2004 г. ноябрь — декабрь *т. 59, вып. 6(360)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

И. М. Кричевер

Предложен новый подход к построению аналитической теории разностных уравнений с рациональными и эллиптическими коэффициентами. Он основан на конструкции канонических мероморфных решений, которые аналитичны вдоль "толстых" путей. Концепция таких решений приводит к определению понятия локальных монодромий разностных уравнений. Показано, что в континуальном пределе эти локальные монодромии сходятся к матрицам монодромии дифференциальных уравнений. В эллиптическом случае построен новый тип изомонодромных преобразований, меняющих периоды эллиптических кривых.

Библиография: 18 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Хорошо известно, что корреляционные функции различных моделей статистической физики, так же как и ряд важнейших характеристик моделей теории случайных

Работа выполнена при частичной поддержке гранта National Science Foundation DMS-01-04621.

матриц, выражаются через решения *дифференциальных* уравнений типа Пенлеве (см. работы [1]–[5] и приведенные в них ссылки). В последнее время повышенный интерес вызывают дискретные аналоги уравнений Пенлеве [6], [7]. В значительной мере этот интерес обусловлен связями таких уравнений с дискретными вероятностными моделями [8], [9]. В работе [10] было показано, что большинство дискретных аналогов уравнений типа Пенлеве могут быть единым образом рассмотрены в рамках теории *изомонодромных преобразований* систем линейных разностных уравнений с рациональными коэффициентами.

Аналитическая теория матричных линейных разностных уравнений

$$\Psi(z+1) = A(z)\Psi(z) \tag{1.1}$$

с рациональными коэффициентами восходит к фундаментальным результатам Биркгофа [11], [12], которые послужили отправной точкой многочисленных исследований (см. монографию [13] и содержащиеся в ней ссылки).

Грубая классификация разностных уравнений (1.1) дается терминами: *регулярные*, *регулярно-сингулярные*, *ручные и дикие* (см. подробнее [13]). Эта терминология отражает формальную асимптотическую теорию разностных уравнения в бесконечности. Уравнение (1.1) с коэффициентами вида

$$A = A_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{z - z_m} \tag{1.2}$$

называется регулярно-сингулярным, если $A_0 = 1$. Оно называется регулярным, если в дополнение вычет $A(z)$ в бесконечности тривиален, т.е. $\sum_{m=1}^{n} A_m = 0$. Ручными уравнениями называются те, у которых старший коэффициент A_0 обратим. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением ручных разностных уравнений с диагонализуемым старшим коэффициентом A_0. На протяжении работы будет предполагаться, что полюсы z_m не конгруэнтны, т.е. что разность $z_l - z_m$ не является целым числом, $z_l - z_m \notin \mathbb{Z}$.

Уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразований $\Psi' = \rho^z \Psi$, $A' = \rho A(z)$, в которых ρ является скаляром. Оно инвариантно и относительно калибровочных преобразований $\Psi' = g\Psi$, $A' = gA(z)g^{-1}$, $g \in SL_r$. Следовательно, если A_0 диагонализуема, то без ограничения общности мы можем предполагать, что матрица A_0 является диагональной:

$$A_0^{ij} = \rho_i \delta^{ij}, \qquad \det A_0 = \prod_j \rho_j = 1. \tag{1.3}$$

Дополнительно будет предполагаться, что вычет следа A в бесконечности тривиален:

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{res}_\infty A dz) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{m=1}^{n} A_m\right) = 0. \tag{1.4}$$

Если собственные значения A_0 попарно различны, $\rho_i \neq \rho_j$, то у уравнения (1.1) имеется единственное формальное решение $Y(z)$ вида

$$Y = \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s z^{-s}\right) e^{z \ln A_0 + K \ln z}, \tag{1.5}$$

где $K^{ij} = k_i \delta^{ij}$ – диагональная матрица.

