phi_{\Sigma,S} \in I((\eta\omega^2)_\Sigma)^{K_{N_\Sigma}}$ vérifiant la propri'eté de la proposition précédente. On suppose qu'il existe $(\phi_\Sigma)^{pb}(S) \in I(\pi(\mathcal{F})_N, \tilde{\eta}, S)$ telle que pour tout caractère ϵ de $1 + p\mathbb{Z}_p$ de conducteur p^s et pour tout ideal arithmétique P de $\mathbf{I}$ de poids $k \geq 2$ et caractère ϵ_P de conducteur p^r tel que $s \geq r \geq 0$, on ait:

$$\phi_P((\phi_\Sigma)^{pb}(\epsilon(u)u^{k-2} - 1)) = (\phi_{\Sigma,\epsilon,k})^{pb}$$

où ici l'"exposant" pb est à prendre au sens de la proposition 3.8.3 pour $f = f_P = \mathcal{F} \pmod{P}$ et $\chi = \eta\omega^{2-k}\epsilon$.

Soit C le conducteur modéré de $\mathcal{F}$. Alors, on a le

Théorème 4.3.6. *Soit π_Σ et $\phi_\Sigma)^{pb}$ comme ci-dessus. Alors il existe $G(\mathcal{F},\eta,\phi_\Sigma)\in\mathcal{M}^2(N;\Lambda_2)\otimes\tilde{\mathbf{I}})$ vérifiant la propriété d'interpolation suivante. Pour tout caractère ϵ de $1+p\mathbb{Z}_p$ de conducteur p^s et pour tout ideal arithmétique P de $\mathbf{I}$ de poids $k\geq 2$ et caractère ϵ_P de conducteur p^r tel que $s\geq r\geq 0$, on a:*

$$\phi_P(G(\mathcal{F},\eta,(\phi_\Sigma)^{pb}))(u^{k-2}\epsilon(u)-1)=C^{-k/2}\eta_{\mathbf{I}}(P)W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}\langle f_P,f_P\rangle_{Cp^r}^{-1}$$
$$\times a(p,f_P)^{-2s}\psi'\overline{\eta'}(p^s)G(\overline{\omega^2\eta_p\epsilon}\psi_p\epsilon_P)G(\psi_P)^{-1}\times G_{k_P}(f_P,\eta\omega^{2-k}\epsilon,(\phi_{\Sigma,\epsilon,k})^{pb},p^s)$$

Preuve. Pour tout anneau A, on considère l'opérateur $Tr_{N/C}$ de $A[[q]]$ dans lui-même défini par

$$(\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n)|Tr_{N/C}=\frac{N}{C}\sum_{n=0}^{\infty}a(\frac{nN}{C})q^n$$

et pour tout $h\in S_2^+$, on pose

(4.3.6.a) $A(h;\mathcal{F},\eta,(\phi_\Sigma)^{pb})=N^{-2}\eta_{\mathbf{I}}\overline{\eta'}\psi'(-1)a(1,B_{h,\eta\omega^2,\psi,\phi_\Sigma}|U_NTr_{N/C}|e_p|1_{\mathbf{I}})\in\tilde{\mathbf{I}}$

avec ψ le nebentypus de $\mathcal{F}$. On pose alors:

$$G(\mathcal{F},\eta,(\phi_\Sigma)^{pb})=\sum_{h\in S_2^+}A(h,\mathcal{F},\eta,(\phi_\Sigma)^{pb})q^h\in\tilde{\mathbf{I}}[[q^{S_2^+}]]$$

On doit démonter que pour tout h, on a:

$$\phi_P(A(h,\mathcal{F},\eta,(\phi_\Sigma)^{pb}))(u^{k-2}\epsilon(u)-1)=C^{-k/2}\eta_{\mathbf{I}}(P)W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}\langle f_P,f_P\rangle_{Cp^r}^{-1}$$
$$\times a(p,f_P)^{-2s}\psi'\overline{\eta'}(p^s)G(\overline{\eta_p\omega^2\epsilon}\psi_p\epsilon_P)G(\psi_P)^{-1}\times a(h,f_P,\eta\omega^{2-k}\epsilon,\phi_{\Sigma,\epsilon,k},p^s))$$

Soit 1_P l'image de $1_{\mathbf{I}}$ dans $h_k^{ord}(Cp^r,\psi\omega^{-k}\epsilon_P,O_P[1/p])$. Alors

$$\phi_P(A(h,\mathcal{F},\eta,\phi_\Sigma)(u^{k-2}\epsilon(u)-1))=N^{-2}\overline{\eta'}\psi'(-1)\psi'\overline{\eta'}(p^r)G(\eta_p\epsilon\overline{\psi_p\epsilon_P})^{-1}$$
$$\times a(1,B(h,k,\eta\omega^{2-k}\epsilon,\psi\omega^{2-k}\epsilon_P,\phi_{\Sigma,\epsilon,k},p^s)|U_NT_{N/C}|e|1_P) \tag{4.3.6.b}$$

Notons que l'on a:

$$G(\omega^2\eta_p\epsilon\overline{\psi_p\epsilon_P})^{-1}=p^{-s}\overline{\omega^2\eta_p\epsilon}\psi_p\epsilon_P(-1)G(\overline{\omega^2\eta_p\epsilon}\psi_p\epsilon_P) \tag{4.3.6.c}$$

Par [Hi85, Prop. 4.5], en posant $g=B(h,k,\eta\omega^{2-k}\epsilon,\psi\omega^{-k}\epsilon_P,\phi_{\Sigma,\epsilon,k},p^s)$ et $h_P=f_P^c|_k\tau_{Cp^r}$, on a

$$a(1,g|Tr_{N/C}U_N|e|1_P)=a(p,f_P)^{r-s}p^{(s-r)(k-1)}\frac{<h_P|[p^{s-r}],g|U_NT_{N/C}>_{Cp^s}}{<h_P,f_P>_{Cp^r}}$$
$$=a(p,f_P)^{r-s}p^{(s-r)(k-1)}(N/C)^{k/2}p^{(r-s)k/2}\frac{<f_P^c|\tau_{Np^s},g|U_N>_{Np^s}}{<h_P,f_P>_{Cp^r}}$$

par un calcul similaire à ceux de [Hi88a, §9]. Comme $f^c|_k\tau_{Np^s}|U(p)^*=a(p,f_P)^cf^c|_k\tau_{Np^s}$, on a aussi:

$$<f_P^c|_k\tau_{Np^s},g|_kU_N>_{Np^s}=a(p,f_P)^{-s}<f_P^c|\tau_{Np^s}|_kU_{p^s}^*,g|_kU_N>_{Np^s}$$
$$=a(p,f_P)^{-s}<f_P^c|_k\tau_{Np^s},g|_kU_{Np^s}>_{Np^s}$$

