А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода, *Функц. анализ и его прил.*, 2017, том 51, выпуск 1, 60–81

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3259

Функциональный анализ и его приложения
2017, т. 51, вып. 1, с. 60–81

УДК 517.929

Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода*

© 2017. А. В. Ильина, И. М. Кричевер

В работе предложены новые редукции двумеризованной цепочки Тода, связанные с нижнетреугольными разностными операторами. Для данных редукций построена в явном виде гамильтонова теория.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3259

§1. Введение

Недавний повышенный интерес к теории линейных разностных операторов был вызван их связью с теорией дискретных интегрируемых систем нового типа (а именно, пентаграммных отображений и их многомерных обобщений), которые, как оказалось, тесно связаны с теорией представлений (фризами Кокстера) и теорией кластерных алгебр.

Напомним, что при пентаграммном отображении образом n-угольника в $\mathbb{RP}^2$ с вершинами v_i является n-угольник, вершины которого суть точки пересечения диагоналей (v_{i-1}, v_{i+1}) и (v_i, v_{i+2}). Как показано в [12], если n и $k+1$ взаимно просты, то пространство модулей n-угольников в $\mathbb{RP}^k$ изоморфно как алгебраическое многообразие пространству $\mathscr{E}_{k+1,n}$ n-периодических линейных разностных уравнений

$$V_i = a_i^{(1)} V_{i-1} - a_i^{(2)} V_{i-2} + \dots + (-1)^{k-1} a_i^{(k)} V_{i-k} + (-1)^k V_{i-k-1}, \tag{1.1}$$

у которых *все* решения (анти)периодичны:

$$V_{i+n} = (-1)^k V_i. \tag{1.2}$$

В статье [5] такие уравнения названы суперпериодическими. Уравнения (1.1) без ограничений (1.2) соответствуют так называемым скрученным n-угольникам в $\mathbb{RP}^k$, представляющим собой последовательности точек $v_j \in \mathbb{RP}^k$, $j \in \mathbb{Z}$, для которых существует проективное линейное преобразование M, такое, что $v_{j+n} = M v_j$.

В работе [12] установлено, что пентаграммное отображение является дискретной интегрируемой системой, а именно, оно сохраняет некоторую естественную структуру пуассонова многообразия на пространстве n-периодических нижнетреугольных операторов (1.1) порядка 3, и построен полный набор интегралов движения в инволюции. В [13] доказана алгебро-геометрическая интегрируемость пентаграммного отображения.

В [11] предложена явная конструкция двойственности между пространствами $\mathscr{E}_{k+1,n}$ и $\mathscr{E}_{n-k-1,n}$, обобщающая классическую двойственность Гэйла для

*Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

n-угольников. В работе [5] показано, что обобщенная двойственность Гэйла тесно связана с теорией коммутирующих разностных операторов, и развита спектральная теория нижнетреугольных разностных операторов вида

$$L = T^{-k-1} + \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} T^{-j}, \qquad a_i^{(j)} = a_{i+n}^{(j)}, \tag{1.3}$$

с ненулевым старшим коэффициентом:

$$a_i^{(1)} \neq 0. \tag{1.4}$$

Здесь и далее T является оператором сдвига: $T\psi_j = \psi_{j+1}$

Спектральная теория треугольных разностных операторов интересна сама по себе. Отправной точкой настоящей работы явилось следующее простое наблюдение: спектральная теория треугольных операторов естественным образом связана со специальной редукцией иерархии двумеризованной цепочки Тода.

Замечание 1.1. Для определенности в данной статье мы будем рассматривать только случай нижнетреугольных редукций, поскольку инволюция $L \to L^*$, где

$$L^* = T^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} T^j a_i^{(j)} = T^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_{i+j}^{(j)} T^j \tag{1.5}$$

— формально сопряженный оператор, устанавливает соответствие между нижне- и верхнетреугольными операторами.

Напомним, что уравнение двумеризованной цепочки Тода

$$\partial^2_{\xi\eta}\varphi_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-1} - \varphi_i} \tag{1.6}$$

является условием совместности двух линейных задач

$$\begin{cases} \partial_\xi \Psi_i = v_i \Psi_i + \Psi_{i-1}, \\ \partial_\eta \Psi_i = c_i \Psi_{i+1}, \quad c_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Полная иерархия двумеризованной цепочки Тода представляет собой бесконечный набор уравнений на функцию $\varphi_i = \varphi_i(t_1^+, t_1^-, t_2^+, t_2^-, \ldots)$ дискретной переменной i и двух наборов непрерывных параметров $t_m^\pm$, называемых обычно *временами* иерархии. Времена t_1^+ и t_1^- далее отождествляются с ξ и η. Уравнения иерархии являются условием совместности линейных задач

$$\partial_{t_m^\pm} \Psi = L_m^\pm \Psi, \tag{1.8}$$

где $L_m^\pm$ — это разностный оператор вида

$$L_m^\pm = \sum_{j=0}^{m} a_{i,m}^{(j,\pm)} T^{\pm j} \tag{1.9}$$

со старшими коэффициентами

$$a_{i,m}^{(m,-)} = 1, \qquad a_{i,m}^{(m,+)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i+m}}. \tag{1.10}$$

Легко проверить, что из совместности второго уравнения в (1.7) с (1.8) следует, что

$$a_{i,m}^{(0,-)} = \partial_{t_m^-}\varphi_i, \qquad a_{i,m}^{(0,+)} = 0. \tag{1.11}$$

Замечание 1.2. Важно подчеркнуть, что иерархия произвольного солитонного уравнения как линейное пространство коммутирующих векторных полей хорошо определена. При этом, как правило, не существует никакого канонического выбора «времен» (что эквивалентно выбору канонического базиса коммутирующих векторных полей). Условие, состоящее в том, что оператор $L_m^{\pm}$ является нижнетреугольным (верхнетреугольным) порядка m, исключает данную неоднозначность лишь частично. Этим условием времена определены с точностью до линейных треугольных преобразований $\tilde{t}_m^{\pm} = t_m^{\pm} + \sum_{\mu<m} c_\mu^{\pm} t_\mu^{\pm}$. Более детально мы вернемся к этому вопросу в §§2, 3 ниже.

Зафиксируем одно из времен иерархии t_{k+1}^- (или, в общем случае, линейную комбинацию первых $k+1$ времен) и рассмотрим решение иерархии, *не* зависящее от него, т. е.

$$\partial_{t_{k+1}^-}\varphi_i = 0. \tag{1.12}$$

Пространство таких решений может быть отождествлено с пространством вспомогательных операторов L_{k+1}^-. Заметим, что из (1.11) следует, что при условии (1.12) оператор $L = L_{k+1}^-$ становится строго нижнетреугольным, т. е. вида (1.3).

Ограничение потока иерархии, связанного с временем $t_m^{\pm}$, на пространство решений, стационарных по времени t_{k+1}^-, можно рассматривать как конечномерную систему с представлением Лакса

$$\partial_{t_m^{\pm}} L = [L_m^{\pm}, L]. \tag{1.13}$$

Для $\xi = t_1^+$ вспомогательный оператор имеет вид $L_1^- = v_i + T^{-1}$ с $v_i = \partial_\xi\varphi_i$ и (1.13) эквивалентно следующей системе уравнений на $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}}$ и $a_i^{(j)}$, $j = 2,\dots,k$:

$$\begin{cases} \partial_\xi a_i^{(j)} = a_{i-1}^{(j-1)} - a_i^{(j-1)} + a_i^{(j)}(v_i - v_{i-j}), \quad j = 2,\dots,k, \\ 0 = a_{i-1}^{(k)} - a_i^{(k)} + (v_i - v_{i-k-1}), \quad v_i = \partial_\xi\varphi_i. \end{cases} \tag{1.14}$$

Аналогично для $\eta = t_1^+$ получаем систему

$$\partial_\eta a_i^{(j)} = c_i a_{i+1}^{(j+1)} - c_{i-j-1} a_i^{(j+1)}, \qquad j = 1,\dots,k, \tag{1.15}$$

где $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}}$, $c_i = e^{\varphi_i-\varphi_{i+1}}$.

Главной целью данной работы является построение бигамильтоновой теории систем (1.14) и (1.15). Мы покажем, что пространство строго нижнетреугольных разностных операторов L допускает две различные структуры пуассонова многообразия, и определим соответствующие гамильтонианы.

