Функциональный анализ и его приложения
2007, т. 41, вып. 4, с. 46–59

УДК 917.9

Алгебры операторов Лакса*

© 2007. И. М. Кричевер, О. К. Шейнман

§1. Введение

Общий подход к операторам Лакса на алгебраических кривых был предложен одним из авторов в [1], где известная теория представлений Лакса и представлений нулевой кривизны с *рациональным спектральным параметром* обобщалась на случай алгебраических кривых Γ произвольного рода g. Линейное пространство таких операторов, ассоциированное с эффективным дивизором $D = \sum_k n_k P_k$, $P_k \in \Gamma$, определялось как пространство мероморфных $(n \times n)$-матричных функций на Γ, имеющих полюсы кратности не выше n_k в точках P_k и не более чем простые полюсы еще в ng точках γ_s. Коэффициенты лорановского разложения этих матричных функций в окрестности точки γ_s должны были удовлетворять определенным линейным условиям, параметризованным точкой α_s проективного пространства (см. формулы (2.1)–(2.3) ниже).

Согласно [12], наборы (γ_s, α_s) общего положения параметризуют стабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения B ранга n и степени ng на Γ. В [1] отмечалось, что условия на вид оператора Лакса в точках γ_s означают, что эти операторы можно рассматривать как мероморфные сечения расслоения $\operatorname{End}(B)$ с дивизором полюсов D. Простым следствием этого замечания является то, что операторы Лакса, имеющие полюсы произвольного порядка в точках P_k, образуют алгебру относительно обычного поточечного умножения.

В простейшем случае двух отмеченных точек, $D = P_+ + P_-$, это позволяет ввести в алгебре соответствующих операторов почти градуированную структуру, обобщающую градуированную структуру классической аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}(n)}$. Напомним, что алгебра Ли $\mathscr{V}$ называется *почти градуированной*, если $\mathscr{V} = \bigoplus \mathscr{V}_i$, где $\dim \mathscr{V}_i < \infty$ и $[\mathscr{V}_i, \mathscr{V}_j] \subseteq \bigoplus_{k=i+j-k_0}^{k=i+j+k_1} \mathscr{V}_k$, причем k_0 и k_1 не зависят от i, j.

Общее понятие почти градуированных алгебр и модулей над ними было введено в работах [3]–[5], где были введены обобщения алгебр Гейзенберга и Вирасоро. В ряде работ, обзор которых дан в [11], исследовались почти градуированные аналоги классических аффинных алгебр Ли, названные алгебрами токов Кричевера–Новикова (КН). Алгебру операторов Лакса, имеющих полюсы в двух точках, естественно рассматривать как обобщение $\mathfrak{gl}(n)$-алгебры КН.

Центральное расширение алгебры $\mathscr{V}$ называется *локальным*, если оно само представляет собой почти градуированную алгебру Ли. Локальные централь-

*Работа первого автора частично поддержана грантом DMS-04-05519 Национального научного фонда США; работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 05-01-00170) и программой РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

ные расширения задаются локальными 2-коциклами. 2-коцикл γ называется локальным, если существует $K \in \mathbb{Z}$, такое, что $\gamma(\mathscr{V}_i, \mathscr{V}_j) = 0$ для $|i+j| > K$. Понятие локального коцикла введено в [3]. Там же была высказана гипотеза о его единственности и намечено ее доказательство для алгебр типа Вирасоро; полное доказательство дано в [9], [10]. Условие локальности важно при рассмотрении аналогов представлений старшего веса.

Основной целью настоящей работы является построение ортогональных и симплектических аналогов операторов Лакса. В этих случаях операторы Лакса не образуют ассоциативной алгебры. Они лишь образуют алгебру Ли. Для всех классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ соответствующие алгебры операторов Лакса можно рассматривать как «подкрученную» версию алгебр токов КН и алгебр петель.

В §2 мы доказываем мультипликативные свойства $\mathfrak{gl}(n)$-значных операторов Лакса, вводим $\mathfrak{g}$-значные операторы Лакса для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ и доказываем, что они замкнуты относительно поточечного коммутатора.

В §3 мы определяем почти градуированную структуру на алгебрах операторов Лакса и показываем, что $\dim \mathscr{V}_i = \dim \mathfrak{g}$, как и для алгебр КН.

В §4 для каждого типа алгебр операторов Лакса мы определяем 2-коцикл и доказываем его локальность.

Авторы благодарят М. Шлихенмайера за плодотворную критику.

§2. Операторы Лакса и их скобка Ли

2.1. Операторы Лакса для $\mathfrak{gl}(n)$ и $\mathfrak{sl}(n)$. Следуя [1], назовем *оператором Лакса* с параметрами Тюрина $\{\alpha_s, \gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$ функцию L на Γ со значениями в $\mathfrak{gl}(n)$, голоморфную вне $P_\pm$ и точек $\{\gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$ и имеющую в последних не более чем простые полюсы:

$$L = \frac{L_{s,-1}}{z - z_s} + L_{s0} + O(z - z_s), \qquad z_s = z(\gamma_s), \tag{2.1}$$

так что

(i) $L_{s,-1} = \alpha_s \beta_s^t$ и

$$\operatorname{tr} L_{s,-1} = \beta_s^t \alpha_s = 0, \tag{2.2}$$

где $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$ фиксирован, $\beta_s \in \mathbb{C}^n$ произволен и t в верхнем индексе обозначает транспонированную матрицу. В частности, $L_{s,-1}$ имеет ранг 1;

(ii) α_s является собственным вектором матрицы L_{s0},

$$L_{s0}\alpha_s = k_s \alpha_s. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Пусть L' и L'' удовлетворяют условиям* (2.1)–(2.3). *Тогда $L = L'L''$ также удовлетворяет им.*

Доказательство. Из формулы (2.1) получаем

$$L = \frac{L'_{s,-1}L''_{s,-1}}{(z - z_s)^2} + \frac{L'_{s,-1}L''_{s0} + L'_{s0}L''_{s,-1}}{(z - z_s)} + L'_{s,-1}L''_{s1} + L'_{s0}L''_{s0} + L'_{s1}L''_{s,-1} + O(1). \tag{2.4}$$