Rappelons que l'on a:

$$\frac{\langle h_P, f_P\rangle_{Cp^r}}{\langle f_P, f_P\rangle_{Cp^r}} = (-1)^k W'(f_P) a(p, f_P^c)^{-r} S(P) p^{rk/2} G(\psi_P)$$

Par le lemme 4.2.2 et le fait $|a(p, f_P)|^2 = p^{k-1}$, on obtient donc:

(4.3.6.d) $\quad a(1, g|U_N Tr_{N/C}|e|1_P) =$

$$= a(p, f_P)^{r-2s} p^{(s-r)(k/2-1)} (N/C)^{k/2} (Np^s)^{-k/2+2} \times \frac{a(h, f_P, \eta\omega^{-k}\epsilon, (\phi_{\Sigma,\epsilon,k})^{pb}, p^s)}{< h_P, f_P >_{Cp^r}}$$

$$= a(p, f_P)^{-2s} C^{-k/2} N^2 p^s (-1)^k W'(f_P)^{-1} G(\psi_P)^{-1} S(P)^{-1} \times \frac{a(h, f_P, \eta\omega^{-k}\epsilon, (\phi_{\Sigma,\epsilon,k})^{pb}, p^s)}{< f_P, f_P >_{Cp^r}}$$

Le Théorème s'obtient en combinant (4.3.6.b), (4.3.6.c) et (4.3.6.d). ∎

4.3.7. *Le bon choix de* ϕ_Σ. Par le corollaire 4.1.4, il existe une interpolation dans $O_K[[S]]$ des séries d'Eisenstein $G_k^3(-; \eta\omega^{-k}\epsilon, \phi^1_{\Sigma,\eta_\Sigma,2-k}, p^r)$. On en déduit le Théorème principal de cette sous-section:

Théorème 4.3.8. *Il existe* $G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta) \in \mathcal{M}^2(N; \Lambda_2) \otimes \tilde{\mathbf{I}})$ *telle que our tout caractère* ϵ *de* $1 + p\mathbb{Z}_p$ *de conducteur* p^s *et pour tout ideal arithmétique* P *de* $\mathbf{I}$ *de poids* $k \geq 2$ *et caractère* ϵ_P *de conducteur* p^r *tel que* $s \geq r \geq 0$*, on ait:*

$$\phi_P(G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)(u^{k-2}\epsilon(u) - 1) = C^{-k/2}\eta_{\mathbf{I}}(P) W'(f_P)^{-1} S(P)^{-1} \langle f_P, f_P\rangle^{-1}_{Cp^r}$$
$$\times a(p, f_P)^{-2s} \psi'\overline{\eta'}(p^s) G(\overline{\omega^2\eta_p\epsilon}\psi_p\epsilon_P) G(\psi_P)^{-1} \times G^\Sigma_{k_P}(f_P, \eta\omega^{2-k}\epsilon, p^s)$$

Dans le reste de cette section, nous allons étudier quelques propriétés de la série d'Eisenstein-Klingen Lambda-adique $G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$. En particulier, nous allons prouver, sous certaines hypothèses, qu'elle est non triviale modulo l'idéal maximal de $\mathbf{I}[[S]]$. A cette fin, nous aurons besoin de la proposition et du corollaire suivants dans lesquels nous reprenons les notations du paragraphe 3.6.15.

Proposition 4.3.9. *Supposons que* f *soit depoids* 2 *et niveau* $N = N_\Sigma p$ *et* χ *de conducteur premier à* p *avec* $\chi(p) = 1$*. Alors on a la relation suivante:*

$$G_2(z; f \otimes \chi, \chi^{-1}, N_\Sigma p) = G_2(z, f, \chi, \phi^1_\Sigma, p) = G_2^\Sigma(z, f, \chi, p)$$

avec $\phi^1_{\Sigma,s}$ *la section définie au 3.6.15.*

Preuve. Par nos hypothèses, et le lemme 3.6.19, on a

$$\phi^1_{p,0} = C_{\psi_p}(-2s, \hat{\pi}(f)_p \otimes \chi_p, \chi_p^{-1}) M_p(\phi_{p,-s})|_{s=0} = \phi^0_{p,0}$$

. La proposition est donc une reformulation de l'équation fonctionelle des séries d'Eisenstein-Klingen de la proposition 3.6.20 avec $k = 2$.∎

Corollaire 4.3.10. *Soit f une forme de poids 2, niveau $N = N_\Sigma p$ et ordinaire en p. On suppose que χ est un caractère de Dirichlet pair de niveau N et conducteur premier à p tel que $\chi(p) = 1$ et satisfaisant l'hypothèse (1.4.2). Alors*

$$\frac{G_2^\Sigma(z, f, \chi, p)}{\pi^2 \Omega_f^+ \Omega_f^-}$$

est non trivial modulo p.

Preuve. Cela résulte du corollaire 3.9.14 appliqué à $(f \otimes \chi, \chi^{-1})$ et de la proposition 4.3.9. On remarquera que l'hypothèse (1.4.2) pour $(f \otimes \chi, \chi^{-1})$ est équivalente à celle pour (f, χ). ■

Corollaire 4.3.11. Supposons que $N_\Sigma \neq 1$ ou que η soit non trivial. On suppose également que l'hypothèse 1.4.2 est satisfaite pour le triplet (f, η, N_Σ) avec f une forme modulaire de poids 2 dans la famille $\mathcal{F}$. Alors $\tilde{G}^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$ mod $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{I}}}$ est non trivial.