В работах [11] и [12] были рассмотрены разностные уравнения с *полиномиальными* коэффициентами $\widetilde{A}$. Заметим, что общий случай рациональных коэффициентов $A(z)$ может быть сведен к случаю полиномиальных коэффициентов с помощью преобразования

$$\widetilde{A} = A(z)\prod_m (z - z_m), \qquad \widetilde{\Psi} = \Psi \prod_m \Gamma(z - z_m), \tag{1.6}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Биркгоф доказал, что если отношения собственных значений ρ_i старшего коэффициента A не являются вещественными, $\operatorname{Im}(\rho_i/\rho_j) \neq 0$, то у уравнения (1.1) с полиномиальным коэффициентом имеется два канонических мероморфных решения $\widetilde{\Psi}_r(z)$ и $\widetilde{\Psi}_l(z)$, которые голоморфны и асимптотически представимы формальным решением $\widetilde{Y}(z)$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} z \gg 0$ и $\operatorname{Re} z \ll 0$ соответственно. Биркгофом было также доказано, что матрица связи этих решений

$$\widetilde{S}(z) = \widetilde{\Psi}_r^{-1}(z)\widetilde{\Psi}_l(z), \tag{1.7}$$

которая по очевидным причинам периодична, является на самом деле рациональной функцией переменной $\exp(2\pi i z)$. Эта функция содержит столько же параметров, сколько содержится в $\widetilde{A}$. Согласно другим результатам Биркгофа, полиномиальные функции $\widetilde{A}'(z)$ и $\widetilde{A}(z)$ имеют одну и ту же матрицу связи $S(z)$ тогда и только тогда, когда существует рациональная матричная функция $R(z)$ такая, что

$$\widetilde{A}'(z) = R(z+1)\widetilde{A}(z)R^{-1}(z). \tag{1.8}$$

В работе [10] явно построены семейства коммутирующих преобразований вида (1.8) и доказано, что в непрерывном пределе условия коммутативности части из них сходятся к классическим уравнениям Шлезингера [14].

До сих пор основные идеи подхода к аналитической теории разностных уравнений, предложенные Биркгофом, оставались неизменными. Построение решений уравнения, имеющих заданное асимптотическое поведение в бесконечности, напоминает скорее теорию Стокса уравнений с иррегулярными особенностями, чем классическую аналитическую теорию уравнений с регулярными особенностями. В рамках теории Биркгофа отсутствует явный аналог представления монодромии $\pi_1(C \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, которое задает интегралы уравнений Шлезингера. Очевидный непрерывный предел матрицы связи $S(z)$ позволяет получить информацию о монодромии в бесконечности и не несет в себе никакой информации о локальных монодромиях дифференциального уравнения вокруг полюсов z_m. (Возможно по этой причине Биркгоф с самого начала исключил с помощью преобразования (1.6) положения полюсов и ограничил рассмотрение случаем полиномиальных коэффициентов.)

Основной целью настоящей работы является развитие нового похода к аналитической теории разностных уравнений с рациональными коэффициентами и его обобщение на случай разностных уравнений с *эллиптическими* коэффициентами. Этот подход основан на конструкции мероморфных решений разностных уравнений, которые голоморфны вдоль *толстых путей*.

Для того чтобы дать представление об основных идеях нашего подхода, рассмотрим сначала случай, прямо противоположный случаю, рассмотренному Биркгофом. Это случай вещественных *экспонент* ρ_i. Зафиксируем произвольное вещественное число $x \neq \operatorname{Re} z_i$ и рассмотрим матричное решение $\Psi_x(z)$ уравнения (1.1), которое голоморфно и обратимо в полосе $z \in \Pi_x$: $x \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x+1$. Мы потребуем также, чтобы в этой полосе Ψ_x имело не более чем *полиномиальный* рост в бесконечности $|\operatorname{Im} z| \to \infty$. Легко показать, что если такое решение существует, то оно единственно с точностью до преобразования $\Psi'_x = \Psi_x(z)g$, $g \in GL_r$. Совсем неочевидным является доказанное нами утверждение о том, что если Ψ_x существует, то оно имеет следующее асимптотическое представление:

$$\Psi_x = Y g_x^{\pm}, \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty. \tag{1.9}$$

В определенной степени отношение

$$g_x = g_x^{+}(g_x^{-})^{-1} \tag{1.10}$$

может трактоваться как матрица переноса решения вдоль "толстого" пути Π_x, идущего из одной бесконечности $-i\infty$ в другую $i\infty$.