Из (2.2) для L' следует, что первое слагаемое обращается в нуль:

$$L'_{s,-1}L''_{s,-1} = \alpha_s ({\beta'_s}^t \alpha_s) {\beta''_s}^t = 0.$$

Для второго слагаемого имеем $L_{s,-1} = L'_{s,-1}L''_{s0} + L'_{s0}L''_{s,-1} = \alpha_s({\beta'_s}^t L''_{s0}) + (L'_{s0}\alpha_s){\beta''_s}^t$. Из (2.2) для L' следует, что $L'_{s0}\alpha_s = k'_s\alpha_s$, а значит, $L_{s,-1} = \alpha_s\beta_s^t$, где $\beta_s^t = {\beta'_s}^t L''_{s0} + k'_s{\beta''_s}^t$. Далее, $\operatorname{tr} L_{s,-1} = ({\beta'_s}^t L''_{s0} + k'_s{\beta''_s}^t)\alpha_s = k''_s{\beta'_s}^t\alpha_s + k'_s{\beta''_s}^t\alpha_s = 0$.

Рассмотрим выражение $L_{s,0}\alpha_s$, где $L_{s,0} = L'_{s,-1}L''_{s1} + L'_{s0}L''_{s0} + L'_{s1}L''_{s,-1}$. Из определения операторов Лакса вытекает, что $L''_{s,-1}\alpha_s = 0$ и $L'_{s0}L''_{s0}\alpha_s = k'_s k''_s\alpha_s$. Мы также имеем $L'_{s,-1}L''_{s1}\alpha_s = \alpha_s({\beta'_s}^t L''_{s1}\alpha_s)$. Следовательно, α_s — собственный вектор матрицы $L_{s,0}$ с собственным значением $k_s = {\beta'_s}^t L''_{s1}\alpha_s + k'_s k''_s$. □

Так как условия (2.1), (2.2) линейны, операторы Лакса образуют ассоциативную алгебру, а следовательно, и ассоциированную алгебру Ли. Последняя называется *алгеброй операторов Лакса.*

Если функция L помимо (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию $\operatorname{tr} L = 0$, то она называется *оператором Лакса со значением в* $\mathfrak{sl}(n)$. Такие операторы Лакса образуют алгебру Ли.

2.2. Алгебра операторов Лакса для $\mathfrak{so}(n)$. Для элементов этой алгебры имеем $X^t = -X$. Мы вводим матричнозначную функцию L со значениями в $\mathfrak{so}(n)$ с помощью того же выражения, что и в разд. 2.1, изменяя, однако, условие (i) этого раздела ввиду того, что не существует кососимметрических матриц ранга 1, и соответственно видоизменяем условие (ii). Мы опускаем для краткости индекс s и записываем выражение (2.1) в виде

$$L = \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + O(z), \tag{2.5}$$

где $L_0, L_1, \dots$ кососимметричны. Вместо условия (i) разд. 2.1 мы требуем, чтобы

$$L_{-1} = \alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \tag{2.6}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}^n$ фиксирован, $\beta \in \mathbb{C}^n$ произволен и

$$\alpha^t\alpha = \beta^t\alpha (= \alpha^t\beta) = 0. \tag{2.7}$$

Мы также требуем выполнения аналога условия (2.3):

$$L_0\alpha = k\alpha \tag{2.8}$$

для некоторого комплексного числа k.

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$. Подчеркнем, что в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

Лемма 2.2. *Свойства* (2.5)–(2.8) *инвариантны относительно скобки Ли.*

Доказательство. 1) Прежде всего докажем отсутствие члена с z^{-2}. Соответствующий коэффициент равен

$$\begin{aligned}[L_{-1}, L'_{-1}] &= [\alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t] \\ &= (\beta^t\alpha)(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) - (\alpha^t\alpha)(\beta'\beta^t - \beta\beta'^t) - (\alpha^t\beta')(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t).\end{aligned}$$

Он обращается в нуль ввиду соотношения (2.7) (примененного как к β, так и к β'). Подчеркнем, что для произведения $L_{-1}L'_{-1}$ член с z^{-2} в нуль не обращается.

2) Далее вычислим коэффициент при z^{-1} в произведении LL'. Коэффициент равен

$$\begin{aligned} L_{-1}L'_0 + L_0 L'_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(\alpha^t L'_0) + (L_0\alpha)\beta'^t - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(-k'\alpha^t) + k\alpha\beta'^t - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0 + k\beta'^t) - (L_0\beta' - k'\beta)\alpha^t \end{aligned}$$

(здесь мы использовали соотношение (2.8)). Мы видим, что пока он не имеет требуемого вида (2.6). Теперь рассмотрим соответствующий коэффициент в разложении коммутатора:

$$\begin{aligned} [L, L']_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0 - \beta'^t L_0 + k\beta'^t - k'\beta^t) - (L_0\beta' - L'_0\beta - k'\beta + k\beta')\alpha^t \\ &= \alpha\beta''^t - \beta''\alpha^t, \end{aligned}$$

где $\beta''^t = \beta^t L'_0 - \beta'^t L_0 + k\beta'^t - k'\beta^t$.

Легко проверить, что β'' удовлетворяет условию (2.7).

3) Проверим условие (2.8) на собственное значение матричного коэффициента при члене нулевой степени: $(LL')_0 = L_{-1}L'_1 + L_0 L'_0 + L_1 L'_{-1}$.

Ввиду (2.7) имеем $L'_{-1}\alpha = 0$; следовательно, для третьего слагаемого $L_1 L'_{-1}\alpha = 0$.

Для первого слагаемого имеем

$$L_{-1}L'_1\alpha = (\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)L'_1\alpha = \alpha(\beta^t L'_1\alpha) - \beta(\alpha^t L'_1\alpha).$$

Последний член в правой части этого соотношения обращается в нуль в силу кососимметричности матрицы L'_1.