Для случая $k = 1$ системы (1.14) и (1.15) имеют наиболее простой и интересный вид:

$$\partial_\xi\varphi_{i-1} - \partial_\xi\varphi_{i+1} = e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1}-\varphi_i}, \tag{1.16}$$

$$\partial_\eta\varphi_i - \partial_\eta\varphi_{i-1} = e^{\varphi_{i-1}-\varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}. \tag{1.17}$$

A posteriori в этих случаях один из наших главных результатов может быть легко проверен. А именно, легко проверить, что системы (1.16) и (1.17) являются гамильтоновыми по отношению к форме $\omega = \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1}$, $\varphi_i = \varphi_{i+n}$, с соответствующими гамильтонианами

$$H^- = \sum_{i=1}^{n} e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}, \quad H^+ = \sum_{i=1}^{n} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i}, \qquad \varphi_i = \varphi_{i+n}. \tag{1.18}$$

Но даже в этом простейшем случае вторая гамильтонова структура уравнений (1.16) и (1.17) далеко не так очевидна. В заключительном параграфе работы мы доказываем, что при (взаимно однозначной для нечетных n) замене переменных $e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} = x_i - x_{i-2} + e_1$ уравнения (1.16) переходят в гамильтоновы уравнения по отношению к форме $\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{i-1}$, $x_i = x_{i+n}$, с гамильтонианом

$$\widetilde{H}^- = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (x_{i-1} - x_{i+1}).$$

§2. Необходимые сведения

В этом параграфе мы представим необходимые сведения из спектральной теории строго нижнетреугольных операторов и конструкцию алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

2.1. Спектральная теория нижнетреугольных разностных операторов. Центральное место в спектральной теории разностных операторов занимает понятие спектральной кривой, ассоциированной с n-периодическим разностным оператором L. По определению точки спектральной кривой параметризуют блоховские решения уравнения

$$L\psi = E\psi, \tag{2.1}$$

т. е. решения уравнения (2.1), являющиеся собственными функциями оператора монодромии:

$$T^{-n}\psi = w\psi. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathscr{L}(E)$ линейное пространство решений уравнения (2.1). Его размерность равна порядку оператора L. Оператор монодромии сохраняет $\mathscr{L}(E)$ и, следовательно, определяет конечномерный оператор $T^{-n}(E)$ на нем. Пары комплексных чисел (w, E), для которых существует общее решение уравнений (2.1) и (2.2), определяются характеристическим уравнением

$$R(w, E) = \det(w \cdot 1 - T^{-n}(E)) = 0.$$

Полином $R(w, E)$ может быть получен другим способом, а именно, как характеристический полином конечномерного оператора $L(w)$, который является ограничением оператора L на пространство $\mathscr{T}(w) := \{\psi \mid w\psi_{i+n} = \psi_i\}$:

$$R(w, E) = \det(E \cdot 1 - L(w)) = 0, \qquad L(w) := L|_{\mathscr{T}(w)}. \tag{2.3}$$

Следует подчеркнуть, что семейства алгебраических кривых, являющихся спектральными кривыми, зависят от выбора семейства разностных операторов. В работе [5] показано, что в случае строго нижнетреугольных разностных операторов L соответствующий характеристический полином имеет вид

$$R(w, E) = w^{k+1} - E^n + \sum_{i>0,\, j\geqslant 0,\, ni+(k+1)j<n(k+1)} r_{ij} w^i E^j = 0, \tag{2.4}$$

где $r_{1,0}=\prod_{i=1}^n a_i^1\neq 0$ (в силу предположения (1.4)).

Если n и $k+1$ взаимно просты, то аффинная кривая, определенная уравнением (2.4) в $\mathbb{C}^2$, компактифицируется одной точкой p_-. В этой точке функции $w(p)$ и $E(p)$, естественным образом определенные на Γ, имеют полюс порядка n и $k+1$ соответственно. Другими словами, если выбрать локальную координату z в окрестности точки p_-, такую, что $w=z^{-n}$, то разложение в ряд Лорана функции E имеет вид

$$E=z^{-k-1}\biggl(1+\sum_{s=1}^{\infty}e_sz^s\biggr),\qquad w=z^{-n}. \tag{2.5}$$

В [5] показано, что особая форма уравнения (2.4) позволяет выделить другую отмеченную точку p_+ на Γ, являющуюся прообразом функции $E=0$ с $w=0$. В этой точке у $E=E(p)$ имеется простой нуль, а у функции $w=w(p)$ — нуль порядка n,

$$w=\frac{1}{r_{1,0}}E^n\biggl(1+\sum_{s=1}^{\infty}w_sE^s\biggr). \tag{2.6}$$

Аналитические свойства блоховского решения в окрестности выделенных точек описываются следующими двумя утверждениями.

Лемма 2.1 [5]. *Для любого оператора L вида* (1.3), *порядок и период которого взаимно просты, существует единственный формальный ряд $E(z)$ вида* (2.5), *такой, что уравнение $L\psi=E\psi$ имеет единственное формальное решение вида*

$$\psi_i(z)=z^i\biggl(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^-(i)z^s\biggr) \tag{2.7}$$

с периодическими коэффициентами $\xi_s^-(i)=\xi_s^-(i+n)$, нормированными условием $\xi_s^-(0)=0$.

Для дальнейшего использования изложим кратко идею доказательства.

Подстановка рядов (2.7) и (2.5) в уравнение $L\psi=E\psi$ приводит к системе разностных уравнений на неизвестные константы e_s и неизвестные функции $\xi_s^-(i)$ дискретной переменной i. Первое из этих уравнений имеет вид

$$e_1+\xi_1^-(i)-\xi_1^-(i-k-1)=a_i^{(k)}. \tag{2.8}$$

Условие периодичности для функций ξ_1^- единственным образом определяет

$$e_1=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{(k)} \tag{2.9}$$

и преобразует разностное уравнения (2.8) порядка $k+1$ в уравнение порядка 1

$$me_s+\xi_1^-(i)-\xi_1^-(i-1)=\sum_{j=0}^{m-1}a_{i-j(k+1)}^{(k)}, \tag{2.10}$$

где m — целое число, $1\leqslant m<n$, такое, что $m(k+1)=1\ (\mathrm{mod}\,n)$. Уравнение (2.10) и начальное условие $\xi_1^-(0)=0$ единственным образом определяют $\xi_1^-(i)$.

Для произвольного s уравнение, определяющее e_s и ξ_s^-, имеет вид

$$e_s+\xi_s^-(i)-\xi_s^-(i-k-1)=Q_s(e_1,\dots,e_{s-1};\xi_1,\dots,\xi_{s-1},a_i^{(j)}), \tag{2.11}$$

где Q_s — функция, линейная по $e_{s'}$, $\xi_{s'}$, $s' < s$, и полиномиальная по $a_i^{(j)}$. Аргументы, использованные ранее, позволяют сделать вывод, что оно имеет единственное периодическое решение. □

Лемма 2.2 [5]. *Уравнение $L\psi = E\psi$ имеет единственное формальное решение вида*

$$\psi_i(E) = e^{\varphi_i} E^{-i}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) E^s\right), \qquad a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}, \tag{2.12}$$

с условием нормировки $\xi_s^+(0) = 0$.

Доказательство. Подстановка (2.12) в (2.1) определяет систему неоднородных разностных уравнений первого порядка на неизвестные коэффициенты ξ_s^+. Для $s = 1$

$$\xi_1^+(i) - \xi_1^+(i-1) = e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} a_i^{(2)}. \tag{2.13}$$

Для произвольного s уравнения принимают аналогичный вид:

$$\xi_s^+(i) - \xi_s^+(i-1) = e^{-\varphi_i} q_s(\xi_1^+, \ldots, \xi_{s-1}^+, a_i^{(j)}), \tag{2.14}$$

и они вместе с начальными условиями рекуррентно определяют $\xi_s^+(i)$ для всех i. □

Из единственности формального решения (2.12) вытекает

Следствие 2.3. *Формальный ряд* (2.12) *является блоховским решением, т.е. удовлетворяет условию* (2.2) *с*

$$w(E) = \psi_{-n}(E) = r_{1,0}^{-1} E^n \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} w_s E^s\right). \tag{2.15}$$

Из леммы 2.1 следует, что компоненты $\psi_i(p)$, $p := (w, E) \in \Gamma$, блоховского решения $\psi(p)$, рассматриваемые как функции на спектральной кривой, имеют *нуль порядка* i в отмеченной точке p_-. Из леммы 2.2 следует, что $\psi_i(p)$ имеет *полюс порядка* i в отмеченной точке p_+. Стандартным образом можно доказать, что в этом случае ψ_i является мероморфной функцией на Γ, имеющей вне отмеченных точек $p_\pm$ (для операторов общего положения) g полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, которые не зависят от i (детали см. в [1]). Данные аналитические свойства являются определяющими для дискретной функции Бейкера–Ахиезера, введенной в [2].