Мы доказываем, что для случаев $x \gg 0$ и $x \ll 0$ каноническое решение Ψ_x *всегда существует*. В обоих случаях соответствующие решения не зависят от x. Как следствие, мы получаем два мероморфных решения Ψ_r и Ψ_l уравнения (1.1), которые голоморфны в полуплоскостях $\operatorname{Re} z \gg 0$ и $\operatorname{Re} z \ll 0$. Соответствующие матрицы переноса $g_r = g_x$, $x \gg 0$, и $g_l = g_x$, $x \ll 0$, являются "квази" верхне- и нижнетреугольными, т.е.

$$g_{r(l)}^{ii} = 1, \quad g_r^{ij} = 0, \quad \text{если} \quad \rho_i < \rho_j, \qquad g_l^{ij} = 0, \quad \text{если} \quad \rho_i > \rho_j. \tag{1.11}$$

Этот результат проясняет хорошо известный факт, что в случае вещественных экспонент не существует решений Биркгофа уравнения (1.1), имеющих равномерное асимптотическое представление в полуплоскостях $\operatorname{Re} z \gg 0$ и $\operatorname{Re} z \ll 0$.

Решения Ψ_r, Ψ_l могут быть единственным образом нормализованы с помощью условия $g_x^- = 1$. В такой нормировке матрица связи имеет вид

$$S(z) = \Psi_r^{-1}(z)\Psi_l(z) = 1 - \sum_{m=1}^{n} \frac{S_m}{e^{2\pi i(z-z_m)} - 1}\,, \tag{1.12}$$

где

$$S_\infty = 1 + \sum_{m=1}^{n} S_m = g_r^{-1} e^{2\pi i K} g_l, \tag{1.13}$$

и K – диагональная матрица, та же, что и в (2.5) ниже. Насколько известно автору, явный вид (1.12) матрицы связи, включая соотношения (1.11), (1.13), является новым результатом даже в случае регулярно-сингулярных уравнений, в котором $g_{r(l)} = 1$ (ср. с утверждением теоремы 10.8 в [13]).

Прямое преобразование монодромии

$$A(z) \to S(z) \tag{1.14}$$

для случаев регулярно-сингулярных и ручных уравнений строится соответственно в §2 и §3. В разделе 2.2 мы определяем понятие *локальной монодромии* разностного уравнения. Для начала это понятие вводится для трех классов регулярно-сингулярных уравнений. А именно, для случая специальных уравнений, коэффициенты которых $A \in \mathscr{A}_0$ имеют вид (1.2) и удовлетворяют условию $\det A(z) \equiv 1$. Следующим примером уравнений, для которых можно определить понятие локальной монодромии, является случай унитарных уравнений, коэффициенты которых $A \in \mathscr{A}^U$ удовлетворяют соотношению $A^+(\bar{z}) = A^{-1}(z)$. Наиболее важным для дальнейшего является случай малых коэффициентов, т.е. случай уравнений таких, что $|A_m| < \varepsilon$.

Существование канонических решений Ψ_x эквивалентно разрешимости некоторой вспомогательной системы линейных сингулярных уравнений. Индекс соответствующей системы равен

$$\operatorname{ind}_x A = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln \det A, \qquad z \in L\colon \operatorname{Re} z = x. \tag{1.15}$$

Следствием фундаментальных результатов теории сингулярных интегральных уравнений [15] является утверждение о том, что если $\operatorname{ind}_x A = 0$, то в случае общего положения каноническое решение Ψ_x существует.

Если $\det A = 1$, то $\operatorname{ind}_x A$ тождественно равен нулю. Следовательно, для общих уравнений с коэффициентами $A \in \mathscr{A}_0$ канонические решения Ψ_x существуют для любого $x \neq \operatorname{Re} z_k$. Оказывается, что оно не зависит от x, если x меняется в пределах значений $\operatorname{Re} z_k$. Предположим для определенности, что вещественные части полюсов различны и полюсы упорядочены так, что $\operatorname{Re} z_1 < \cdots < \operatorname{Re} z_n$. В этом случае мы получаем набор $n+1$ мероморфных решений $\Psi_k(z)$ уравнения (1.1), которые голоморфны в областях $\operatorname{Re} z_k < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_{k+1} + 1$ (здесь $k = 0, 1, \ldots, n$ и для краткости мы формально полагаем $z_0 = -\infty$ и $z_{n+1} = \infty$).