Таким образом,

$$(LL')_0\alpha = k''\alpha, \quad \text{где } k'' = \beta^t L'_1\alpha + kk'. \tag{2.9}$$

□

2.3. Алгебры операторов Лакса для $\mathfrak{sp}(2n)$. Для элементов симплектической алгебры имеем $X^t = -\sigma X\sigma^{-1}$, где σ — невырожденная кососимметрическая матрица.

Возьмем разложение для L в виде

$$L = \frac{L_{-2}}{z^2} + \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + O(z^3) \tag{2.10}$$

(мы снова опускаем для краткости индекс s), где $L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots$ — симплектические матрицы и

$$L_{-2} = \nu\alpha\alpha^t, \quad L_{-1} = (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma \qquad (\nu \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{C}^{2n}). \tag{2.11}$$

Потребуем выполнения условия, аналогичного одному из условий (2.7):

$$\beta^t\sigma\alpha = 0. \tag{2.12}$$

Заметим, что при этом второе, $\alpha^t\sigma\alpha = 0$, выполнено автоматически ввиду кососимметричности матрицы σ.

Далее, мы требуем, чтобы

$$L_0\alpha = k\alpha \tag{2.13}$$

для некоторого комплексного числа k.

Мы накладываем новое соотношение

$$\alpha^t\sigma L_1\alpha = 0. \tag{2.14}$$

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Подчеркнем, что и в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

Лемма 2.3. *Свойства* (2.10)–(2.14) *инвариантны по отношению к скобке Ли.*

Доказательство. Пусть $L'' = [L, L']$.

1) Отсутствие членов порядка -4 и -3 по z в L'' вытекает только из соотношений $\beta^t\sigma\alpha = 0$, $\alpha^t\sigma\alpha = 0$.

2) Для члена порядка -2 имеем

$$L''_{-2} = (\nu' k - \nu k' + \beta^t\sigma\beta')\alpha\alpha^t\sigma,$$

т. е. он имеет вид, требуемый соотношением (2.11) (здесь и ниже ν', β', L'_i имеют тот же смысл для L', что ν, β, L_i для L).

3) Для члена порядка -1 прямое вычисление с использованием (2.10), (2.11) дает

$$\begin{gathered}L''_{-1} = \alpha(\nu\cdot\alpha^t\sigma L'_1 - \nu'\cdot\alpha^t\sigma L_1 + \beta^t\sigma L'_0 - \beta'^t\sigma L_0 + k\beta'^t\sigma - k'\beta^t\sigma)\\ + (-\nu L'_1\alpha + \nu' L_1\alpha - L'_0\beta + L_0\beta' + k\beta' - k'\beta)\alpha^t\sigma.\end{gathered}$$

Обозначим вторую скобку через β''. Тогда из соотношений $L_1^t = -\sigma L_1\sigma^{-1}$, $L_0^t = -\sigma L_0\sigma^{-1}$ (симплектичность матриц) вытекает, что первая скобка равна $\beta''^t\sigma$. Таким образом,

$$L''_{-1} = (\alpha\beta''^t + \beta''\alpha^t)\sigma,$$

где

$$\beta'' = -\nu L'_1\alpha + \nu' L_1\alpha - L'_0\beta + L_0\beta' + k\beta' - k'\beta.$$

Покажем, что $\beta''^t\sigma\alpha = 0$. Из полученного выше выражения для $\beta''^t\sigma$ находим

$$\beta''^t\sigma\alpha = \nu\cdot\alpha^t\sigma L'_1\alpha - \nu'\cdot\alpha^t\sigma L_1\alpha + \beta^t\sigma L'_0\alpha - \beta'^t\sigma L_0\alpha + k\beta'^t\sigma\alpha - k'\beta^t\sigma\alpha.$$

Первые два члена этого выражения обращаются в нуль в силу соотношения (2.14), примененного к L и L'. Ко вторым двум членам применим соотношения $L_0\alpha = k\alpha$ и $L'_0\alpha = k'\alpha$, после чего все оставшиеся члены исчезают ввиду соотношений (2.12).

4) Проверим условие (2.13) на собственные значения члена нулевой степени. По определению

$$(LL')_0 = \nu\alpha\alpha^t\sigma L'_2 + (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma L'_1 + L_0L'_0 + L_1(\alpha\beta'^t + \beta'\alpha^t)\sigma + \nu' L_2\alpha\alpha^t\sigma.$$

При умножении справа на α два последних члена очевидным образом исчезают. Получаем

$$(LL')_0\alpha = \nu\alpha\alpha^t\sigma L'_2\alpha + \alpha\beta^t\sigma L'_1\alpha + \beta\alpha^t\sigma L'_1\alpha + kk'\alpha.$$

Третье слагаемое равно 0 в силу (2.14). Таким образом, вектор α является собственным уже для свободного члена в произведении LL':

$$(LL')_0\alpha = \alpha(\nu\cdot\alpha^t\sigma L'_2\alpha + \beta^t\sigma L'_1\alpha + kk'),$$

а в коммутаторе получим

$$L''_0\alpha = \alpha(\nu \cdot \alpha^t\sigma L'_2\alpha - \nu' \cdot \alpha^t\sigma L_2\alpha + \beta^t\sigma L'_1\alpha - \beta'^t\sigma L_1\alpha). \tag{2.15}$$

5) Проверим сохранение условия $\alpha^t\sigma L_1\alpha = 0$ в произведении и коммутаторе. Для произведения по определению

$$(LL')_0 = L_{-2}L'_3 + L_{-1}L'_2 + L_0L'_1 + L_1L'_0 + L_2L'_{-1} + L_3L'_{-2}.$$

Подставляя известные выражения для L_{-2}, L'_{-2}, L_{-1}, L'_{-1}, получим

$$\begin{aligned}\alpha^t\sigma(LL')_0\alpha = \nu(\alpha^t\sigma\alpha)\alpha^t\sigma L'_3\alpha + ((\alpha^t\sigma\alpha)\beta^t + (\alpha^t\sigma\beta)\alpha^t)\sigma L'_2\alpha\\ - k(\alpha^t\sigma L'_1\alpha) + \tilde{k}(\alpha^t\sigma L_1\alpha)\\ + \alpha^t\sigma L_2(\alpha(\beta'^t\sigma\alpha) + \beta'(\alpha^t\sigma\alpha)) + \nu'\alpha^t\sigma L_3\alpha(\alpha^t\sigma\alpha).\end{aligned}$$