Отождествление блоховских функций периодических разностных операторов с дискретной функций Бейкера–Ахиезера является ключевым для установления связи между спектральной теорией нижнетреугольных операторов, теорией коммутирующих разностных операторов (см. [2]) и теорией алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

Соответствие

$$L \longmapsto \{\Gamma, D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g\}, \tag{2.16}$$

где Γ является спектральной кривой оператора L, а D — дивизор полюсов блоховского решения ψ, обычно называется *прямым спектральным преобразованием.*

Это взаимно однозначное соответствие между открытыми всюду плотными подмножествами пространства операторов и пространства алгебро-геометрических спектральных данных. Конструкция *обратного* спектрального преобразования есть частный случай общей конструкции алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

2.2. Алгебро-геометрические решения иерархии двумеризованной цепочки Тода. Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g с фиксированными локальными координатами $z_\pm$ в окрестностях двух отмеченных точек $p_\pm \in \Gamma$, $z_\pm(p_\pm) = 0$. Пусть $t = \{t_j^\pm,\ j = 1, 2, \dots\}$ — набор комплексных параметров, из которых только *конечное* число ненулевые. Как показано в работе [3], справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Для произвольного набора g точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ существует единственная мероморфная функция $\Psi_i(t,p)$, $p \in \Gamma$, которая*

(i) *вне отмеченных точек $p_\pm$ имеет простые полюсы в точках γ_s (если γ_s различны)*;

(ii) *в окрестностях отмеченных точек имеет вид*

$$\Psi_i(t, z_\pm) = z_\pm^{\mp i} e^{(\sum_m t_m^\pm z_\pm^{-m})} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^\pm(i,t)\, z_\pm^s \right), \qquad \xi_0^- = 1. \tag{2.17}$$

Функция Ψ_i является частным случаем так называемых *многоточечных функцией Бейкера–Ахиезера* (см., например, [10]).

Из единственности функции Ψ_i следует

Теорема 2.5 [3]. *Пусть $\Psi_i(t,p)$ — функция Бейкера–Ахиезера, соответствующая произвольному набору данных $\{\Gamma, p_\pm, z_\pm; \gamma_1, \dots, \gamma_g\}$. Тогда существуют единственные операторы $L_m^\pm$ вида* (1.9), (1.10) *с $\varphi_i(t) := \ln \xi_0^+(t)$, такие, что выполняются уравнения* (1.8).

Замечание 2.6. По определению функция Бейкера–Ахиезера зависит от выбора локальных координат $z_\pm$ в окрестностях отмеченных точек $p_\pm$. Выбор локальной координаты соответствует треугольному преобразованию времен $t_m^\pm$ (ср. с замечанием во введении).

Алгебро-геометрические решения двумеризованной цепочки Тода могут быть явно выражены через тэта-функции Римана. Выбор базиса циклов a_i, b_i, $i = 1, \dots, g$, на Γ с канонической матрицей пересечений, $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$, позволяет определить:

(a) базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_i, $\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$;

(b) матрицу b-периодов B, $B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$, и соответствующую тэта-функцию Римана

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i (m,z) + \pi i (Bm,m)}, \qquad z = z_1, \dots, z_g;$$

(c) многозначное отображение Абеля $A\colon \Gamma \to \mathbb{C}^g$, при котором координаты $A_k(p)$ вектора $A(p)$ равны $\int^p \omega_k$;

(d) нормированный абелев дифференциал третьего типа $d\Omega_0$, $\oint_{a_i} d\Omega_0 = 0$, имеющий простые полюсы с вычетами ∓ 1 в точках $p_\pm$, и абелев дифференциал второго рода $d\Omega_{m,\pm}$ с полюсами в $p_\pm$ вида $d\Omega_{m,\pm} = d(z_\pm^{-m} + O(z_\pm))$, нормированный условием $\oint_{a_i} d\Omega_{m,\pm} = 0$.

Лемма 2.7 [3]. *Функция Бейкера–Ахиезера задается формулой*

$$\Psi_i(t,p)=\frac{\theta(A(p)+iU_0+\sum U_{m,\pm}t_m^{\pm}+Z)\,\theta(A(p_-)+Z)}{\theta(A(p_-)+iU_0+\sum U_{m,\pm}t_m^{\pm}+Z)\,\theta(A(p)+Z)}\,e^{i\Omega_0(p)+\sum t_m^{\pm}\Omega_{m,\pm}(p)}\,. \tag{2.18}$$

Здесь суммирование идет по всем парам индексов $(m,\pm)$, *причем*

(a) $\Omega_0(p)$ *и* $\Omega_{m,\pm}(p)$ — *абелевы интегралы,* $\Omega_0(p)=\int^p d\Omega_0$, $\Omega_{m,\pm}(p)=\int^p d\Omega_{m,\pm}$, *соответствующие дифференциалам, введенным выше и нормированным так, что в окрестности точки* p_- *они имеют вид*

$$\Omega_0(z_-)=\ln z_-+O(z_-),\quad \Omega_{m,-}(z_-)=z_-^{-m}+O(z_-),\quad \Omega_{m,+}(z_-)=O(z_-);$$

(b) $2\pi iU_0$, $2\pi iU_{\alpha,j}$ — *векторы* b*-периодов, т.е. векторы с координатами*

$$U_0^k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k}d\Omega_0,\qquad U_{m,\pm}^k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k}d\Omega_{m,\pm}; \tag{2.19}$$

(c) Z — *произвольный вектор, соответствующий дивизору полюсов функции Бейкера–Ахиезера.*

Заметим, что из билинейных соотношений Римана следует, что $U_0=A(p_-)-A(p_+)$, а из почленного сравнения коэффициентов при одинаковых степенях в левой и правой частях формулы (2.18) можно получить следующий результат.

Теорема 2.8 [3]. *Алгебро-геометрическое решение двумеризованной цепочки Тода дается формулой*

$$\varphi_i(t)=\ln\frac{\theta((i-1)U_0+\sum U_{m,\pm}t_m^{\pm}+\widetilde{Z})}{\theta(iU_0+\sum U_{m,\pm}t_m^{\pm}+\widetilde{Z})}+ic_0+\sum c_{m,\pm}t_m^{\pm}, \tag{2.20}$$

где $\widetilde{Z}=Z+A(p_-)$ — *произвольный вектор, векторы* U_0 *и* $U_{m,\pm}$ *определены в* (2.19), *а константы* c_0 *и* $c_{m,\pm}$ *являются старшими членами в разложении абелевых интегралов в окрестности точки* p_+:

$$\Omega_0(z_+)=-\ln z_++c_0+O(z_+), \tag{2.21}$$
$$\Omega_{m,+}(z_+)=z_+^{-m}+c_{m,+}+O(z_+),\quad \Omega_{m,-}(z_+)=c_{m,-}+O(z_+).$$

Из (2.20) легко следует, что алгебро-геометрическое решение в общем случае является *квазипериодической* функцией всех переменных, включая и переменную i. Оно n-периодично по дискретной переменной i, если вектор $nU_0=n(A(p_+)-A(p_-))$ является вектором решетки, определяющей якобиан кривой Γ. Последнее эквивалентно следующему утверждению.

Лемма 2.9. *Пусть* Γ — *гладкая алгебраическая кривая, на которой существует мероморфная функция* w *с единственным нулем в некоторой точке* p_+ *и полюсом в другой точке* p_- *порядка* n. *Тогда функция Бейкера–Ахиезера, соответствующая кривой* Γ, *точкам* $p_\pm$ *и произвольному дивизору* γ_s, *удовлетворяет уравнению* (2.2), *и как следствие соответствующее решение иерархии двумеризованной цепочки Тода* n*-периодично.*

Для доказательства данного утверждения достаточно проверить, что функции Ψ_{i-n} и $w\Psi_n$ имеют одни и те же аналитические свойства, а следовательно, совпадают.

2.3. Двойственная функция Бейкера–Ахиезера. Для дальнейшего напомним важное понятие *двойственной функции Бейкера–Ахиезера* (подробное обсуждение понятия двойственных функций можно найти в [10]).

Для неспециального дивизора $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ степени g на гладкой алгебраической кривой Γ рода g с двумя отмеченными точками можно определить *двойственный* эффективный дивизор $D^+ = \gamma_1^+ + \dots + \gamma_g^+$ степени g следующим образом: для заданного D существует единственный мероморфный дифференциал $d\Omega$ с простыми полюсами с вычетами ± 1 в отмеченных точках, голоморфный всюду, кроме этих точек, и нулями в точках γ_s, $d\Omega(\gamma_s) = 0$. Дивизор нулей дифференциала $d\Omega$ имеет степень $2g$. Следовательно, помимо γ_s дифференциал $d\Omega$ имеет нули в g других точках γ_s^+, т. е. $d\Omega(\gamma_s^+) = 0$. Другими словами, дивизор D^+ определен уравнением $D + D^+ = \mathscr{K} + p_+ + p_- \in J(\Gamma)$, где $\mathscr{K}$ — канонический класс, т. е. класс эквивалентности дивизора нулей голоморфного дифференциала на Γ.