Локальные матрицы связи $M_k = \Psi_k^{-1} \Psi_{k-1}$ имеют вид

$$M_k = 1 - \frac{m_k}{e^{2\pi i (z - z_k)} - 1}\,. \tag{1.16}$$

Значение M_k в $z = i\infty$ выражается через матрицы переноса g_m вдоль полос Π_x для $\operatorname{Re} z_m < x < \operatorname{Re} z_{m+1}$:

$$\mu_k = 1 + m_k = g_k^{-1} g_{k-1}. \tag{1.17}$$

Матрица μ_k является дискретным аналогом *матрицы монодромии* дифференциального уравнения, соответствующей замкнутому пути из бесконечности $-i\infty$, обходящему полюс z_k.

Матрицы монодромии μ_k однозначно определяют локальные матрицы связи $M_k(z)$ и глобальную матрицу связи (1.12), которая равна произведению локальных матриц:

$$S(z) = M_n(z) \cdots M_1(z). \tag{1.18}$$

Заметим, что любая унимодулярная матрица $S(z)$, $\det S = 1$, вида (1.12) общего положения допускает единственное разложение в произведение (1.18), сомножители M_k которого имеют вид (1.16). Следовательно, в общем положении соответствие $S(z) \leftrightarrow \{\mu_k\}$ является взаимно однозначным.

Во всех трех случаях разностных уравнений, рассматриваемых в разделе 2.2, мы доказываем, что прямое отображение монодромии (1.14) является взаимно однозначным соответствием плотных открытых множеств. Решение обратной задачи монодромии восстановления $A(z)$ по данным монодромии сводится к задаче Римана–Гильберта о факторизации матричных функций, заданных на наборе вертикальных линий. Возможность такого сведения основана на существовании всей совокупности решений $\Psi_l, \Psi_1, \dots, \Psi_r$, области аналитичности которых пересекаются и покрывают всю комплексную плоскость.

Решение обратной задачи монодромии в общем случае дано в третьем параграфе работы. Инъективность прямого отображения монодромии (1.14), ограниченного на подпространство $\mathscr{A}_D$ коэффициентов, имеющих *фиксированный* детерминант,

$$A \in \mathscr{A}_D \subset \mathscr{A}: \quad \det A(z) = D(z) = \frac{\prod_{\alpha=1}^{N}(z-\zeta_\alpha)}{\prod_{m=1}^{n}(z-z_m)^{h_m}}, \quad N = \sum_m h_m, \tag{1.19}$$

в том случае, когда его нули ζ_α не конгруэнтны, непосредственно следует из определения канонических решений. Построение изомонодромных деформаций играет важнейшую роль для построения и описания однозначных ветвей отображения, обратного к (1.14).

Назовем рациональные функции D и D' вида (1.19) эквивалентными, если их полюсы и нули попарно конгруэнтны, т.е. $\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha \in \mathbb{Z}$, $z_m - z'_m \in \mathbb{Z}$. Мы доказываем, что для любой пары эквивалентных функций существует бирациональный изоморфизм $T_D^{D'}\colon \mathscr{A}_D \mapsto \mathscr{A}'_D$, сохраняющий данные монодромии. Следовательно, для того чтобы доказать, что на открытом множестве пространства $\mathscr{S}_{\widehat{D}}$ матриц связи, имеющих фиксированный определитель $\widehat{D} = D(w)$, $w = e^{2\pi i z}$, определено отображение

$$\mathscr{S}_{\widehat{D}} \mapsto \mathscr{A}_D, \tag{1.20}$$

обратное к ограничению (1.14) на $\mathscr{A}_D$, достаточно построить (1.20) для одного представителя D в каждом классе эквивалентности $[D]$.