Ввиду соотношений (2.11)–(2.14) это выражение обращается в нуль. □

§ 3. Почти градуированная структура

В этом параграфе мы рассматриваем следующие случаи: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, и заканчиваем случаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, который является специальным в отношении почти градуированной структуры. Общее определение почти градуированной структуры дано во введении. Обозначим через $\overline{\mathfrak{g}}$ алгебру операторов Лакса, соответствующую $\mathfrak{g}$.

Для любой из перечисленных выше алгебр $\mathfrak{g}$, за исключением $\mathfrak{gl}(n)$, и любого $m \in \mathbb{Z}$ пусть

$$\mathfrak{g}_m = \{L \in \overline{\mathfrak{g}} \mid (L) + D \geqslant 0\},$$

где (L) — дивизор $\mathfrak{g}$-значной функции L, и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + \sum_{s=1}^{ng}\gamma_s,$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + 2\sum_{s=1}^{ng}\gamma_s.$$

Мы называем $\mathfrak{g}_m$ (*однородным*) *подпространством степени* m алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$.

Теорема 3.1. *Для* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$

1) $\dim\mathfrak{g}_m = \dim\mathfrak{g}$;

2) $\overline{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_m$;

3) $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \bigoplus_{m=k+l}^{k+l+g}\mathfrak{g}_m$.

Доказательство. Сначала докажем 1). Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ по теореме Римана–Роха размерность пространства всех $\mathfrak{g}$-значных функций L, удовлетворяющих соотношению $(L) + D \geqslant 0$, равна $(\dim\mathfrak{g})(ng+1)$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ она равна $(\dim\mathfrak{g})(2ng+1)$. Мы докажем, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ имеется ровно $\dim\mathfrak{g}$ соотношений в каждом полюсе

γ_s, а в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ таких соотношений $2\dim\mathfrak{g}$. Это будет означать, что $\dim\mathfrak{g}_m=\dim\mathfrak{g}$.

Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n)$. Элементы подпространства $\mathfrak{g}_m$ удовлетворяют определенным условиям трех типов, происходящим из условий (2.2), (2.3) на вычеты, собственные значения и следы матрицы $L\in\mathfrak{g}_m$, которые описаны ниже.

1) Для каждой слабой особенности $L_{-1}=\alpha\beta^t$, что должно было бы дать $\dim\mathfrak{g}$ соотношений (так как $L_{-1}\in\mathfrak{g}$), если бы правая часть была фиксирована. Но она зависит от свободного n-мерного вектора β. Следовательно, мы имеем $\dim\mathfrak{g}-n$ условий в каждом из ng простых полюсов γ_s.

2) Для каждой слабой особенности $L_0\alpha=k\alpha$, что дает n условий. Принимая во внимание один свободный параметр k, получаем $n-1$ условий в каждом γ_s.

3) Мы также имеем $\operatorname{tr}L=0$, т. е. еще одно условие в каждой слабой особенности.

Таким образом, мы имеем $(\dim\mathfrak{g}-n)+(n-1)+1=\dim\mathfrak{g}$ соотношений в каждой точке γ_s, что и требовалось.

Для $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n)$ мы придерживаемся той же аргументации. Снова соотношение (2.6) $L_{-1}=\alpha\beta^t-\beta\alpha^t$ дает $\dim\mathfrak{g}-n$ уравнений, соотношение (2.8) $L_0\alpha=k\alpha$ дает $n-1$ уравнений и (2.7) $\beta^t\alpha=0$ дает еще одно уравнение. Суммируя, получаем $\dim\mathfrak{g}$ уравнений в каждой точке γ_s.

В случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ в каждой точке γ_s имеем следующие условия:

$L_{-2}=\nu\alpha\alpha^t:$	$\dim\mathfrak{g}-1$ условий (один свободный параметр ν),
$L_{-1}=(\alpha\beta^t+\beta\alpha^t)\sigma:$	$\dim\mathfrak{g}-2n$ условий ($2n$ свободных параметров β),
$L_0\alpha=k\alpha:$	$2n-1$ условий (один свободный параметр k),
$\beta^t\sigma\alpha=0,\ \alpha^t\sigma L_1\alpha=0:$	2 условия,

т. е. $2\dim\mathfrak{g}$ условий в каждой из ng точек, что и требовалось.

Для $m>0$ и $m<-g$ подпространства $\mathfrak{g}_m$ линейно независимы по очевидной причине: порядки в $P_\pm$ элементов этих подпространств различны для различных m.

Для $-g\leqslant m\leqslant 0$ линейная независимость подпространств $\mathfrak{g}_m$ вытекает из того факта, что не существует *голоморфных везде* операторов Лакса. Мы хотели бы подчеркнуть, что последний аргумент применим только в случае простых алгебр Ли. Этим объясняется то, почему в случае редуктивной алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ требуется некоторая модификация (см. ниже).

Утверждение 3) теоремы следует из рассмотрения порядков в точках $P_\pm$. $\square$

Теорема 3.1 определяет *почти градуированную структуру* на $\overline{\mathfrak{g}}$.