Preuve. Soit $P \subset \mathbf{I}$ un idéal arithmétique de poids $k_P = 2$ et nebentypus non trivial et $f = f_P$. Notons d'abord que $S(f) = \psi'(p)a(p, f_P^c)^2 p^{-2} = \psi'(p)a(p, f_P)^2$ est une unité p-adique. Par ailleurs, d'après notre hypothèse, si B est l'algèbre de quaternion ramifiée en q et l'infini, on doit avoir $\eta_{\mathbf{I}}(P) \sim_{\mathbb{Z}_p^\times} n_{f_B}$. Pour tout ϵ un caractère d'ordre fini de $1 + p\mathbb{Z}_p$, on a par le théorème précédent,

$$\Phi_P(G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta))(\epsilon(u) - 1) \sim_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{G(\psi_{f_P}\overline{\eta\epsilon})G_2^\Sigma(f_P, \eta\epsilon, p)\eta_{f_P}}{G(\psi_{f_P}) < f_P, f_P > \pi^2} \sim_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{G(\psi_{f_P}\overline{\eta\epsilon})G_2^\Sigma(f_P, \eta\epsilon, p)\eta_{f_P}}{G(\psi_{f_P})\pi^2\Omega_{f_P}^+\Omega_{f_P}^-}$$

Considérons le cas ϵ trivial. Par le corollaire précédent, on en déduit que $\tilde{G}^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$ mod $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{I}}} = \Phi_P(G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta))(0)$ mod p est non trivial. ■

4.4. **Termes constants de $G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$.** Dans cette section, nous énonçons l'équivalent $\mathbf{I}[[S]]$-adique du corollaire 3.6.18.

4.4.1. *Modèles de Whittaker pour les induites* $\mathbf{I}[[S]]$*-adiques.* On reprend les notations de la section 4.3.3.

Soit F le corps des fractions de $\mathbf{I}(\mu_{N^\infty})[[S]]$. Soit $\Omega_{\eta_\Sigma, S}$ la fonctionnelle de Whittaker sur l'induite $I(\pi(\mathcal{F})_\Sigma, \tilde{\eta}_\Sigma, S)$ définie par Casselman-Shalika à partir de $\lambda : W(\Pi(\mathcal{F})_\Sigma) \to \mathbf{I}(\mu_{N_\Sigma^\infty})$ définie par $\lambda(W) = W(1_2)$. On a donc:

$$\Omega_{\eta_\Sigma, S}(\phi) = \int_{N(K)} \phi(w_0 n)\psi(n)dn$$

Notons $W_{\Omega_{\eta_\Sigma, S}}$ l'isomorphisme entre $I(\pi(\mathcal{F})_\Sigma, \tilde{\eta}_\Sigma, S) \otimes F$ et son modèle de Whittaker $Wh(\Omega_{\tilde{\eta}}, F)$. On pose alors:

$$(4.4.1.a)\quad C(\Pi(\mathcal{F})_\Sigma, \eta_\Sigma, \psi_\Sigma; S) = \prod_{v\in\Sigma} \epsilon_{\psi_v}(ad(\rho_{\mathcal{F}}|_{W_{\mathbb{Q}_v}}) \otimes \tilde{\eta}) \frac{\mathfrak{L}_v(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \chi_p \tilde{\eta}_G^{-1})}{\mathfrak{L}_v(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G)}$$

La constante epsilon $\epsilon_{\psi_v}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G|_{W_{\mathbb{Q}_v}})$ étant une unité de $\tilde{\mathbf{I}}$.

Par le lemme 3.6.12, ce coefficient vérifie la propriété d'interpolation suivante: Pour tout P arithmétique et tout caractère ϵ d'ordre fini de $1 + p\mathbb{Z}_p$, on a

$$\Phi_P(C(\Pi(\mathcal{F})_\Sigma, \eta_\Sigma, \psi; u^{k-2}\epsilon(u) - 1) = C(\pi(f_P)_\Sigma \otimes \chi\epsilon\omega^{-k}, \psi_N, 1 - k_P/2)$$

4.4.2. On définit l'opérateur d'entrelacement $\tilde{\mathbf{I}}$-adique par:

$$M_{\Sigma,\eta,S} := W^{-1}_{\Omega_{\eta_\Sigma^{-1},(1+S)^{-1}-1}} \circ C(\Pi(\mathcal{F})_\Sigma, \eta_\Sigma, \psi; S)^{-1}.Id \circ W_{\Omega_{\eta_\Sigma,S}}$$

On pose

$$\phi^1_{\mathcal{F},\eta,\Sigma}(S) := M_{\Sigma,\eta,(1+S)^{-1}-1}(\phi^0_{\mathcal{F},\eta^{-1},\Sigma}((1+S)^{-1} - 1))$$

Par construction, on a

$$\phi_P(\phi^1_{\mathcal{F},\eta,\Sigma})(\epsilon(u)u^{k-2} - 1) = \phi^1_{f_P,\eta\epsilon\omega^{-k_P},\Sigma}$$

Le lemme 3.8.5 entraine donc que $(\phi^1_{\eta,\Sigma})^{pb}$ est bien défini et vaut $\phi^1_{\mathcal{F},\eta,\Sigma}$. Par la propriété d'interpolation de $G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$, on a également

$$(4.4.2.a)\qquad G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta) := G(\mathcal{F}, \eta, \phi^1_{\mathcal{F},\eta,\Sigma})$$

Soit $\Delta = V_1(N) \cap Sp_4(\mathbb{Z})$.

Théorème 4.4.3. *Soient $\eta, \mathcal{F}$ et Σ comme aau théorème 4.3.8. Alors, pour tout $Z \in C_1^\circ(\Delta_0(p))$, on a*

$$\Phi(G_\Sigma(\mathcal{F}, \eta)) \in \mathfrak{L}^\Sigma(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \eta_G)\mathbf{I}[[S]][[q]]$$

Preuve. Les outils utilisées dans la preuve du corollaire 3.6.18 et des propositions qui le précèdent viennent d'être construits. La même preuve conjuguée avec les propriétés d'interpolations de $G^\Sigma(\mathcal{F}, \eta)$, des sections $\phi^1_{\mathcal{F},\eta,\Sigma}$ et de l'opérateur d'entrelacement $\tilde{\mathbf{I}}$-adique permettent de conclure. Nous laissons au lecteur le soin de réécrire ces arguments dans le contexte $\mathbf{I}[[S]]$-adique. ■

4.5. **Applications.**

4.5.1. *Idéal d'Eisenstein-Klingen.* Une conséquence directe du théorème de controle 4.3.8 et du lemme 3.7.2est que $G(\mathcal{F},\eta)$ est propre pour les opérateurs de Hecke de supports premier à N. Notons $\lambda_{\mathcal{F},\eta}$ le caractère de $H^{ord}(N;\tilde{\mathbf{I}}) = H^{ord}(N;\Lambda_2)\otimes\tilde{\mathbf{I}}$ tel que

$$T.G(\mathcal{F},\eta) = \lambda_{\mathcal{F},\eta}(T)G(\mathcal{F},\eta)$$

Plus précisément par le lemme 3.7.2, on a:

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{F},\eta}(Q_\ell(X)) = (X^2 - a(\ell;\mathcal{F})X + \ell^{-1}\psi_{\mathcal{F}}(\ell) < \ell >_T)\\ \times(X^2 - a(\ell;\mathcal{F})\tilde{\eta}(\ell)X + \ell^{-1}\psi_{\mathcal{F}}(\ell) < \ell >_T \tilde{\eta}(\ell)^2)\end{aligned}$$

On considère $I_{\mathcal{F},\eta}\subset h^{ord}(N;\tilde{\mathbf{I}})$ l'idéal engendré par $\lambda_{\mathcal{F},\eta}(T) - Res(T)$ avec Res désignant le morphisme surjectif canonique $H^{ord}(N;\tilde{\mathbf{I}})\to h^{ord}(N;\tilde{\mathbf{I}})$. L'idéal d'Eisenstein-Klingen est défini par:

$$\mathfrak{Eis}(\mathcal{F},\eta) = Ker\left(\tilde{\mathbf{I}}\longrightarrow h^{ord}(N;\tilde{\mathbf{I}})/I_{\mathcal{F},\eta}\right)$$

La divisibilité de l'idéal d'Eisenstein par la fonction L-p adique est suggeré par la proposition suivante.

4.5.2. *Preuve du Théorème 1.4.7.* On reprend les notations du paragraphe 4.3.5. On choisit $N = pgcd(C,D).\ell$ avec ℓ un nombre premier auxilière tel que $\mathcal{P}_q(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}_G,1)$ soit premier à $\mathfrak{L}(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}_G)$ (il est facile de vérifier que de tels nombres premiers existent en utilisant le théorème de Tchebotarev). Par la proposition 1.3.9, cela entraine que $\mathfrak{F}^{\Sigma_N}(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}_G) = \mathfrak{F}^{\Sigma}(ad(\rho_f)\otimes\tilde{\eta}_G)$ avec Σ l'ensemble des nombres premiers divisant $pgcd(C,D)$ (on a $\Sigma_N = \Sigma\cup\{\ell\}$).

Soit $Q\subset\tilde{\mathbf{I}}$ de hauteur 1 tel que $m = v_Q(\mathfrak{L}(ad(\rho_{\mathcal{F}})\otimes\tilde{\eta}_G))\geq 1$. D'après le corollaire 4.3.11, il existe $h\in S_2^+$, tel que

$$v_Q(A(h,G(\mathcal{F},\eta))) = 0$$

D'après le théorème 4.4.3, pour tout $Z\in C_1^\circ(\Delta_0(p))$, par notre hypothèse que Q, on a

$$\phi_Z G(\mathcal{F},\eta) = \varpi_Q^m\mathcal{F}_Z$$

avec $\mathcal{F}_Z\in\mathcal{M}^1_{ord}(\Delta_Z,\Lambda_1)\otimes\tilde{\mathbf{I}}_Q$. D'après le théorème 2.4.20, il existe $K\in\mathcal{M}^2_{ord}(\Delta,\Lambda_2)\otimes\tilde{\mathbf{I}}_Q$ tel que pour tout Z non ramifié, on a

$$\phi_Z(\mathcal{K}) = \mathcal{F}_Z$$

D'après le théorème 2.4.20, $\mathcal{H} = G(\mathcal{F},\eta) - \varpi_Q^m.\mathcal{K}\in\mathcal{S}^2_{ord}(N,\Lambda_2)\otimes\tilde{\mathbf{I}}_Q$ et on a $\mathcal{H}\equiv G(\mathcal{F},\eta)$ modulo Q^m. Donc le morphisme

$$T\mapsto\frac{A(h,T.G(\mathcal{F},\eta))}{A(h,G(\mathcal{F},\eta)}\equiv\frac{A(h,T.\mathcal{H})}{A(h,F)}\in\tilde{\mathbf{I}}/Q^m$$

se factorise en un morphisme d'algèbre

$$h_{ord}(N,\Lambda_2)\otimes\tilde{\mathbf{I}}_Q\to\mathbf{I}/Q^m$$

de noyau contenant $I_{\mathcal{F},\eta}$. Par conséquent, on doit avoir $v_Q(\mathfrak{Eis}(\mathcal{F},\eta))\geq m$.

Par le Théorème 3.57 de [U01][7], on en déduit que

$$v_Q(\mathfrak{F}_{\Sigma_N}(ad(\rho_{\mathcal{F}}) \otimes \tilde{\eta}_G)) \geq m.$$

Remarquons ici que le Théorème 3.7 de [U01] est inconditionnel, car l'hypothèse (b) de ce dernier, c'est à dire la multiplicité 1 pour les representations cuspidales de $GSp_4(\mathbb{A})$, est maintenant vérifiée gâce aux travaux d'Arthur [Ar04] et de la vérification des lemmes fondamentaux tordus nécessaires par Flicker [Fi99] et Whitehouse [Wh06]. ■

[7]On devra noter que dans [U01], $\tilde{\eta}_G$ est défini avec une convention différente de celle du present article (i. e. avec le Frobenius arithmétique)

Appendix A. Représentations induites et questions d'intégralités

On rappelle quelques notions sur les structures entières p-adiques des representations génériques lisses de $G(F)$ pour F un corps ℓ-adiques et G un groupe réductif connexe. On utilise cette théorie pour comparer certaines structures entières sur des induites paraboliques.

A.1 Préliminaires. – Soit F un corps local de caractéristique résiduelle ℓ dont on fixe une uniformisante ϖ. On fixe $\mathbf{G}$ un groupe reductif connexe quasi-déployé sur F, $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel, $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ un tore maximal et $\mathbf{N}$ le radical unipotent de $\mathbf{B}$. On note G, B, T, N les groupes des points sur F correspondants.

Soit A une $\mathbb{Z}[1/\ell]$-algèbre intègre de corps des fractions K. Soit π une représentation admissible lisse de G sur un K-vectoriel V_π. Un sous A-module $L \subset V_\pi$ est appelé un A-réseau admissible si c'est un réseau i. e. $L \otimes_A K \cong V_\pi$ qui est stable sous l'action de G et si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, L^K est de type fini sur A. Ce dernier est dit de type fini s'il est de type fini en tant que AG-module. Une représentation est dÃ®te A-entière lorsqu'elle possède un A-réseau admissible.