В каждом классе эквивалентности $[D]$ можно выбрать в качестве представителя функцию D, нули и полюсы которой принадлежат одной полосе вида Π_x. В этом случае канонические мероморфные решения Ψ_l и Ψ_r голоморфны в пересекающихся областях $\operatorname{Re} z < x+1$ и $\operatorname{Re} z > x$. В этом случае задача восстановления $\Psi_{r(l)}$ по матрице связи сводится к стандартной задаче факторизации Римана–Гильберта на прямой $\operatorname{Re} z = x + 1/2$.

В четвертом параграфе работы рассмотрен континуальный предел разностных уравнений. Мы доказываем, что для достаточно малого h канонические мероморфные решения Ψ_x разностного уравнения

$$\Psi(z+h) = \left(1 + hA_0 + h\sum_{m=1}^{n}\frac{A_m}{z-z_m}\right)\Psi(z) \tag{1.21}$$

существуют для любого x такого, что $|x - \operatorname{Re} z_m| > Ch$. Более того, оказывается, что в пределе $h \to 0$ эти решения в окрестности прямой $\operatorname{Re} z = x$ равномерно сходятся к решениям дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Psi}}{dz} = \left(A_0 + \sum_{m=1}^{n}\frac{A_m}{z-z_m}\right)\widehat{\Psi}(z). \tag{1.22}$$

Как следствие, мы получим, что матрицы монодромии μ_k разностного уравнения сходятся к матрицам монодромии дифференциального уравнения. В случае разностных уравнений с вещественными экспонентами матрицы перехода $g_{r(l)}$ сходятся к матрицам Стокса уравнения (1.22) в бесконечности, где это уравнение имеет иррегулярную особенность. Аналогичный результат получен и для случая мнимых экспонент.

В пятом параграфе рассмотрена аналитическая теория разностных уравнений с "эллиптическими" коэффициентами. Точнее, мы рассматриваем уравнения

$$\Psi(z+h)=A(z)\Psi(z), \tag{1.23}$$

коэффициенты $A(z)$ которых являются мероморфными $(r\times r)$-матричными функциями с простыми полюсами, удовлетворяющими следующим свойствам монодромии:

$$A(z+2\omega_\alpha)=B_\alpha A(z)B_\alpha^{-1}, \qquad B_\alpha\in SL_r, \quad \alpha=1,2. \tag{1.24}$$

Соотношения (1.24) означают, что A может рассматриваться как мероморфное сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, где $\mathcal{V}$ является голоморфным векторным расслоением над эллиптической кривой Γ с периодами $2\omega_\alpha$, которое задается парой коммутирующих матриц B_α. Если матрицы B_α диагонализуемы, то без потери общности можно предполагать, что они диагональны. Более того, используя калибровочные преобразования, задаваемые диагональными матрицами вида G^z, можно свести задачу к случаю единичной матрицы B_1. Представим матрицу B_2 в такой калибровке в виде $B_2=e^{\pi i\hat q/\omega_1}$, где $\hat q$ – диагональная матрица.

Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{Im}(\omega_2/h)>0$. Аналогично рациональному случаю мы строим канонические мероморфные решения Ψ_x уравнения (1.23). Они удовлетворяют следующим *блоховским* свойствам монодромии:

$$\Psi_x(z+2\omega_2)=e^{\pi i\hat q/\omega_1}\Psi_x(z)e^{-2\pi i\hat s/h}, \tag{1.25}$$

где $\hat s$ – диагональная матрица, $\hat s^{ij}=s_i\delta^{ij}$. Матрица связи S_x двух таких решений $\Psi_x(z)$ и $\Psi_{x+1}(z)=\Psi_x(z-2\omega_1)$, т.е.

$$\Psi_x(z)=\Psi_x(z-2\omega_1)S_x(z), \tag{1.26}$$

удовлетворяет соотношениям

$$S_x(z+h)=S_x(z), \qquad S_x(z+2\omega_2)=e^{2\pi i\hat s/h}S_x(z)e^{-2\pi i\hat s/h} \tag{1.27}$$

и может рассматриваться как сечение расслоения над эллиптической кривой с периодами $(h,2\omega_2)$.