Теперь рассмотрим случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n)$. В этом случае $\overline{\mathfrak{g}}$ содержит подпространство функций, принимающих значения в одномерном пространстве скалярных матриц. Пусть L — такая функция. Ввиду (2.2) получаем $\operatorname{tr}L_{-1}=0$. Так как L_{-1} — скалярная матрица, то $L_{-1}=0$. Следовательно, L голоморфна везде, за исключением точек $P_\pm$. Пусть $\mathscr{A}$ обозначает алгебру мероморфных функций на Γ, голоморфных везде, кроме точек $P_\pm$. Тогда $L\in\mathscr{A}\cdot\mathrm{id}$, где id — единичная матрица. Следовательно,

$$\overline{\mathfrak{gl}(n)}=\overline{\mathfrak{sl}(n)}\oplus\mathscr{A}\cdot\mathrm{id}. \tag{3.1}$$

В [3] в пространстве таких функций был введен некоторый базис $\{A_m\}$ (позднее названный *базисом Кричевера–Новикова*). Положим $\mathscr{A}_m = \mathbb{C}A_m$ и $\mathfrak{gl}(n)_m = \mathfrak{sl}(n)_m \oplus (\mathscr{A}_m \cdot \mathrm{id})$. Для $m > 0$ и $m < -g$ это определение эквивалентно данному выше определению подпространства $\mathfrak{g}_m$ (с $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$).

Как следует из (3.1), с $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{gl}(n)_m$ теорема 3.1 остается справедливой для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. Лишь соотношение 3) теоремы выполняется с другим верхним пределом суммирования, определяемым алгеброй $\mathscr{A}$ (см. [3]).

§4. Центральные расширения алгебр операторов Лакса

4.1. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{gl}(n)$. Для алгебр токов Кричевера–Новикова (в том числе для алгебр петель) 2-коцикл, задающий центральное расширение, дается известным выражением $\operatorname{tr}\operatorname{res}_{P_+} L\,dL'$. Для этих алгебр данный коцикл является локальным. Коцикл χ называется *локальным* [3], если существуют константы μ', μ'', такие, что $\chi(\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_{m'}) = 0$ за исключением тех случаев, когда $\mu' \leqslant m + m' \leqslant \mu''$, где $\mathfrak{g}_m$, $\mathfrak{g}_{m'}$ — однородные подпространства, введенные в предыдущем разделе. В случае алгебр операторов Лакса приведенный выше коцикл уже не является локальным. В этом параграфе мы подправим его так, чтобы получить локальный коцикл.

Для каждого оператора L собственное значение k его компоненты нулевой степени L_0 (см. (2.3)) может рассматриваться как линейный функционал от L. Мы обозначим этот функционал через $k(L)$.

Лемма 4.1. *В каждой слабой особенности* 1*-форма* $\operatorname{tr} L\,dL'$ *имеет*, *самое большее*, *простой полюс*, *и*
$$\operatorname{res}\operatorname{tr} L\,dL' = k([L, L']). \tag{4.1}$$

Доказательство. Подсчитаем обе части этого соотношения явно.

1) Используя соотношение
$$dL' = -\frac{\alpha\beta'^t}{z^2} + L'_1 + \cdots$$
и формулу (2.1), получаем
$$L\,dL' = -\frac{\alpha\beta^t\alpha\beta'^t}{z^3} - \frac{L_0\alpha\beta'^t}{z^2} - \frac{L_1\alpha\beta'^t - \alpha\beta^t L'_1}{z} + \cdots .$$
Первый член обращается в нуль, так как $\beta^t\alpha = 0$. Второй член обращается в нуль под символом следа, так как $L_0\alpha = k\alpha$ и $\operatorname{tr}\alpha\beta'^t = \beta'^t\alpha = 0$. Третий член дает нам требуемый вычет. Имеем
$$\operatorname{res}\operatorname{tr} L\,dL' = \operatorname{tr}(\alpha\beta^t L'_1 - L_1\alpha\beta'^t) = \beta^t L'_1\alpha - \beta'^t L_1\alpha.$$

2) Теперь вычислим правую часть рассматриваемого соотношения. Обозначим через $[L, L']_0$ член нулевой степени разложения (2.1) для коммутатора $[L, L']$. Имеем
$$[L, L']_0 = \alpha\beta^t L'_1 + L_0 L'_0 + L_1\alpha\beta'^t - \alpha\beta'^t L_1 - L'_0 L_0 - L'_1\alpha\beta^t.$$
Умножим обе части этого соотношения на α справа. Тогда третьи члены в обеих строках обращаются в нуль, так как они содержат множители $\beta'^t\alpha$, $\beta^t\alpha$, равные

нулю ввиду (2.2). Вторые члены взаимно уничтожаются, так как $L_0 L_0' \alpha = k' k \alpha$ и $L_0' L_0 \alpha = k k' \alpha$. Следовательно,

$$[L, L']_0 \alpha = \alpha \beta^t L_1' \alpha - \alpha \beta'^t L_1 \alpha = \alpha(\beta^t L_1' \alpha - \beta'^t L_1 \alpha).$$

Выражение в скобках представляет собой 1×1-матрицу, т. е. комплексное число. Разумеется, это комплексное число является собственным значением матрицы $[L, L']_0$ на векторе α, т. е. значением $k([L, L'])$. Это значение в точности совпадает с вычисленным выше выражением для $\operatorname{tr} \operatorname{res} L\, dL'$, что завершает доказательство. □

Мы хотим избавиться от сингулярностей 1-формы $\operatorname{tr} L\, dL'$ в γ_s путем вычитания из нее другого выражения для собственного значения в правой части соотношения (4.1). Замечательно, что это новое выражение формулируется в терминах связностей в голоморфных расслоениях на Γ, явный вид которых дан в [2]. Ниже $\mathscr{L}$ обозначает 1-форму такой связности.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathscr{L}$ — матричнозначная 1-форма, локально, в окрестности слабой особенности, равная*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathscr{L}_0\, dz + \cdots ,$$

причем $\mathscr{L}$ удовлетворяет тем же условиям, что и L (см. (2.1)–(2.3)), с одним лишь отличием: $\tilde{\beta}^t \alpha = 1$, где $\mathscr{L}_{-1} = \alpha \tilde{\beta}^t$. Тогда 1-форма $\operatorname{tr} L\mathscr{L}$ имеет, самое большее, простой полюс при $z = 0$ и

$$\operatorname{res} \operatorname{tr} L\mathscr{L} = k(L).$$

Доказательство. Имеем

$$L = \frac{\alpha\beta^t}{z} + L_0 + \cdots , \qquad \mathscr{L} = \left(\frac{\alpha\tilde{\beta}^t}{z} + \mathscr{L}_0 + \cdots\right) dz;$$