Функция $\Psi_i^+(t,p)$, двойственная функции Бейкера–Ахиезера $\Psi_i(t,p)$, отвечающей дивизору D, определяется следующими аналитическими свойствами: (i) вне отмеченных точек $p_\pm$ она мероморфна и имеет простые полюсы в γ_s^+ (если γ_s^+ различны); (ii) в окрестности отмеченных точек она имеет вид

$$\Psi_i^+(t, z_\pm) = z_\pm^{\pm i} e^{-(\sum_m t_m^\pm z_\pm^{-m})} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^\pm(i,t)\, z_\pm^s \right), \qquad \chi_0^- = 1. \tag{2.22}$$

Из этого определения следует, что дифференциал $\Psi_i^+ \Psi_j \, d\Omega$ является мероморфным дифференциалом на Γ с возможными полюсами только в отмеченных точках $p_\pm$. Кроме того, для $i > j$ $(i < j)$ он голоморфен в p_+ (p_-). Так как сумма вычетов мероморфного дифференциала равняется нулю, то мы имеем равенство

$$\operatorname*{res}_{p_\pm} \Psi_i^+ \Psi_j \, d\Omega = \pm \delta_{i,j}, \tag{2.23}$$

из которого следует, что Ψ^+ удовлетворяет уравнению

$$(\Psi^+ L)_i \equiv \Psi_{i+k+1}^+ + a_{i+k}^{(k)} \Psi_k^+ + \dots + a_{i+1}^{(1)} \Psi_{i+1}^+ = E \Psi_i^+, \tag{2.24}$$

сопряженному к (2.1), и уравнению

$$-\partial_{t_m^\pm} \Psi^+ = \Psi^+ L_m^\pm. \tag{2.25}$$

Тэта-функциональная формула (2.20) для двойственной функции Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\Psi_i^+(t,p) = \frac{\theta(A(p) - iU_0 - \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + Z^+)\, \theta(A(p_-) + Z^+)}{\theta(A(p_-) - iU_0 - \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + Z^+)\, \theta(A(p) + Z^+)}\, e^{-i\Omega_0(p) - \sum t_m^\pm \Omega_{m,\pm}(p)}, \tag{2.26}$$

где $Z + Z^+ = \mathscr{K} + A(p_+) + A(p_-)$. Из аналитических свойств функции Ψ^+ легко следует

Лемма 2.10. *В предположениях леммы* 2.9 *двойственная функция Бейкера–Ахиезера удовлетворяет уравнению*

$$\Psi_i^+ = w \Psi_{i-n}^+. \tag{2.27}$$

Замечание 2.11. Как уже отмечалось выше, построение обратного спектрального преобразования может рассматриваться как частный случай построения алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода. Действительно, пусть Γ — кривая, определенная уравнением вида (2.4). Тогда из простого сравнения аналитических свойств следует, что блоховская функция оператора L совпадает с функции Бейкера–Ахиезера, зависящей от бесконечного набора переменных, когда все непрерывные времена равны нулю:

$$\psi_i = \Psi_i\big|_{t_k^{\pm}=0}.$$

§3. Гамильтонова теория редуцированных систем

Системы уравнений (1.14) и (1.15) были определены как специальные редукции иерархии двумеризованной цепочки Тода. Следовательно, решения соответствующих уравнений даются формулой (2.18), в которой тэта-функция Римана соответствует произвольной кривой, определенной уравнением (2.4).

В этом параграфе мы построим гамильтонову теорию системы, полученной при помощи редукции, следуя общей схеме, предложенной в работах [7], [8]. Согласно этой схеме, на *пространстве операторов* L, отождествленном с фазовым пространством системы, можно определить семейство два-форм формулой

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\operatorname*{res}_{p_\alpha} E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L\wedge\delta\psi(w)\rangle\,d\Omega; \tag{3.1}$$

здесь для любой функции F на пространстве операторов $\delta F(L)$ обозначает ее вариацию (функция Бейкера–Ахиезера с фиксированным значением w и нормировкой является такой функцией) и сумма берется по таким точкам p_α на соответствующей спектральной кривой, где выражение в правой части *a priori* имеет полюс, а именно, в отмеченных точках $p_\pm$, где функция Бейкера–Ахиезера и ей двойственная имеют полюсы, и для $i>0$ в нулях p_ℓ, $\ell=1,\dots,k$, функции $E=E(p)$, где $w=w(p)$ не обращается в нуль, т.е. $E(p_\ell)=0$ при $w(p_\ell)\neq 0$.

3.1. Дифференциал $d\Omega$. Наша первая цель состоит в том, чтобы получить замкнутое выражение для дифференциала $d\Omega$, определенного выше своими аналитическими свойствами, в терминах блоховских собственных функций ψ и двойственных функций ψ^+.

Предположим, что коэффициенты оператора n-периодичны. Следуя способу, предложенному в [4], рассмотрим дифференциал $d\psi$ по отношению к спектральному параметру. Он удовлетворяет неоднородному линейному уравнению

$$(L-E)\,d\psi = dE\psi, \tag{3.2}$$

являющемуся дифференциалом уравнения (2.1). Дифференцируя (2.2), получаем, что $d\psi$ удовлетворяет следующему соотношению монодромии:

$$w\,d\psi_i + dw\psi_i = d\psi_{i-n}. \tag{3.3}$$

Обозначим среднее функции f_i на интервале $l+1\leqslant i\leqslant l+n$ через $\langle f\rangle_l := \frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{l+n} f_i$, а в случае n-периодических функций, когда это среднее не зависит от l, будем для краткости обозначать его через $\langle f\rangle$. Из (3.2) следует, что

$$E\langle\psi^+d\psi\rangle_l + dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \langle\psi^+(L\,d\psi)\rangle_l = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j}. \tag{3.4}$$

Из уравнения (2.24) получаем

$$E\langle\psi^+ d\psi\rangle_l = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_{i+j}^{(j)}\psi_{i+j}^+\,d\psi_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1+j}^{l+n+j} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j}. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4) и используя (3.3), имеем

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+j} a_i^{(j)}\psi_i^+\psi_{i-j}. \tag{3.6}$$

Заметим, что левая часть в (3.6) не зависит от l. Следовательно, правая часть также независима от l. Усредняя по l, получаем уравнение

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle, \tag{3.7}$$

где

$$L^{(1)} := \sum_{j=1}^{k+1} j a_i^{(j)} T^{-j} \tag{3.8}$$

есть разностный аналог первого *потомка* дифференциального оператора, введенного в [4].

Из (3.7) следует, что нули дифференциала dw совпадают с нулями мероморфной функции $\langle\psi^+\psi\rangle$, а нули дифференциала dE — с нулями функции $\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle$. Следовательно, справедлива

Лемма 3.1. *Дифференциал*

$$d\Omega := \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle} = \frac{dE}{\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle} \tag{3.9}$$

голоморфен вне отмеченных точек $p_\pm$, имеет нули в полюсах функций ψ и ψ^+, а в точках $p_\pm$ имеет простые полюсы с вычетами ± 1.

Утверждение леммы позволяет рассматривать равенство (3.9) как явную формулу для дифференциала $d\Omega$, введенного выше при определении двойственной функции Бейкера–Ахиезера с помощью описания его аналитических свойств.

Примеры. Для $k=1$

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1}^+ + 2\psi_i^+\psi_{i-2}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle}, \tag{3.10}$$

а для $k=2$

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1}^+ + 2a_i^{(2)}\psi_i^+\psi_{i-2} + 3\psi_i^+\psi_{i-3}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle}\,. \tag{3.11}$$

3.2. Симплектические листы и координаты Дарбу. Необходимо отметить, что форма $\omega^{(i)}$ не замкнута и вырожденна на пространстве *всех* операторов L. Она становится замкнутой после ограничения на некоторые подмногообразия. Как мы увидим ниже, только формы $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ невырожденны на соответствующих подмногообразиях. Тем самым на пространстве операторов

L существуют две структуры *пуассонова* многообразия. Существование таких структур отражает бигамильтоновую природу интегрируемых систем.

В рамках подхода работ [7], [8] условия, определяющие симплектические листы в каждой из пуассоновых структур, эквивалентны тому, что форма $\omega^{(i)}$ не зависит от выбора нормировки блоховской собственной функции ψ. Изменение нормировки эквивалентно преобразованию $\psi_i \to \psi_i h$, $\psi_i^+ \to \psi_i^+ h^{-1}$, где $h = h(w)$ — скалярная функция. Под действием такого преобразования дифференциал в правой части формулы (3.1) преобразуется в

$$E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L \wedge \delta\psi(w)\rangle\, d\Omega + E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L\psi(w)\rangle \wedge \delta\ln h\, d\Omega. \tag{3.12}$$

Следовательно, форма $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки, когда последний член в (3.12) голоморфен в окрестности точек p_α. Из уравнения

$$(L - E)\delta\psi(w) = -(\delta L - \delta E(w))\psi \tag{3.13}$$

и из определения сопряженного оператора следует, что

$$\langle\psi^+((\delta L - \delta E)\psi)\rangle = \langle(\psi^+(E - L))\delta\psi\rangle = 0. \tag{3.14}$$

Используя (3.9), получаем следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Ограничение формы $\omega^{(i)}$, заданной формулой* (3.1), *на подмногообразие пространства операторов, на котором дифференциал $E^{-i}\delta E(w)\,d\ln w$ голоморфен в окрестности точек p_α, не зависит от нормировки.*

Пример. Для $i = 0$ сумма в (3.1) берется по отмеченным точкам $p_\pm$. В точке p_+ (где $w = 0$) функция E имеет нуль. Следовательно, форма $E\,d\ln w$ имеет полюс только в p_-, а значит, ее вычет в этой точке равен нулю. Из этого следует равенство $e_{k+1} = 0$ для коэффициента ряда (2.5).