A.2 Modèles de Whittaker entiers –

Soit P un sous-groupe parabolique standard et soit $P = MN_P$ une décomposition de Lévi. On pose $N_M = M \cap N$. Soit w_0 un élément de W/W_M de longueur maximal. On l'identifiera avec l'élément de W de longuer minimal dans sa classe modulo W_M.

On fixe dn une mesure de Haar sur N à valeurs dans $\mathbb{Z}[1/\ell]$. On fixe θ un caractère non dégénéré de F dans μ_{ℓ^∞} le groupes des racines de l'unité une puissance de ℓ. On fixe un morphisme non dégénéré $N \to F$ et note ψ le caractére de N que l'on obtient en le composant avec θ.

Soient A une $\mathbb{Z}[1/\ell]$-algèbre intègre de corps de fraction K et (σ, V_σ) une représentation irréductible de M sur K. On considère l'induite:

$$I(\sigma, V_\sigma) = \{f \in C^\infty(G; V_\sigma) | f(mng) = \delta_P^{1/2}(m)\sigma(m).f(g)\}$$

avec $\delta_P(m) = det(ad(m)|_{Lie(N)}$. C'est une représentation de G: pour tout $g \in G$ et $f \in I(\sigma, V_\sigma)$, on pose $g.f(x) = f(xg)$.

On suppose que A contient μ_{ℓ^∞} et qu'il existe une forme linéaire non nulle (fonctionnelle de Whittaker) $\lambda = \lambda_\sigma : V_\sigma \to K$ telle que $\forall v \in V = V_\sigma$, on ait $\lambda(\sigma(n).v) = \psi(n)\lambda(v)$ pour tout $n \in N_M = N \cap M$.

Lemme A.2.1. *Il existe sur $I(\sigma, V_\sigma)$ une unique fonctionnelle de Whittaker $\Omega_{M,\sigma}$ telle que pour tout ouvert compact $K \subset G$, il existe $N(K) \subset N$ un sous-groupe ouvert compact tel que pour tout $\varphi \in I(\sigma, V_\sigma)^K$, on ait*

$$\Omega_{M,\sigma}(\varphi) = \int_{N(K)} \lambda_\sigma(\varphi(w_0 n))\psi(n)dn$$

En particulier, il existe un ensemble fini $S_K \subset N$ tel que pour tout $\varphi \in I(\sigma, V_\sigma)^K$, on ait:

$$\Omega_{M,\sigma}(\varphi) = \frac{vol(N(K))}{|S_K|} \sum_{n \in S_K} \lambda_\sigma(\varphi(w_0 n)\psi(n)$$

Preuve. Le premier point se démontre de la mÃªme faÃ§on que [CS, Prop. 2.3]. Pour le second, soit $N'(K) = N(K) \cap K \cap Ker\psi$. Ce groupe est ouvert dans $N(K)$ donc d'indice fini, on prend S_K un ensemble de représentants des classes à droites $N(K)/N'(K)$ et la formule résulte du (i)■

En utilisant λ_σ et $\Omega_{M,\sigma}$, on peut définir des structures entières sur ces représentations. On pose

$$L = L(\lambda_\sigma) = \{v \in V_\sigma | \forall m \in M, \lambda_\sigma(\sigma(m).v) = \phi_v(m) \in A\}$$

et on dit que σ admet un modèle de Whitakker entier si $L(\lambda_\sigma)$ est un réseau admissible de V_σ. On peut alors considérer

$$I(\sigma, L) = \{\phi \in I(\sigma, V_\sigma) | \phi(g) \in L, \ \forall g \in G\}$$

D'après [Vig1, I.P.3], c'est un A-réseau admissible de $I(\sigma, V_\sigma)$ si L est un A-réseau admissible de V_σ. On a donc:

Corollaire A.2.2. Supposons A noethérien. Si σ admet un modèle de Whittaker entier, il en est de mÃªme de $I(\sigma)$. Plus précisément, on a

$$I(\sigma, L) \subset L(\Omega_{M,\sigma}) = \{f \in I(\sigma, V) | \Omega_{M,\sigma}(g.f) \in A \forall g \in G\}$$

Preuve. Soit $f \in I(\sigma, L)$ et $g \in G$. Soit K le stabilisateur de $g.f$. D'après le lemme précédent on a

$$\Omega_{M,\sigma}(g.f) = \frac{vol(N(K))}{|S_K|} \sum_{n \in S_K} \lambda_\sigma(f(w_0 ng)\psi(n)$$

Comme $f(w_0 ng) \in L(\lambda_\sigma)$ et que $\frac{vol(N(K))}{|S_K|}$ est inversible dans A (c'est une puissance de ℓ). $\Omega_{M,\sigma}(f) \in A$. On a donc $I(\sigma, L) \subset L(\Omega_{M,\sigma})$. Comme A est noethérien, on en déduit facilement que $L(\Omega_{M,\sigma})$ est un réseau admissible. ■

Suppososns que A soit un anneau de valuation discrète de corps résiduel k. Une représentation A-entière de G sera dite résiduellement irréductible si pour un (et donc pour tous) A-réseau admissible L de type fini, la représentation de G sur $L \otimes k_A$ est absolument irréductible.

Lemme A.2.3. *Soit (π, V_π) une représentation A-entière résiduellement irréductible. Alors tous les réseaux admissibles de V_π sont homothétiques et donc de type fini.*

Preuve. Il est clair que deux réseaux de type fini sont homothétiques. En effet, soit L, L' deux tels réseaux. Ils sont comensurables et on peut supposer $\varpi^n L \subset L' \subset L$ et $L' \not\subset \varpi L$ avec n un entier naturel quitte à remplacer L' par un multiple. L'image de L' dans $L/\varpi L$ est pleine par irréductibilité de $L \otimes k_A$. Donc $L' + \varpi L = L$ et $L' + \varpi(L' + \varpi L) = L' + \varpi^2 L = L$.D'où par réccurence $L' + \varpi^j L = L$ pour tout j. Si on prend $j = n$, on obtient $L' = L$, ce qu'on voulait. En fait tous les réseau admissibles sont de type fini. En effet soit L un réseau admissible quelconque et L_0 un sous-A-réseau admissible de L de type fini. Pour tout $v \in L$, $L_v = AG.v + L_0$ est admissible de type fini il existe donc j_v telque $L_v = \varpi^{-j_v} L_0$. On en déduit que $L = \bigcup_{v \in L} \varpi^{-j_v} L_0$. Si la famille des j_v n'est pas bornée, on obtient que $L = L_0 \otimes K$ ce qui contredirai l'admissibilité de L. Donc la famille est bornée et $L = \varpi^{-j_{max}} L_0$ est de type fini.$\blacksquare$

Lemme A.2.4. On suppose que A est un anneau de valuation discrète. Soit σ une représentation de M ayant un modèle de Whittaker entier et telle que $I(\sigma)$ soit résiduellement irréductible. Alors $I(\sigma, L) = L(\Omega_{M,\sigma})$.