следовательно,

$$L\mathscr{L} = \left(\frac{\alpha\beta^t\alpha\tilde{\beta}^t}{z^2} + \frac{\alpha\beta^t\mathscr{L}_0 + L_0\alpha\tilde{\beta}^t}{z} + \cdots\right) dz.$$

Как и выше, первый член обращается в нуль. Для второго члена имеем

$$\operatorname{res} \operatorname{tr} L\mathscr{L} = \operatorname{tr}(\alpha\beta^t\mathscr{L}_0 + L_0\alpha\tilde{\beta}^t) = \beta^t\mathscr{L}_0\alpha + \tilde{\beta}^t L_0 \alpha.$$

Далее, $\mathscr{L}_0\alpha = \tilde{k}\alpha$, $L_0\alpha = k\alpha$; следовательно, $\beta^t\mathscr{L}_0\alpha = \tilde{k}\beta^t\alpha = 0$ и $\tilde{\beta}^t L_0 \alpha = k\tilde{\beta}^t\alpha = k$. Это завершает доказательство. □

Теорема 4.3. *Для каждой 1-формы $\mathscr{L}$, удовлетворяющей условиям леммы 4.2, 1-форма $\operatorname{tr}(L\, dL' - [L, L']\mathscr{L})$ регулярна везде, за исключением точек $P_\pm$, и выражение*

$$\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_+} \operatorname{tr}(L\, dL' - [L, L']\mathscr{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Доказательство. В ходе доказательства леммы 4.1 и леммы 4.2 мы видели, что 1-формы $\operatorname{tr} L\, dL'$ и $\operatorname{tr}[L, L']\mathscr{L}$ имеют простые полюсы в каждой из точек γ_s, и их вычеты равны одной и той же величине $k_s([L, L'])$. Следовательно, их разность регулярна в каждой из точек γ_s.

Предположим, что в точке P_+ мы имеем разложения

$$L(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i, \quad L'(z) = \sum_{j=m'}^{\infty} b_j z^j, \quad \mathscr{L}(z) = \sum_{k=m_+}^{\infty} c_k z^k dz. \tag{4.2}$$

Тогда

$$L(z)\, dL'(z) = \sum_{p=m+m'}^{\infty} \Bigl(\sum_{i+j=p} j a_i b_j \Bigr) z^{p-1}\, dz$$

и

$$[L(z), L'(z)]\mathscr{L} = \sum_{p=m+m'+m_+}^{\infty} \Bigl(\sum_{i+j+k=p} [a_i, b_j] c_k \Bigr) z^p\, dz.$$

Чтобы хотя бы одна из этих 1-форм имела нетривиальный вычет в точке P_+, необходимо, чтобы выполнялось либо неравенство $m+m' \leqslant 0$, либо неравенство $m + m' + m_+ \leqslant -1$, другими словами,

$$m + m' \leqslant \max\{0, -1 - m_+\}.$$

Если L и L' однородны степеней m, m' соответственно, то в точке P_- их разложения, аналогичные разложениям (4.2), начинаются с $i = -m - g$, $j = -m' - g$ соответственно. Разложение для $\mathscr{L}$ начинается с некоторого целого m_-. Следовательно, условие в точке P_- выглядит так:

$$-m - m' - 2g \leqslant \max\{0, -1 + m_-\}.$$

Окончательно, получаем

$$\min\{0, 1 - m_-\} - 2g \leqslant m + m' \leqslant \max\{0, -1 - m_+\}.$$

Так как $m_\pm$ фиксированы ($\mathscr{L}$ фиксирована), последнее в точности означает, что коцикл локален. $\square$

4.2. Центральные расширения для алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{so}(n)$. Мы придерживаемся здесь той же линии рассуждений, что и в предыдущем разделе.

Лемма 4.4. *В каждой слабой особенности* 1*-форма* $\operatorname{tr} L\, dL'$ *имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\operatorname{res} \operatorname{tr} L\, dL' = 2k([L, L']). \tag{4.3}$$

Доказательство. 1) Применяя (2.5) и соотношение

$$dL' = -L'_{-1} z^{-2} + L'_1 + \cdots,$$

где L'_{-1} дается соотношением (2.6), мы получаем

$$L\, dL' = -\frac{L_{-1} L'_{-1}}{z^3} - \frac{L_0 L'_{-1}}{z^2} - \frac{L_1 L'_{-1} - L_{-1} L'_1}{z} + \cdots. \tag{4.4}$$

Для первого члена мы имеем

$$L_{-1} L'_{-1} = (\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) = \alpha(\beta^t\alpha)\beta'^t - \beta(\alpha^t\alpha)\beta'^t - \alpha\beta^t\beta'\alpha^t - \beta\alpha^t\beta'\alpha^t.$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль благодаря (2.7). Для оставшихся имеем

$$\operatorname{tr}(L_{-1} L'_{-1}) = \operatorname{tr}(-\alpha\beta^t\beta'\alpha^t - \beta\alpha^t\beta'\alpha^t) = -(\alpha^t\alpha)\beta^t\beta' - (\alpha^t\beta)\alpha^t\beta',$$

что снова обращается в нуль ввиду (2.7).

Снова (как и в разд. 4.1) член, содержащий z^{-2}, обращается в нуль под символом следа. По определению

$$L_0 L'_{-1} = L_0(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) = k\alpha\beta'^t - L_0\beta'\alpha^t.$$

Теперь заметим, что $\operatorname{tr}(L_0\beta'\alpha^t) = \operatorname{tr}(\alpha^t L_0\beta')$ и $\alpha^t L_0 = -k\alpha^t$. Следовательно, $\operatorname{tr}(L_0 L'_{-1}) = 2k\alpha^t\beta'$ обращается в нуль ввиду (2.7).