В окрестности точки p_-, где функция E имеет полюс порядка $k+1$, форма $\delta E(w)\,d\ln w$ имеет полюс порядка $k+2$ с нулевым вычетом. Следовательно, если для произвольного набора констант $c = (c_1, \ldots, c_k)$ определить подмногообразие Λ_0^c следующим образом:

$$\Lambda_0^c := \{L \in \Lambda_0^c \mid e_s(L) = c_s,\ s = 1, \ldots, k\}, \tag{3.15}$$

где $e_s = e_s(L)$ — коэффициенты разложения (2.5), то будет верно следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Форма $\omega^{(0)}$, ограниченная на подмногообразие Λ_0^c, не зависит от нормировки.*

Пример. Форма $E^{-1}\delta E(w)\,d\ln w$ голоморфна в окрестности отмеченной точки p_-. Поскольку сумма ее вычетов равняется нулю, она голоморфна в точке p_+, если она голоморфна в точках p_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$. Используя цепное правило, получаем, что вариация функции $E(w)$ при фиксированном w связана с вариацией функции $w(E)$ при фиксированном E формулой $\delta E(w)\,dw + \delta w(E)\,dE = 0$. Следовательно, $\delta\ln E(w)\,d\ln w$ голоморфен в p_ℓ (p_ℓ — прообразы точки $E = 0$, в которых $w \neq 0$), если выполняется уравнение $\delta w(p_\ell) = 0$. Последнее имеет место на подмногообразии

$$\Lambda_1^c := \{L \in \Lambda_1^c \mid r_{i,0}(L) = c_i,\ 1 = 1, \ldots, k\}, \tag{3.16}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_k)$ — константы, а $r_{i,0}(L) = r_{i,0}$ — коэффициенты многочлена $\det L(w) = w^{k+1} + \sum_{i=1}^k r_{i,0} w^i$.

Следствие 3.4. *Форма $\omega^{(1)}$, ограниченная на подмногообразие Λ_1^c, не зависит от нормировки.*

Замечание 3.5. Для $i > 1$ подмногообразие Λ_i^c, на котором ограничение формы $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки, описывается системой $i(k+1)-1$ уравнений:

$$\Lambda_i^c := \{L \in \Lambda_i^c \mid w_{\ell,s} = c_{\ell,s},\ s = 1, \ldots, i;\ w_s = c_s,\ s = 2, \ldots, i\}, \tag{3.17}$$

где $w_{\ell,s}$ суть коэффициенты разложения

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_{\ell,s} E^s \tag{3.18}$$

функции w в прообразах p_ℓ на Γ точки $E = 0$, в которых $w(p_\ell) \neq 0$, w_s — это коэффициенты разложения (2.15) функции w в p_+ и $c_{i,s}$, c_s — константы. Следовательно, Λ_i^c имеет размерность $(n-1)k - i + 1$. Напомним, что размерность семейства кривых Γ, заданных уравнениями вида (2.4), равна $k(n+1)/2$ (число коэффициентов r_{ij}). Для общих значений коэффициентов r_{ij} кривая Γ — это гладкая кривая рода $g = k(n-1)/2$. Поэтому соответствие (2.16), ограниченное на Λ_i^c, отождествляет последнее с тотальным пространством якобиевых расслоений над пространством соответствующих спектральных кривых. Для $i > 1$ размерность слоя *больше* размерности базы. Следовательно, форма $\omega^{(i)}$, ограниченная на Λ_i^c, вырожденна для $i > 1$.

3.3. Координаты Дарбу. Для полноты изложим конструкцию координат Дарбу для ограничения $\widehat{\omega}^{(i)}$ формы $\omega^{(i)}$ на подмногообразие Λ_i^c, т. е.

$$\widehat{\omega}^{(i)} := \omega^{(i)}|_{\Lambda_i^c}. \tag{3.19}$$

Теорема 3.6. *Пусть γ_s — полюсы функции Бейкера–Ахиезера. Тогда имеет место равенство*

$$\widehat{\omega}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{g} E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s) \wedge \delta \ln w(\gamma_s). \tag{3.20}$$

Замечание 3.7. Поясним смысл правой части этой формулы. По определению на каждой из спектральных кривых заданы мероморфные функции E и w. Значения $E(\gamma_s)$, $w(\gamma_s)$ этих функций в точках γ_s определяют набор функций на пространстве операторов L. Внешнее произведение их дифференциалов есть два-форма на нашем фазовом пространстве.

Доказательство теоремы 3.6. Идея доказательство формулы (3.20) является весьма общей и не опирается на особый вид оператора L. Мы будем следовать доказательству леммы 5.1 в работе [6] (также см. [9]).

Дифференциал, вычеты которого определяют $\omega^{(i)}$ по формуле (3.1), является мероморфным дифференциалом на спектральной кривой Γ. Поэтому сумма его вычетов в точках p_α равняется сумме со знаком минус вычетов в оставшихся точках. У дифференциала имеются полюсы двух типов. Полюсы первого типа — это полюсы γ_s функции ψ. В общем положении эти полюсы простые. Заметим, что $\delta\psi$ имеет полюс второго порядка в γ_s. Принимая во внимание, что дифференциал $d\Omega$ равен нулю в γ_s, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{\gamma_s} E^{-i}\langle\psi^+\,\delta L\wedge\delta\psi\rangle\,d\Omega &= \frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s)\\ &= \frac{1}{n}E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Последнее равенство следует из равенства (3.14), представляющего собой не более чем стандартную формулу для вариации собственного значения оператора.

Полюсами второго типа дифференциала в правой части формулы (3.1) являются нули q_j дифференциала dw. Действительно, в окрестности точки q_j локальной координатой на спектральной кривой является $\sqrt{w-w(q_j)}$ (в общем положении, когда нуль простой). Варьируя ряд Тейлора для ψ по координате, получаем

$$\delta\psi = -\frac{d\psi}{dw}\,\delta w(q_j)+O(1).\tag{3.22}$$

Поэтому $\delta\psi$ имеет простой полюс в q_j. Тем же способом получаем, что

$$\delta E = -\frac{dE}{dw}\,\delta w(q_j).\tag{3.23}$$

Из равенств (3.22) и (3.23) следует, что

$$\operatorname*{res}_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L\wedge\delta\psi\rangle\,d\Omega = \operatorname*{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L d\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\frac{\delta E d\ln w}{dE}\,.\tag{3.24}$$

Из кососимметричности внешнего произведения следует, что в (3.24) можно заменить δL на $\delta L-\delta E$. Тогда, используя тождества $\psi^*(\delta L-\delta E)=\delta\psi^*(E-L)$ и $(E-L)\,d\psi=-dE\psi$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L\wedge\delta\psi\rangle\,d\Omega &= -\operatorname*{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\delta\psi^+\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E\,d\ln w\\ &= \operatorname*{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E\,d\ln w,\end{aligned}\tag{3.25}$$

где в последнем равенстве использовалось тождество $\langle\psi^+\psi\rangle(q_j)=0$ (которое следует, как уже было замечено, из (3.7)). По определению подмногообразия, на котором $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки (см. лемму 3.2), форма в правой части формулы (3.25) не имеет полюсов в точках p_α. Кроме полюсов в q_i, она имеет полюсы только в γ_s. Поэтому после ограничения на такое подмногообразие получаем равенства

$$\begin{aligned}\sum_j\operatorname*{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E\,d\ln w &= -\sum_s\operatorname*{res}_{\gamma_s}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E\,d\ln w\\ &= \frac{1}{n}\sum_s E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Равенство (3.20) является прямым следствием равенств (3.21), (3.25), (3.26). □

3.4. Гамильтонианы. Следующим шагом в построении гамильтоновой теории для систем, допускающих представление Лакса, является доказательство того, что в результате подстановки векторного поля ∂_t, определенного уравнением Лакса, в форму $\omega^{(i)}$, ограниченную на подмногообразие, где она не зависит от нормировки, получаем точную 1-форму, т. е. $\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_t, X) = \delta H^{(i)}(X)$. Последнее равенство означает, что на подмногообразии, где форма $\widehat{\omega}^{(i)}$ невырожденна, векторное поле ∂_t является гамильтоновым с гамильтонианом H.