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe $j \geq 0$ tel que $L(\Omega_{M,\sigma}) = \varpi^{-j} I(\sigma, L)$. Soit K un sous-groupe ouvert compact assez petit bien placé par rapport à B et tel $L^{K \cap M} \neq 0$. On peut donc choisir un $v \in L^{K \cap M}$ tel que $\lambda_\sigma(v) \in A^\times$. On définit $f \in I(\sigma, L)$ par $f(g) = 0$ si $g \notin P.w_0.K$ et $f(nmw_0k) = \sigma(m).v$ si $nmk \in PK$. Alors

$$\Omega_{M,\sigma}(f) = \int_{N(K)} \lambda_\sigma(f(w_0 n))\psi(n)dn = mes(N \cap w_0^{-1} P w_0 K)\lambda_\sigma(v)$$

si K est choisit de tel sorte que $N \cap w_0^{-1} N_P w_0 K \subset Ker(\psi)$ ce qui est toujours possible. Donc $\Omega_{M,\sigma}(f) \in A^\times$ ce qui entraine que $j = 0$. $\blacksquare$

A.3 $-$ On considère maintenant la situation où $I(\sigma)$ n'est pas résiduellement irréductible. Soit $\bar{I}(\sigma)$ la réduction modulo ϖ de $I(\sigma, L)$. On a clairement $\bar{I}(\sigma) = I(\bar{\sigma})$ où σ désigne la réduction de σ modulo $\bar{\pi}$. Soit $\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_t$ les sous-représentations irréductibles de $\bar{I}(\sigma)^{ss}$. Pour tout sous-groupe ouvert compact K assez petit, on peut trouver des éléments $r_1, \dots, r_n$ dans l'algèbre de Hecke $C(K \backslash G(F)/K, A)$ tels que l'image de $\bar{r}_i$ dans $End(\bar{\pi}_j^K)$ soit égale à $\delta_{i,j}.Id_{\bar{\pi}_j^K}$. Pour tout réseau $L \subset I(\sigma)$, grâce au lemme de Hensel, on peut les relever en des idempotents $E_1^K, \dots, E_t^K$ de l'image de $C(K \backslash G(F)/K, A)$ dans $End_A(L^K)$ tels que pour chaque i, la reduction de $E_i^K.L^K$ modulo ϖ s'identifie à la composante isotypique de $(\bar{I}(\sigma)^{ss})^K$ associée à $\bar{\pi}_i^K$. On pose alors $L_{\bar{\pi}_i} = \varinjlim_K E_i^K.L^K$. Alors la reduction de $L_{\bar{\pi}_i}$ modulo ϖ s'identifie à la composante isotypique de $(\bar{I}(\sigma)^{ss})$ associée à $\bar{\pi}_i$

Soit K un sous-groupe Iwahorique de profondeur n assez grande par rapport à $Ker(\psi)$, bien placé par rapport à B et tel que σ admette des vecteurs fixes par $K_0 \cap M$. Soit $I(\sigma, K) = I(\sigma)^K$. Une base de $I(\sigma, K)$ est donné par les fonctions ϕ_h avec h variant dans un système de représentant de

$$P(O_F) \backslash G(O_F)/K \cong \sqcup_{w \in W^P} w.N^-(\varpi O_F / \varpi^n O_F)$$

avec ϕ_h la fonction caractéristique de la classe double $P(O_F).h.K$

Pour $t \in Z_M(F)$ tel que $tN_P(O_F)t^{-1} \cap N_P(O_F)$, on considère l'opérateur de Hecke $u_t = K.t.K$ acting on $I(\sigma, K)$. Pour chaque $w \in W^P$ on considère le sous espace $I_w(\sigma, K) \subset I(\sigma, K)$ engendré par les fonctions dont le support est contenu dans $\sqcup_{w' > w} P(F)w'.K_B$ avec K_B le sous-groupe d'Iwahori associéà B. Par un argument standard, on peut voir que ces sous-espaces sont stables sous l'actions des opérateurs u_t. Par ailleurs, la preuve du lemme précédent montre:

Lemme A.3.1. *Supposons que* $N \cap w_0^{-1} N_P w_0 K \subset Ker(\psi)$, *alors* $I(\sigma, L) \cap I_{w_0}(\sigma, K) = L(\Omega_{M,\sigma}) \cap I_{w_0}(\sigma, K)$

Appendix B. Familles de représentations

B.1 – Supposons que A soit une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de corps des fractions L. Soit π une L-représentation lisse admissible ayant un modèle de Whittaker A-entier $W_A(\pi, \psi)$. Pour tout point $x \in Spec(A)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ correspondant à l'idéal premier $\wp_x$, la réduction modulo $\wp_x$ de $W_A(\pi, \psi)$ détermine une représentation $W_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(\pi_x, \psi)$ que l'on peut regarder comme une représentation admissible lisse après avoir fixé un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Ainsi π peut-Ãªtre vu comme une famille de représentation $\{\pi_x; x \in Spec(A)(\overline{\mathbb{Q}}_p)\}$.

Soit $G = F^\times$ et A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre intègre. On fixe ξ_G un caractère du groupe de Weil W_F^{ab} à valeurs dans $A^\times$. Soit $F^\times \overset{art_F}{\to} W_F^{ab}$ l'isomorphisme d'Artin envoyant l'uniformisante sur le Frobenius géomérique. On pose

$$\xi_{F^\times} = \xi_G \circ art_F$$

.

Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre intègre munie d'une topologie définie par un idéal I contenant p. Soit (ϱ, N) une représentation continue de Weil-Deligne de $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ à valeurs dans $GL_n(A)$.