Соответствие $A(z)\to S_x(z)$ и является прямым отображением монодромии в эллиптическом случае. Как и в рациональном случае, однозначная ветвь обратного отображения монодромии может быть определена в случае коэффициентов с фиксированным определителем. Изомонодромные преобразования, меняющие положения нулей и полюсов определителя A, строятся почти идентично рациональному случаю. Мы показываем, что в эллиптическом случае существует принципиально новый тип изомонодромных преобразований, которые *изменяют периоды* эллиптической кривой. Эти отображения имеют вид

$$A'(z) = \mathscr{R}(z+h)A(z)\mathscr{R}^{-1}(z) \tag{1.28}$$

и задаются мероморфными решениями $\mathscr{R}$ разностного уравнения

$$\mathscr{R}(z+2\omega_1+h)A(z) = \mathscr{R}(z), \tag{1.29}$$

удовлетворяющими блоховским свойствам монодромии

$$\mathscr{R}(z+2\omega_2) = e^{2\pi i\hat{q}'/(h+2\omega_1)}\mathscr{R}(z)e^{-\pi i\hat{q}/\omega_1}. \tag{1.30}$$

Существование таких преобразований указывает на то, что в эллиптическом случае имеется определенная симметрия между периодами $2\omega_\alpha$ эллиптической кривой и шагом h разностного уравнения. Отметим, что подобная симметрия при рассмотрении q-аналога эллиптических уравнений Бернара–Книжника–Замолодчикова была обнаружена в работе [16].

§ 2. Мероморфные решения разностных уравнений и задача Римана–Гильберта

Решение матричного дифференциального уравнения $\partial_z\Psi = A(z)\Psi$ с рациональными коэффициентами является многозначной голоморфной функцией на комплексной плоскости с проколами $\mathbb{C}\setminus\{z_m\}$ в полюсах z_m коэффициентов $A(z)$ уравнения. Начальное условие $\Psi(z_0)=1$, $z_0\ne z_m$, однозначно определяет Ψ в окрестности z_0. Этот простой, но фундаментальный факт лежит в основе аналитической теории дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Аналитическое продолжение Ψ вдоль путей в $C\setminus\{z_m\}$ определяет представление монодромии $\mu\colon \pi_1(C\setminus\{z_m\})\mapsto GL_r$.

Построение мероморфных решений разностных уравнений менее очевидно. Оно может быть сведено к решению вспомогательной задачи Римана–Гильберта.

Задача I. *Найти в полосе* Π_x: $x\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant x+1$ *непрерывную функцию* $\Phi(z)$, *которая мероморфна внутри* Π_x *и такова, что ее граничные значения на двух границах полосы удовлетворяют соотношению*

$$\Phi^+(\xi+1) = A(\xi)\Phi^-(\xi), \qquad \xi = x+iy. \tag{2.1}$$

Каждое решение Φ такой задачи может быть продолжено с помощью уравнения (1.1) до функции Ψ, определенной на всей комплексной плоскости. Априори Ψ является мероморфной функцией вне прямых $\operatorname{Re} z = x+l$, $l\in\mathbb{Z}$. В силу (2.1) функция Ψ является непрерывной на этих прямых. Напомним хорошо известное свойство аналитических функций: если f непрерывна в некоторой области и голоморфна в дополнении $D\setminus L$ гладкой дуги L, то f голоморфна в D. Следовательно, Ψ является мероморфной матричной функцией во всей комплексной плоскости и является, по построению, мероморфным решением уравнения (1.1).

Функция $t = \operatorname{tg}(\pi z)$ определяет взаимно однозначное конформное отображение внутренности полосы Π_x на комплексную плоскость переменной t с разрезом между точками $t = \pm 1$. При этом отображении задача (2.1) переходит в стандартную задачу факторизации Римана–Гильберта на разрезе. Фундаментальные результаты теории сингулярных интегральных уравнений гласят, что задача (2.1) всегда разрешима. Более того, если индекс (1.15) соответствующей системы равен нулю, то для матриц $A(z)$ общего положения эта задача имеет невырожденное *секционно-голоморфное* решение. Последнее означает, что существует константа $\alpha < 1$ такая, что $(t \pm 1)^\alpha \Phi(t)$ ограничено в концевых точках разреза. В терминах переменной z секционно-голоморфное решение Φ_x задачи I является невырожденной голоморфной внутри Π_x матричной функцией, рост которой в бесконечности ограничен следующим образом:

$$\exists\, 0 \leqslant \alpha < 1, \ \ |\Phi(z)| < e^{2\pi\alpha|\operatorname{Im} z|}, \ \ |\operatorname{Im} z| \to \infty. \tag{2.2}$$

Такое решение единственно с точностью до нормировки $\Phi'(z) = \Phi(z)g$, $g \in SL_r$.