Ниже мы применим общую схему к уравнениям (1.14) и (1.15) и найдем соответствующие гамильтонианы. Пусть ∂_t — векторное поле, определенное уравнениями Лакса. Тогда

$$\partial_t L = [M, L], \qquad \partial_t \psi = M\psi - \psi f, \tag{3.27}$$

где f — мероморфная функция на спектральной кривой.

Замечание 3.8. Появление члена с f в выражении для $\partial_t \psi$ объясняется следующим фактом: в определении формы $\omega^{(i)}$ предполагается, что нормировка блоховской функции ψ *не зависит от времени*: $\psi_0 \equiv 1$. Если зависимость оператора L от t определяется уравнением Лакса, то временная зависимость дивизора полюсов $D(t)$ функции $\psi(t)$ становится линейной после преобразования Абеля. Последнее следует из соотношения

$$\psi_i(t, p) = \Psi_i(t, p)\Psi_0^{-1}(t, p), \tag{3.28}$$

где Ψ — функция Бейкера–Ахиезера, заданная формулой (2.18). Из уравнения (1.8) следует (3.27) с $f(t, p) = \partial_t \ln \Psi_0(t, p)$. Функция f имеет полюсы в отмеченных точках $p_\pm$ и представляется в виде

$$f = \sum_{s=1}^{m_\pm} c_s^\pm z^{-s} + O(1), \tag{3.29}$$

где $c_s^\pm$ — *постоянные*, которые фактически параметризуют коммутирующие потоки иерархии, а $m_\pm$ — порядки оператора M.

Теорема 3.9. *Ограничения векторного поля $\partial_{t_m^\pm}$, определенного уравнением Лакса* (1.13), *на подмногообразие Λ_i^c является гамильтоновым для $i = 0, 1$ по отношении к формам $\widehat{\omega}^{(i)}$ с гамильтонианами*

$$H^{(0)}_{t_m^-} = \operatorname*{res}_{p_-} z^{-m} E(z)\, d\ln z = e_{m+k+1}, \tag{3.30}$$

$$H^{(1)}_{t_m^-} = \operatorname*{res}_{p_-} z^{-m} \ln E(z)\, d\ln z, \tag{3.31}$$

где $E(z)$ — ряд (2.5) *с коэффициентами, определенными в лемме* 2.1, *и*

$$H^{(i)}_{t_m^+} = \frac{1}{n} \operatorname*{res}_{p_+} E^{-m-i} \ln w(E)\, dE, \qquad i = 0, 1, \tag{3.32}$$

где $w(E)$ определен в (2.15)

Доказательство. Подстановка (3.27) и (3.9) в (3.1) дает

$$\omega^{(i)}(\partial_t, \cdot\,) = -\frac{1}{2} \sum_{p_\alpha} \operatorname*{res}_{p_\alpha} \bigl(\langle \psi^+ [M, L]\delta\psi\rangle - \langle \psi^+ \delta L(M\psi - \psi f)\rangle\bigr) \frac{d\ln w}{nE^i \langle \psi^+ \psi\rangle}\,. \tag{3.33}$$

Используя равенство $(L-E)\delta\psi = -(\delta L-\delta E)\psi$, получаем, что дифференциал в правой части формулы (3.33) равен

$$-\frac{1}{2}\left(\langle\psi^+(M\delta E+\delta Lf)\psi\rangle - \langle\psi^+(\delta L\,M + M\,\delta L)\psi\rangle\right)\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle}. \tag{3.34}$$

Второй член имеет полюсы только в точках p_α. Следовательно, сумма вычетов в этих точках равняется нулю. Первый член равен

$$-\frac{1}{2}\langle\psi^+(2f+(M-f))\psi\rangle\delta E\,\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle}. \tag{3.35}$$

Из определения функции f в (3.27) следует, что величина $\langle\psi^+(M-f)\psi\rangle$ голоморфна в p_α. Поскольку ограничение формы $E^{-i}\delta E d\ln w$ на Λ_i^c голоморфно в отмеченных точках p_α, второй член в (3.35), ограниченный на Λ_i^c, не имеет вычетов в p_α. Напомним, что функция f имеет полюсы только в точках $p_\pm$. Используя тождество $\delta E(w)\,d\ln w = -\delta\ln w(E)\,dE$ для вычета в p_+, получаем равенство

$$\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_t,\,\cdot\,) = \frac{1}{n}\operatorname*{res}_{p_+} f(E)\delta\ln w(E)E^{-i}\,dE - \frac{1}{n}\operatorname*{res}_{p_-} f(w)E^{-i}(w)\delta E(w)\,d\ln w. \tag{3.36}$$

Напомним, что выбор базисных векторных полей $\partial_{t_m^\pm}$ иерархии зависит от выбора локальных координат в окрестностях отмеченных точек $p_\pm$. Как следует из доказательств лемм 2.1 и 2.2, наиболее естественный выбор — это $z = w^{-1/n}$ в p_- и $z = E$ в p_+. В этом случае функции $f_m^\pm$, соответствующие $t = t_m^\pm$, имеют полюс в $p_\pm$ вида $f_m^+ = E^{-m} + O(E)$ и $f_m^- = z^{-m} + O(z)$, $z = w^{-1/n}$, соответственно. Тогда из (3.36) выводится, что $\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_{t_m^\pm},\,\cdot\,) = \delta H^{(i)}_{t_m^\pm}$. □

§4. Специальные системы координат. Примеры

В начале этого параграфа мы введем некоторые специальные системы координат на пространстве нижнетреугольных операторов, в которых формы $\omega^{(\ell)}$, $\ell = 1,2$, имеют *локальные плотности*, т. е. координаты $x_i^{(j)}$, в которых формы имеют вид $\omega = \sum f_{i,i_1}^{(j,j_1)}\delta x_s^{(j)} \wedge \delta x_{i_1}^{(j_1)}$, где сумма взята по множеству всех индексов, таких, что $|i-i_1| < d_1$ для некоторого d_1, не зависящего от периода n оператора. Кроме того, предполагается, что коэффициенты $f_{i,i_1}^{(j,j_1)}$ являются функциями параметров $x_{i_2}^{(j_2)}$, таких, что $|i-i_2| < d_2$ для некоторого не зависящего от n числа d_2.

Замечание 4.1. Отметим, что в естественных координатах на пространстве нижнетреугольных операторов, которыми являются коэффициенты $a_i^{(j)}$ этих операторов, формы не имеют локальных плотностей.

4.1. Форма $\boldsymbol{\omega^{(0)}}$. Координаты, в которых форма $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности, мы отождествим с множеством первых k коэффициентов разложения (2.7) блоховского решения в отмеченной точке p_-. Формулы (2.8) и (2.11) для $s = 1,\dots,k$ можно рассматривать как определение отображения

$$\{\xi_s^-(i), e_s\} \longmapsto \{a_i^{(j)}\}, \tag{4.1}$$

где функции $\xi_s^-(i)$ определены с точностью до общего сдвига $\xi_s^-(i) \to \xi_s^-(i) + c_i$. Этот сдвиг можно зафиксировать условием нормировки $\xi_s^-(0) = 0$.

Форма $\omega^{(0)}$ из определения (3.1) представляет собой среднее по i некоторого выражения, зависящего от $\xi_s^-(i-j)$, $j = 0, \dots, k$, и от первых $k-1$ коэффициентов разложения в точке p_- функции

$$\psi_i^* := \frac{\psi_i^+}{\langle \psi^+ \psi \rangle}, \tag{4.2}$$

где ψ^+ — двойственная функция Бейкера–Ахиезера (2.22). Коэффициенты ψ_i^* можно найти рекуррентно из формул

$$\operatorname*{res}_{p_-} \psi_i^* \psi_{i-j} \, d \ln z = \delta_{0,j}, \tag{4.3}$$

которые следуют из (2.23) и (3.9). Выражения для этих коэффициентов в терминах ξ_s^- локальны. Следовательно, утверждение о том, что $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности в новых координатах, является очевидным следствием определения.

Пример $k = 1$. Естественные координаты на пространстве n-периодических нижнетреугольных операторов порядка два $L = a_i T^{-1} + T^{-2}$ — это их коэффициенты a_i. Специальные координаты $x_i := \xi_1^-(i)$ определяются с точностью до общего сдвига и константы e_1. Выражение для естественных координат через новые дается формулой (2.8):

$$a_i = x_i - x_{i-2} + e_1. \tag{4.4}$$

Подставляя разложения функций ψ и ψ^+ в (3.1), получаем для $k = 1$ следующее выражение для ограничения $\omega^{(0)}$ на симплектический лист $e_1 = \mathrm{const}$:

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \frac{1}{2} \langle da_i \wedge dx_{i-1} \rangle = \langle dx_i \wedge dx_{i-1} \rangle, \tag{4.5}$$

где, как и ранее, $\langle \cdot \rangle$ — среднее по периоду для выражения, стоящего в скобках.