Lemme B.1.1. Il existe une constante locale $\epsilon_\psi(\varrho) \in A^\times$ telle que pour tout $x \in Spec(A)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on ait

$$x(\epsilon_\psi(\varrho)) = \epsilon_\psi(\varrho_x)$$

où $\varrho_x = x \circ \varrho$ est la représentation du groupe de Weil-Deligne obtenue en composant ϱ avec x.

Preuve. Comme dans la situation classique, on se ramène facilement au cas ou ϱ est primitive. Donc de la forme $\varrho = \varrho_G \otimes \xi$ où ϱ_G est une représentation de type Galois (i.e. se factorisant à travers le groupede Galois d'une extension finie.) et ξ un caractère à valeurs dans $A^\times$. Dans ce cas, on pose

$$\epsilon_\psi(\varrho) = \epsilon_\psi(\varrho_G)\xi(\varpi)^{f(\varrho_G)+n(\psi)dim(\varrho_G)}$$

où $n(\psi)$ est le plus grand entier tel que $\psi(\varpi^{-n(\psi)}) = 1$, $f(\varrho_G)$ est le conducteur de ϱ_G et $\epsilon_\psi(\varrho_G)$ est la constante locale définie par Deligne.∎

On définit également $L(X,\varrho)\in A[[X]]$ par

$$L(X,\varrho)=det(1-X\varrho(Frob)|_{V^I})$$

avec V est l'espace dela représentation ϱ et on pose

$$G(X,\varrho,\psi)=\epsilon(X,\varrho,\psi)L(X,\varrho)L(|\varpi|X^{-1},\varrho^\vee)$$

où $\varrho^\vee$ est la représentation contragrédiente de ϱ.

Proposition B.1.2. Soit A comme ci-dessus et ϱ une représentation de Weil-Deligne continue dans $GL_2(A)$ Alors, il existe une représentation $\pi=\pi(\varrho)$ de G sur $k(A)$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{Q}_\ell^\times$ à valeurs dans A telle que pour tout $f\in k(A)$

$$\pi(\begin{pmatrix} a\,t\\ 0\,b\end{pmatrix}).f(x)=det(\varrho)_F(b)\psi(a^{-1}t)f(axb^{-1})$$

et pour tout $x\in\subset Spec(A)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $\pi(\varrho)_x$ est la représentation associée à ϱ_x par la correspondance de Langlands locale habituelle.

Preuve. Si une telle représentation existe, elle est déterminée par l'action de $w=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Pour $f\in k(A)$, on note f_n la fonction sur le groupe des unités $\mathbb{Z}_\ell^\times$, $f_n(u)=f(u\ell^n)$ et on note $\hat{f}_n(\chi)$ la transformé de Fourier de f_n pour tout caractère χ de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ et $\hat{f}(X,\chi)=\sum_n\hat{f}_n(\chi)X^n$. Alors $w.f$ est déterminé par

$$\widehat{\pi(w).f}(\chi,X)=G(X,\varrho\otimes\chi\circ art^{-1},\psi)\widehat{f}(\chi^{-1},X^{-1})$$

Réciproquement, pour démontrer que cela définit bien une représentation, il faut démontrer que pour toute relation $g_1\dots g_m=1$ d'éléments $g_i\in GL_2(F)$, on a

$$\pi(\varrho)(g_1)\dots\pi(\varrho(g_m))=Id_{k(A)}.$$

Or cette relation est vérifiée modulo $\wp_x=Ker(x:A\to\overline{\mathbb{Q}}_p)$ par l'existence de la correspondance locale de Langlands appliquée à ϱ_x. Puisque ceci est vrai pour tout x et que $\cap_x\wp_x=0$, la relation est vérifiée ce qui montre l'existence de $\pi(\varrho)$.∎

Il a été démontré par M-F Vignéras que l'action de w respectait la structure entière [Vig2]. De plus $k(A)$ munie de cette action de G s'identifie au modèle de Whittaker de cette représentation par $f\mapsto(g\mapsto(g.f)(1))$. Il est naturelle de conjecturer que cette proposition s'étend au cas de GL_n.

B.2 – Soit $\mathbf{I}$ une extension finie $\mathbb{Z}_p[[T]]$ et $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\mathbf{I}\in\mathbf{I}[[q]]$ une famille de Hida de formes modulaires primitives normalisée de conducteur C et nebentypus $\epsilon_\mathcal{F}$. Soit ℓ un nombre premier différent de p et $\rho_\mathcal{F}$ la représentation galoisienne de $G_\mathbb{Q}$ dans $GL_2(\mathbf{I})$ associée à $\mathcal{F}$. La restriction à D_ℓ un groupe de décomposition en ℓ de $\rho_\mathcal{F}$ permet de déterminer une représentation de Weil-Deligne continue de $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ dans $GL_2(\mathbf{I})$ que l'on note $\varrho_{\mathcal{F},\ell}$ et donc une $\mathbf{I}[\mu_{\ell^\infty}]$-représentation $\pi(\varrho_{\mathcal{F},\ell})$ de $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ ayant un modèle de Whittaker sur $\mathbf{I}[\mu_{\ell^\infty}]$. Par la compatibilité des représentations aloisiennes associées aux formes modulaires avec la correspondance de Langlands locale (prouvée par H. Carayol), on déduit le fait suivant:

Lemme B.2.1. *Soit $\ell \neq p$. Pour tout $P \subset \mathbf{I}$ arithmétique, la réduction modulo P de $\pi(\varrho_{\mathcal{F},\ell})$ est isomorphe à la composante locale en ℓ de la représentation cuspidale engendrée par $f_P = \mathcal{F}$ modulo P.*

References

[An74] A. N. Andrianov, *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus* 2, Russian Math. Surveys, vol. 29-1, p.45-161, 1974.

[Ar04] J. Arthur, *Automorphic representations of* GSp(4), Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 65–81, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[BSP] S. Böcherer, Schultz-Pillot, *On qa theorem of Waldspurger and on Eisenstein series of Klingen type*, Math. Ann., vol. 288, p. 361-388, 1990.

[Ca] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, preprint 1995.

[Ch] C.-L. Chai,*Arithmetic compactification of Siegel molar varities*, Proc. London Math. Soc, 198? .

[CF] G. Faltings, C.-L. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergebnisse der Math. 22, Springer Verlag. 1990.

[CS] J. Coates, C. Schmidt, *Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve*, J. Reine Angew. Math., vol. 375/376, p. 104-156, 1987.

[CaSa] W. Casselman, J. Shalika, *The unramified principal series of p-adic groups II The Whittaker function*, Compositio Math. Vol. 41, Fasc. 2, p. 207-231, 1980.