Третий член в (4.4) дает нам требуемый вычет. Имеем

$$\operatorname{res} L\,dL' = (L_{-1}L'_1 - L_1 L'_{-1}).$$

Подставляя L_{-1}, L'_{-1} из (2.6), мы получим

$$\operatorname{res} L\,dL' = \alpha\beta^t L'_1 - \beta\alpha^t L'_1 - L_1\alpha\beta'^t + L_1\beta'\alpha^t;$$

следовательно,

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} L\,dL' = \beta^t L'_1\alpha - \alpha^t L'_1\beta - \beta'^t L_1\alpha + \alpha^t L_1\beta'.$$

В силу кососимметричности матриц L_1, L'_1 первые два слагаемых в последнем соотношении равны и то же самое верно относительно двух последних слагаемых. Следовательно,

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} L\,dL' = 2(\beta^t L'_1\alpha - \beta'^t L_1\alpha).$$

Из (2.9), очевидно, вытекает, что $[L, L']_0\alpha = \beta^t L'_1\alpha - \beta'^t L_1\alpha$, и это доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть $\mathscr{L}$ — кососимметрическая матричнозначная 1-форма, такая, что локально, в окрестности слабой особенности,*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1}\frac{dz}{z} + \mathscr{L}_0\,dz + \cdots,$$

где $\mathscr{L}_{-1} = \alpha\tilde\beta^t - \tilde\beta\alpha^t$, $\tilde\beta^t\alpha = 1$ и $\mathscr{L}_0\alpha = \tilde k\alpha$. Тогда 1-форма $\operatorname{tr} L\mathscr{L}$ имеет, самое большее, простой полюс при $z = 0$ и

$$\operatorname{res}\operatorname{tr} L\mathscr{L} = 2k(L).$$

Доказательство. Коэффициент при z^{-2} в произведении $L\mathscr{L}$ равен по определению

$$(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)(\alpha\tilde\beta^t - \tilde\beta\alpha^t) = \alpha(\beta^t\alpha)\tilde\beta^t - \alpha\beta^t\tilde\beta\alpha^t - \beta(\alpha^t\alpha)\tilde\beta^t + \beta\alpha^t\tilde\beta\alpha^t.$$

Первый и третий члены обращаются в нуль по (2.7). Для следа оставшейся суммы имеем

$$\operatorname{tr}(-\alpha\beta^t\tilde\beta\alpha^t + \beta\alpha^t\tilde\beta\alpha^t) = -(\alpha^t\alpha)\beta^t\tilde\beta + (\alpha^t\beta)\alpha^t\tilde\beta,$$

что обращается в нуль по той же причине.

Перемножая разложения для L и $\mathscr{L}$, находим

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}(L\mathscr{L}) = \operatorname{tr}(L_{-1}\mathscr{L}_0 + L_0\mathscr{L}_{-1}) = \operatorname{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathscr{L}_0 + \operatorname{tr} L_0(\alpha\tilde\beta^t - \tilde\beta\alpha^t).$$

Для первого слагаемого имеем

$$\operatorname{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathscr{L}_0 = \operatorname{tr}(\alpha\beta^t\mathscr{L}_0 - \beta\alpha^t\mathscr{L}_0) = \beta^t\mathscr{L}_0\alpha - \alpha^t\mathscr{L}_0\beta.$$

Заметим, что в силу кососимметричности $\alpha^t\mathscr{L}_0\beta = -\beta^t\mathscr{L}_0\alpha$, а следовательно,

$$\operatorname{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathscr{L}_0 = \beta^t\mathscr{L}_0\alpha - \alpha^t\mathscr{L}_0\beta = 2\beta^t\mathscr{L}_0\alpha = 2\tilde k\beta^t\alpha,$$

что обращается в нуль ввиду (2.7).

Для второго слагаемого имеем

$$\operatorname{tr} L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = \operatorname{tr}(L_0\alpha\tilde{\beta}^t - L_0\tilde{\beta}\alpha^t) = \tilde{\beta}^t L_0\alpha - \alpha^t L_0\tilde{\beta}.$$

Так как $L_0\alpha = k\alpha$, $\alpha^t L_0 = -k\alpha^t$ и $\tilde{\beta}^t\alpha = \alpha^t\tilde{\beta} = 1$, мы получаем

$$\operatorname{tr} L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = 2k. \qquad \square$$

Теорема 4.6. *Для каждой* 1*-формы* $\mathscr{L}$, *удовлетворяющей условиям леммы* 4.5, 1*-форма* $\operatorname{tr}(L\,dL' - [L, L']\mathscr{L})$ *регулярна везде, за исключением точек* $P_\pm$, *и выражение*

$$\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_+} \operatorname{tr}(L\,dL' - [L, L']\mathscr{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3. Оно опирается только на отсутствие вычетов 1-формы, определяющей коцикл, в слабых особенностях.

Имеется определенный произвол в определении $\mathscr{L}$ в лемме 4.5. Например, мы могли бы потребовать, чтобы $\mathscr{L}_{-1} = \alpha\tilde{\beta}^t$, и взять в теореме 4.6 $\operatorname{tr}(L\,dL' - 2[L, L']\mathscr{L})$.

4.3. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{sp}(2n)$. Мы продолжаем придерживаться той же линии рассуждений, что и в предыдущих разделах. Во-первых, докажем следующий точный аналог леммы 4.4.

Лемма 4.7. *В каждой слабой особенности* 1*-форма* $\operatorname{tr} L\,dL'$ *имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\operatorname{res} \operatorname{tr} L\,dL' = 2k([L, L']). \tag{4.5}$$

Доказательство. Прямое вычисление формы $L\,dL'$ на основе разложения (2.10) показывает, что коэффициенты при z^{-5} и z^{-4} этой матричнозначной 1-формы равны 0 ввиду соотношений (2.12).