Замечание 4.2. Ранее вариация на фазовом пространстве (пространстве параметров) была обозначена через δ для того, чтобы отличать ее от дифференциала d, который берется по отношению к спектральному параметру. После взятия вычетов для дифференциала здесь и ниже мы будем использовать только символ d, т. е. $dx_i := \delta x_i$.

Согласно теореме 3.9, уравнения (1.16), ограниченные на симплектический лист $\langle a_i \rangle = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \rangle = e_1 = \mathrm{const}$, являются гамильтоновыми по отношению к $\widehat{\omega}^{(0)}$, где гамильтониан дается формулой $H_{t_1^-}^{(0)} := e_3$. Для того чтобы найти это выражение явно в терминах новых координат, будем использовать уравнения (2.11). Для $s = 2$, $k = 1$ имеем

$$\xi_2^-(i) - \xi_2^-(i-2) + e_1 \xi_1(i)^- + e_2 = a_i \xi_1^-(i-1). \tag{4.6}$$

Из (4.4) следует

$$\xi_2^-(i) - \xi_2^-(i-2) + e_2 = x_i x_{i-1} - x_{i-1} x_{i-2} + e_1 (x_{i-1} - x_i). \tag{4.7}$$

Взяв среднее от уравнения (4.7), получаем $e_2 = 0$ (напомним, что в доказательстве леммы 3.2 было установлено равенство $e_{k+1} = 0$ для произвольного k). Для $s = 3$, $k = 1$ уравнение (2.11) имеет вид

$$\xi_3^-(i) - \xi_3^-(i-2) + e_1 \xi_2^-(i) + e_3 = a_i \xi_2^-(i-1) = (x_i - x_{i-2} + e_1) \xi_2^-(i-1). \tag{4.8}$$

Усреднив (4.8), получаем явное выражение для гамильтониана уравнения (1.16) в новых координатах:

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = e_3 = \langle (x_i - x_{i-2})\xi_2^-(i-1)\rangle = \langle x_i(\xi_2^-(i-1) - \xi_2^-(i+1)\rangle = \langle x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle, \tag{4.9}$$

где в последнем равенстве было использовано (4.6).

Пример $\boldsymbol{k=2}$. Выражения коэффициентов нижнетреугольного оператора порядка 3 через новые координаты $x_i := \xi_1^-(i)$ и $y_i := \xi_2^-(i)$ даются формулами (2.8), (2.11):

$$a_i^{(2)} = x_i - x_{i-3} + e_1, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= y_i - y_{i-3} + e_1 x_i + e_2 - a_i^{(2)} x_{i-2} \\ &= y_i - y_{i-3} - (x_i - x_{i-3})x_{i-2} + e_1(x_i - x_{i-2}) + e_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Подстановка разложения функции ψ и ψ^+ в (3.1) дает следующее выражение:

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{2}\langle\, da_i^{(1)} \wedge dx_{i-1} + da_i^{(2)} \wedge (\chi_1^-(i)\, dx_{i-2} + d\xi_2^-(i-2))\rangle, \tag{4.12}$$

где χ_1^- — первый коэффициент разложения ψ^+ в отмеченной точке p_-. Из формулы (4.3) с $j=1$ следует, что $\chi_1^-(i) = -x_{i-1}$. После прямых вычислений получаем выражение для формы $\omega^{(0)}$, ограниченной на лист, вдоль которого e_1 и e_2 постоянны:

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \langle dy_i \wedge (dx_{i-1} - dx_{i+2}) + d(x_{i-1}x_{i-2}) \wedge dx_i\rangle + e_1\langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle. \tag{4.13}$$

Уравнение (1.16) для $k=2$, ограниченное на лист, где e_1 и e_2 постоянны, является гамильтоновым по отношению к форме (4.13) с гамильтонианом $H^{(0)}_{t_1^-} = e_4$. Прямые, но достаточно громоздкие вычисления приводят к следующему выражению для гамильтониана $H := e_4$:

$$\begin{aligned} H = \langle y_{i-1}(y_i - y_{i-3})\rangle + \langle x_i x_{i-1} x_{i-2}(x_{i-1} - x_i)\rangle + e_1\langle (x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle \\ + e_2\langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1})\rangle + \langle y_i(x_{i+2}^2 - x_{i-1}^2 - x_{i+2}x_{i+1} + x_{i-2}x_{i-1}\rangle. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2. Форма $\boldsymbol{\omega^{(1)}}$. Выбор системы координат, в которых $\omega^{(1)}$ имеет локальную плотность, подсказывает само определение (3.1) этой формы, которое содержит в себе значение ψ_i в отмеченных точках $p_\ell \in \Gamma$, являющихся прообразами точек $E=0$, где $w(p_\ell) \neq 0$.

Пусть $\Phi = \{\phi_i^\ell\}$ есть $(k \times n)$-матрица ранга k, $i = 1, \ldots, n$, $\ell = 1, \ldots, k$. Две матрицы Φ, Φ' эквивалентны, $\Phi \sim \Phi'$, если $\Phi' = \Phi\lambda$, где $\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Пространство классов эквивалентности $[\Phi] := (\Phi/\sim)$ можно представлять себе как множество (упорядоченных) наборов из k *различных* точек в $(n-1)$-мерном проективном пространстве, $[\phi^\ell] \in \mathbb{P}^{n-1}$.

Рассмотрим пространство пар $\{[\Phi], W\}$, где $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ — множество ненулевых чисел, $w_\ell \neq 0$. Симметрическая группа S_k действует на пространстве таких пар перестановками строк матрицы Φ и координат вектора W.

Определим отображение из соответствующего факторпространства в пространство n-периодических операторов L вида (1.3):

$$\{[\Phi], W\}/S_k \mapsto L. \tag{4.15}$$

Заметим, что если набор ненулевых чисел $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ фиксирован, то произвольная $(k \times n)$-матрица Φ может быть расширена до единственной $(k \times \infty)$-матрицы ϕ_i^ℓ, $i \in \mathbb{Z}$, такой, что выполнено соотношение $\phi_{i-n}^\ell = w_\ell \phi_i^\ell$. Имея такое расширение, можно единственным образом определить оператор L вида (1.3), такой, что для произвольного ℓ последовательность $\phi^\ell = \{\phi_i^\ell\}$ является решением уравнения

$$L\phi^\ell = 0 \iff \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} \phi_{i-j}^\ell = -\phi_{i-k-1}^\ell. \tag{4.16}$$

В самом деле, для фиксированного i уравнения (4.16) являются системой k неоднородных линейных уравнений на неизвестные коэффициенты оператора L. Используя правило Крамера, получаем, что

$$a_i^{(j)} = -\frac{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|}{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1},\ \phi_{i-j}\ ,\ \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|}. \tag{4.17}$$

Здесь и ниже мы используем следующие обозначения: ϕ_i есть k-мерный вектор с координатами ϕ_i, $\phi_i := \{\phi_i^\ell\}$, и для произвольного множества $V_1, \ldots, V_k$ k-мерных векторов $|V_1, \ldots, V_k|$ обозначает определитель соответствующей матрицы, т. е. $|V_1, \ldots, V_k| := \det(V_i^\ell)$.

Напомним, что ранее старший коэффициент $a_i^{(1)}$ оператора параметризовывался переменными φ_i, такими, что $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$. Равенство (4.17) для $j = 1$ позволяет отождествить эти переменные с

$$e^{-\varphi_i} := (-1)^{ik} |\phi_{i-1}, \ldots, \ldots, \phi_{i-k}| \tag{4.18}$$

и представить равенство (4.17) в виде

$$a_i^{(j)} = (-1)^{ik+1} e^{\varphi_i} |\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|. \tag{4.19}$$

Теорема 4.3. *Отображение* (4.15), *определенное формулами* (4.18), (4.19), *является взаимно однозначным соответствием между открытыми областями. При этом соответствии уравнения* (1.14) *и* (1.15), *ограниченные на листы с фиксированными* w_ℓ, *являются гамильтоновыми по отношению к форме*

$$\widehat{\omega}^{(1)} = \frac{1}{2}\left\langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i - (-1)^{(i-1)k} e^{\varphi_{i-1}} \sum_{j=1}^{k} da_i^{(j)} \wedge |\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}| \right\rangle \tag{4.20}$$

с гамильтонианами

$$H^- = \langle a_i^{(k)} \rangle, \quad H^+ = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} \rangle \tag{4.21}$$

соответственно.