[DD] A. Dabrowski, D. Delbourgo, *S-adic L-functions attached to the symmetric square of a new form*

[Fi99] Y. Flicker, *Matching of orbital integrals on* GL(4) *and* GSp(2), Mem. Amer. Math. Soc. 137 (1999), no. 655, viii+112 pp.

[GJ] S.Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* $GL(2)$ *and* $GL(3)$, Ann. Sc. ENS. 4^e série, t. 11, p. 471-542, 1978.

[GPR] S. Gelbart, I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis, *Explicit constructions of automorphic L-functions*, Lecture Notes in Mathematics, 1254. Springer-Verlag, Berlin, 1987. vi+152 pp.

[G94] R. Greenberg, *Iwasawa theory and p-adic Deformations of Motives*, Proc. on Motives held at Seattle, 1994.

[GV] R. Greenberg, V.Vatsal, *Iwasawa Theory for Elliptic Curves*, Invent. math. 142, p. 17-63, 2000.

[Hi81] H. Hida, *Congruences of cusp forms and special values of their zeta functions*, Invent. math. 63, p. 225-261, 1981.

[Hi85] H. Hida, *A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I*, Invent. math. 79, p. 159-195, 1985.

[Hi88a] H. Hida, *A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms II*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 38, p. 1-83, 1988.

[Hi88b] H. Hida, *Modules of congruence of Hece algebras and L-functions associated with cusp forms*, American J. of Math., vol. 110, p. 323-382, 1988.

[Hi90] H. Hida, *p-adic L-functions for base change lifts of* $GL(2)$ *to* $GL(3)$, Proc. Ann Arbor Vol II, Pers. in Math., p. 94-142, 1990.

[Hi02] H. Hida, *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 1, 1–76.

[Hi98] H. Hida, *Adjoint Selmer groups as Iwasawa modules*, Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998). Israel J. Math. 120 (2000), part B, 361–427.

[Hi04] H. Hida, *p-adic automorphic forms on Shimura varieties*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2004. xii+390 pp.

[HTU] H. Hida, J. Tilouine, E. Urban, *Adjoint Modular Galois Representations and their Selmer groups*, Proc. of Natl. Acad. Sci. USA Conf., vol. 94, 4249-4252, 1997.

[Ka] Kaufhold, *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleighung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades*, Math. Annalen, vol. 137, p. 454-476, 1959.

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1990.

[KP] K. Kitagawa, A. Panchishkin *On the* Λ*-adic Klingen-Eisenstein series*, publication de l'Institut Fourier, 1996.

[KR] S.S. Kudla and S. Rallis, *On the Weil-Siegel formula.* J. Reine Angew. Math. 387 (1988), 1–68.

[KS] A. Knapp, B. Speh *Status of Classification of Irreducible Unitary Rrepresentations*, Lecture Notes in Math.

[L1] R P. Langlands, *Euler Products*, Yale Mathematical Monographs,Yale University Press 1971.

[GIT] D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag Progress in Math.

[Mi] S.-I. Mizumoto, *Eisenstein series for Siegel modular groups.* Math. Ann. 297 (1993), no. 4, 581–625.

[MW84] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of Q*, Invent. Math. 76 (1984), no. 2, 179–330.

[MW] C. Moeglin et J.L. Walspurger, *Décomposition Spectrale et Séries d'Eisenstein*, Birkhäuser. Progress in Math, 1994.

[PSR] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis *L-functions for classical groups*, Lect. Notes in Math. 1245, Berlin-heidelberg-New York 1987.

[R] K. Ribet, *A modular construction of unramified p-extensions of$Q(\mu_p)$*, Invent. Math. 34 (1976), no. 3, 151–162.

[Sch] C. Schmidt, *p-adic measures attached to automorphic representations of $GL(3)$* Invent. Math. vol. 92 , p. 597-631,1988.

[Se] J. P. Serre, *Algèbres locales et multiplicités*, Lecture Notes in Math.11, Springer-Verlag.

[Sha] F. Shahidi, *On certain L-functions*, American J. of Math., vol. 103, p. 297-356, 1981.

[Sha2] F. Shahidi, *A proof of Langland's conjecture on Plancherel measures; Complementary series for p-adic groups*, Annals of Math., vol. 132, p. 273-330, 1990.

[Sh82] G. Shimura, *Confluent Hypergeometric Functions on Tube Domains*, Math. Ann. 260, 269-302, 1982.

[Sh83] G. Shimura, *On Eisenstein series*, Duke math. J. 50, 417-476, 1983.

[Sh94] G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Invent. Math. 116, 531-576, 1994.

[Sh95] G. Shimura, *Eisenstein series and zeta functions on symplectic groups*, Invent. math. 119, 539-584, 1995.

[St] J. Sturm, *Special values of the zeta functions and Eisenstein series of half integral weight*, Amer. J. Math., vol. 102, p. 219-240, 1980.

[SU06] C. Skinner and E. Urban, *Sur les déformations p-adiques de certaines représentations automorphes*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), no. 4, 629–698.

[TU] J. Tilouine and E. Urban *Several variables p-adic families of Siegel-Hilbert Cusp eigensystems and their Galois representations*, Ann. Sc. ENS. 4^e série, t.32, p. 499-574, 1999.

[U01] E. Urban, *Selmer groups and the Eisensten-Klingen ideal*, Duke Math. J., vol. 106, No 3, 2001.

[U06] E. Urban, *Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de* $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque No. 302 (2005), 151–176.

[V] V. Vatsal, *Special values of anticyclotomic L-functions.* Duke Math. J. 116 (2003), no. 2, 219–261.

[Vig1] M-F. Vignéras, *Représentations ℓ-modulaire d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Math. Birkhaüser137, 1996.

[Vig2] M-F. Vignéras, *Integral Kirillov model* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 411-416, 1998.

[Wh06] D. Whitehouse, *The twisted weighted fundamental lemma for the transfer of automorphic forms from* GSp(4), Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque No. 302 (2005), 291–436.

[W90] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 3, 493–540.

[W95] A. Wiles *Elliptic curves and Fermat's Last Theorem* Ann. of Math. 141, p. 443-551, 1995.

[Z] S.-W. Zhang *Gross-Zagier formula for* GL_2. Asian J. Math. 5 (2001), no. 2, 183–290.

Eric Urban, Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA

Email address: `urban@math.columbia.edu`