Для коэффициента при z^{-3} имеем

$$(L\,dL')_{-3} = -(\beta^t\sigma\beta' - 2\nu')\alpha\alpha^t\sigma.$$

Это выражение обращается в нуль под знаком следа:

$$\operatorname{tr}(L\,dL')_{-3} = -(\beta^t\sigma\beta' - 2\nu')(\alpha^t\sigma\alpha) = 0.$$

Аналогично, используя (2.12)–(2.14), имеем

$$\operatorname{tr}(L\,dL')_{-2} = \nu(\alpha^t\sigma L_1'\alpha) - 2k(\beta'^t\sigma\alpha) - \nu'(\alpha^t\sigma L_1\alpha) = 0.$$

Таким образом, 1-форма $\operatorname{tr} L\,dL'$ действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Прямое вычисление вычета дает

$$\operatorname{tr}(L\,dL')_{-1} = 2(\nu\cdot\alpha^t\sigma L_2'\alpha - \nu'\cdot\alpha^t\sigma L_2\alpha + \beta^t\sigma L_1'\alpha - \beta'^t\sigma L_1\alpha),$$

что в точности совпадает с удвоенным выражением (2.15) для $k([L, L'])$. $\square$

Лемма 4.8. *Пусть $\mathscr{L}$ есть $\mathfrak{g}$-значная 1-форма, такая, что локально, в окрестности каждой слабой особенности,*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1}\frac{dz}{z} + \mathscr{L}_0\,dz + \cdots ,$$

где $\mathscr{L}_{-1} = (\alpha\tilde{\beta}^t + \tilde{\beta}\alpha^t)\sigma$, $\tilde{\beta}^t\sigma\alpha = 1$, $\mathscr{L}_0\alpha = \tilde{k}\alpha$ *и* $\alpha^t\sigma\mathscr{L}_1\alpha = 0$. *Тогда 1-форма* $\operatorname{tr} L\mathscr{L}$ *имеет, самое большее, простой полюс при* $z = 0$ *и*

$$\operatorname{res}\operatorname{tr} L\mathscr{L} = 2k(L).$$

Доказательство. Разложение для $L\mathscr{L}$ начинается с z^{-3}. Имеем

$$\operatorname{tr}(L\mathscr{L})_{-3} = \nu(\tilde{\beta}^t\sigma\alpha)(\alpha^t\sigma\alpha) = 0,$$

$$\operatorname{tr}(L\mathscr{L})_{-2} = \nu(\alpha^t\sigma\tilde{\beta})(\alpha^t\sigma\alpha) + (\beta^t\sigma\tilde{\beta})(\alpha^t\sigma\alpha) + (\alpha^t\sigma\tilde{\beta})(\alpha^t\sigma\beta) = 0.$$

Таким образом, 1-форма $\operatorname{tr} L\mathscr{L}$ действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Вычисление вычета дает

$$\operatorname{tr}(L\mathscr{L})_{-1} = \nu\cdot\alpha^t\sigma\mathscr{L}_1\alpha + \beta^t\sigma(\mathscr{L}_0\alpha) + (\alpha^t\sigma\mathscr{L}_0)\beta + \tilde{\beta}^t\sigma(L_0\alpha) + (\alpha^t\sigma L_0)\tilde{\beta}.$$

По условию леммы $\alpha^t\sigma\mathscr{L}_1\alpha = 0$, $\mathscr{L}_0\alpha = \tilde{k}\alpha$. Из последнего равенства также следует, что $\alpha^t\sigma\mathscr{L}_0 = -\tilde{k}\alpha^t\sigma$. Поэтому

$$\operatorname{tr}(L\mathscr{L})_{-1} = \tilde{\beta}^t\sigma(L_0\alpha) + (\alpha^t\sigma L_0)\tilde{\beta}.$$

Ввиду соотношений $L_0\alpha = k\alpha$, $\alpha^t\sigma L_0 = -k\alpha^t\sigma$ имеем

$$\operatorname{tr}(L\mathscr{L})_{-1} = 2k(\tilde{\beta}^t\sigma\alpha) = 2k. \qquad \square$$

Из двух последних лемм, как и выше, вытекает

Теорема 4.9. *При* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ *выражение*

$$\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_+}\operatorname{tr}(L\,dL')$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Литература

[1] I. M. Krichever, *Vector bundles and Lax equations on algebraic curves*, Comm. Math. Phys., **229**:2 (2002), 229–269; `http://arxiv.org/abs/hep-th/0108110`.

[2] I. M. Krichever, *Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Witham equations*, Mosc. Math. J., **2**:4 (2002), 717–752, 806; `http://arxiv.org/abs/hep-th/0112096`.

[3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функц. анализ и его прил., **21**:2 (1987), 46–63.

[4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функц. анализ и его прил., **21**:4 (1987), 47–61.

[5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **23**:1 (1989), 46–63.

[6] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции*, УМН, **55**:4 (2000), 181–182.

[7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на римановых поверхностях и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)*. I, Функц. анализ и его прил., **12**:4 (1978), 41–52.

[8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на алгебраических кривых и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6 (1980), 47–68.

[9] M. Schlichenmaier, *Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever–Novikov type*, J. Reine Angew. Math., **559** (2003), 53–94.

[10] M. Schlichenmaier, *Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type*, Moscow Math. J., **3**:4 (2003), 1395–1427; `http://arxiv.org/abs/math/0210360`.

[11] O. K. Sheinman, *Affine Krichever-Novikov algebras, their representations and applications*, in: Geometry, Topology and Mathematical Physics. S. P. Novikov's Seminar 2002–2003,, Amer. Soc. Transl. (2), vol. 212 (eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2004, 297–316; `http://arxiv.org/abs/Math.RT/0304020`.

[12] А. Н. Тюрин, *Классификация векторных расслоений на алгебраических кривых произвольного рода*, Изв. АН СССР, сер. мат., **29** (1965), 657–688.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
Университет Коламбия, Нью-Йорк
e-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
28 февраля 2007 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Независимый московский университет
e-mail: sheinman@mi.ras.ru