Доказательство. Правая часть в (4.17) симметрична по отношению к перестановкам строк матриц в числителе и знаменателе. Следовательно, отображение (4.15) хорошо определено на области, где знаменатель не обращается в нуль. Обратное отображение определено отождествлением w_ℓ с ненулевыми корнями многочлена $R(w, 0) = \det L(w)$ из (2.3). Другими словами, w_ℓ представляет собой значение функции $w(p)$ на спектральной кривой Γ оператора L в одном из прообразов точки $E = 0$, т. е. $p_\ell := (w_\ell, 0) \in \Gamma$. Из этого отождествления следует, что ϕ_i есть не что иное, как значение функции Бейкера–Ахиезера в p_ℓ, т.е. $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$. Следовательно, первое утверждение теоремы доказано. $\square$

Напомним, что по определению $\omega^{(1)}$ равняется среднему по i суммы вычетов в точках $p_\pm$ и p_ℓ формы

$$-\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\delta a_i^{(j)}\wedge(\psi_i^*\delta\psi_{i-j})E^{-1}d\ln w. \tag{4.22}$$

Функция Бейкера–Ахиезера ψ_i и ее двойственная ψ_i^+ имеют в p_- нуль и полюс порядка i соответственно. Поскольку E в p_- имеет полюс порядка $k+1$, форма (4.22) голоморфна в p_-. Следовательно, у нее нет вычета в p_-. В p_+ функция E имеет простой нуль. Кроме того, форма $E^{-1}\,d\ln w$ в p_+ имеет полюс порядка 2. Между тем в p_+ функции ψ_i^+ и ψ_i имеют нуль и полюс порядка i соответственно. Следовательно, члены в сумме (4.22) с $j>1$ голоморфны в p_+. Из (2.12), (2.22) следует, что

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2n}\operatorname*{res}_{p_+}\delta a_i^{(1)}\wedge(\psi_i^*\delta\psi_{i-1})E^{-1}d\ln w &= -\frac{1}{2}\delta(e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}})\wedge e^{-\varphi_i}\delta(e^{\varphi_{i-1}})\\ &= \frac{1}{2}\delta\varphi_{i-1}\wedge\delta\varphi_i\,. \end{aligned}\tag{4.23}$$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы представить $\psi_i^+(p_\ell)$ в терминах $\phi^\ell = \psi(p_\ell)$ для того, чтобы в дальнейшем получить замкнутое выражение для $\omega^{(1)}$ в терминах переменных ϕ^ℓ.

Лемма 4.4. *Имеют место равенства*

$$r_\ell\psi_i^+(p_\ell) = \frac{(-1)^{\ell+k-1}\det\widehat{\Phi}_i^{\ell,k}}{|\phi_{i-2},\dots,\phi_{i-k-1}|}, \tag{4.24}$$

где $r_\ell := \operatorname{res}_{p_\ell} E^{-1}d\Omega$ *и* $\widehat{\Phi}_i$ *есть* $(k\times k)$*-матрица со столбцами* $(\phi_{i-1},\dots,\phi_{i-k})$, *а* $\widehat{\Phi}_i^{\ell,k}$ *получается из* $\widehat{\Phi}_i$ *удалением* ℓ*-й строки и последнего столбца.*

Доказательство. По определению дифференциала $d\Omega$ дифференциал $\psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega$ голоморфен вне точек $p_\pm$ и точек p_ℓ, где E обращается в нуль. Для $2\leqslant j\leqslant k$ он голоморфен в $p_\pm$. Следовательно, сумма его вычетов в p_ℓ равняется нулю:

$$\sum_{\ell=1}^{k}\operatorname*{res}_{p_\ell}\psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega = \sum_\ell r_\ell\psi_i^+(p_\ell)\phi_{i-j}^\ell = 0, \qquad j=2,\dots,k. \tag{4.25}$$

Дифференциал $\psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega$ голоморфен в p_- и имеет простой полюс в p_+ с вычетом -1. Тогда

$$\sum_l\operatorname*{res}_{p_\ell}\psi_i^+\psi_{i-k-1}E^{-1}d\Omega = \sum_\ell r_\ell\psi_i^+(p_\ell)\phi_{i-k-q}^\ell = 1. \tag{4.26}$$

Уравнения (4.25) и (4.26) представляют собой систему линейных уравнений на неизвестные $r_\ell\psi_i(p_\ell)$. Из правила Крамера следует (4.24). $\square$

Заметим, что при последовательном умножении правой части равенства (4.24) на $d\phi^\ell_{i-j}$ и взятии среднего по ℓ можно отождествить последнее с разложением определителя по последнему столбцу, т. е.

$$-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k} r_\ell \psi_i^+(p_\ell)\, d\phi^\ell_{i-j} = -\frac{1}{2}\,\frac{|\phi_{i-2},\dots,\phi_{i-k},d\phi_{i-j}|}{|\phi_{i-2},\dots,\phi_{i-k-1}|}$$
$$= \frac{(-1)^{k(i-1)+1}}{2}\,|\phi_{i-2},\dots,\phi_{i-k},d\phi_{i-j}|e^{\varphi_{i-1}}. \qquad (4.27)$$

Правая часть в (4.20) равняется сумме правой части равенства (4.23) и внешнего произведения выражения (4.27) и $da_i^{(j)}$. Равенство (4.20) доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что, согласно теореме 3.9, гамильтонианы уравнений (1.14) и (1.15) равны

$$H^- := H_{\partial_{t_1^-}} = \operatorname*{res}_{z=0} \ln E(z) z^{-2}\, dz = e_1 = \langle a_i^{(k)}\rangle \qquad (4.28)$$

и

$$H^+ := H_{\partial_{t_1^+}} = \frac{1}{n}\operatorname*{res}_{E=0} \ln w(E)E^{-2}dE = w_1, \qquad (4.29)$$

где w_1 — первый коэффициент разложения (2.15). Согласно следствию 2.3,

$$n^{-1}\ln w = n^{-1}(\ln\psi_{-n} - \ln\psi_0) = \langle \psi_{i-1}-\psi_i\rangle. \qquad (4.30)$$

Тогда из (2.12) и (2.13) получаем, что

$$w_1 = \langle \xi_1^+(i-1) - \xi_1^+(i)\rangle = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}\rangle, \qquad (4.31)$$

и теорема доказана.

Пример. Для $k=1$ формула (4.18) принимает вид $e^{-\varphi_i} = (-1)^i\phi_{i-1}$. Тогда

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2}\,\langle d\varphi_{i-1}\wedge d\varphi_i - (-1)^{i-1}e^{\varphi_{i-1}}d(e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}})\wedge d\phi_{i-1}\rangle = \langle d\varphi_{i-1}\wedge d\varphi_i\rangle. \quad (4.32)$$

Заметим, что для $k=1$ коэффициент $a_i^{(2)}$ равен 1 и формула (4.21) принимает вид (1.18).

Литература

[1] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] И. М. Кричевер, *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения*, УМН, **33**:4 (1978), 215–216.

[3] И. М. Кричевер, *Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумерное обобщение. Приложение к статье Б. А. Дубровина «Тэта-функции и нелинейные уравнения»*, УМН, **36**:2 (1981), 72–77.

[4] И. М. Кричевер, *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений*, Функц. анализ и его прил., **22**:3 (1988), 37–52.

[5] И. М. Кричевер, *Коммутирующие разностные операторы и комбинаторные преобразования Гейла*, Функц. анализ и его прил., **49**:3 (2015), 175–188.

[6] I. M. Krichever, *Elliptic solutions to difference nonlinear equations and nested Bethe ansatz equations*, in: Calogero–Moser–Sutherland models (Monréal, QC, 1997), CRM Ser. Math. Phys, Springer-Verlag, New-York, 2000, 249–271; `https://arxiv.org/abs/solv-int/9804016`.

[7] I. Krichever, D. H. Phong, *On the integrable geometry of $N = 2$ supersymmetric gauge theories and soliton equations*, J. Differential Geometry, **45** (1997), 445–485; `https://arxiv.org/abs/hep-th/9604199`.

[8] I. Krichever, D. Phong, *Symplectic forms in the theory of solitons*, Survey in Differential Geometry, **4** (1998), 239–313.

[9] I. Krichever, D. H. Phong, *Spin chain models with spectral curves from M Theory*, Commun. Math. Phys., **213**:3 (2000), 539–574.

[10] I. Krichever, T. Shiota, *Soliton equations and the Riemann–Schottky problem*, in: Advanced Lectures Math., vol. 25, Handbook of Moduli, v. II, International Press, Boston, 2013.

[11] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, R. E. Schwartz, S. Tabachnikov, *Linear difference equations, frieze patterns and combinatorial Gale transform*, Forum Math. Sigma, **2** (2014); `https://arxiv.org/abs/1309.3880`.

[12] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *The pentagram map: A discrete integrable system*, Commun. Math. Phys., **299**:2 (2010), 409–446.

[13] F. Soloviev, *Integrability of the pentagram map*, Duke. Math. J., **162**:15 (2013), 2815–2853.

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва, Россия
e-mail: ekrez@yandex.ru

Поступила в редакцию
4 ноября 2016 г.

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
Колумбийский университет, Нью-Йорк, США
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва, Россия
e-mail: krichev@math.columbia.edu