Практически все результаты настоящего параграфа не требуют никакой дополнительной информации. Приведем детали, необходимые для подробного описания асимптотического поведения Ψ_x.

2.1. Регулярно-сингулярные уравнения. Мы начнем наше рассмотрение со случая регулярно-сингулярных разностных уравнений, т.е. уравнений (1.1) с коэффициентами $A(z)$ вида

$$A = 1 + \sum_{i=m}^{n} \frac{A_m}{z - z_m}\,. \tag{2.3}$$

Уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразований $A' = gAg^{-1}$, $\Psi' = g\Psi$, $g \in SL_r$. Следовательно, если вычет Adz в бесконечности диагонализуем, то без ограничения общности мы можем полагать, что

$$K = \operatorname{res}_\infty Adz = \sum_{m=1}^{n} A_m = \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_r). \tag{2.4}$$

Если $k_i - k_j \notin \mathbb{Z}$, то существует единственное формальное решение уравнения (1.1) вида

$$Y = \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s z^{-s}\right) z^K. \tag{2.5}$$

Коэффициенты χ_s формального решения определяются из системы уравнений, которая получается простой подстановкой (2.5) в (1.1). Эти уравнения выражают $[K, \chi_s] + s\chi_s$ в терминах A_i и $\chi_1, \dots, \chi_{s-1}$ и позволяют рекуррентным образом найти все коэффициенты χ_s.

Обозначим через $\mathscr{P}_x$ пространство непрерывных в полосе Π_x функций $\Phi(z)$, которые голоморфны внутри полосы и имеют не более чем полиномиальный рост в бесконечности, т.е.

$$\Phi \in \mathscr{P}_x\colon \ \exists N, \ \ |\Phi| < |z|^N, \ \ z \in \Pi_x. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. (a) *Если* $|x| \gg 0$, *то задача Римана–Гильберта* (2.1) *всегда имеет решение* Φ_x, *принадлежащее* $\mathscr{P}_x$. *Это решение единственно с точностью до нормировки.*

(b) *Для матрицы* $A(z)$ *общего положения решение* $\Phi_x \in \mathscr{P}_x$ *существует и единственно с точностью до нормализации для всех* x *таких, что* $\operatorname{ind}_x A = 0$.

(c) *Решение* Φ_x *задачи Римана–Гильберта асимптотически равно*

$$\Phi_x(z) = Y(z) g_x^{\pm}, \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty. \tag{2.7}$$

Замечание. Утверждение (c) означает, что если $Y_{m'} = \left(1 + \sum_{s=1}^{m'} \chi_s z^{-s}\right) z^K$ является частной суммой формального ряда (2.5), то

$$|\Phi_x (Y_{m'} g_x^{\pm})^{-1} - 1| \leqslant O(|z|^{-m'-1}), \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty. \tag{2.8}$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ оценка (2.8) является равномерной в области $z \in \Pi_{x,\varepsilon}$: $x + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x + 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что если решение Φ_x существует, то оно единственно. Определитель Φ_x является функцией, голоморфной внутри Π_x. Ее граничные значения удовлетворяют соотношению: $\ln\det \Phi_x^+(\xi + 1) = \ln\det \Phi_x^-(\xi) + \ln\det A(\xi)$. Если $\operatorname{ind}_x A = 0$, то интеграл $(d \ln\det \Phi_x)$ вдоль границы Π_x равен нулю. Следовательно, если Φ_x невырождена по крайней мере в одной точке, то она невырождена всюду в Π_x. Предположим, что имеются два решения задачи факторизации. Тогда их отношение $g = \Phi_x^{-1} \Phi_x'$ является целой периодической матричной функцией, которая, рассматриваемая как функция $g(w)$ переменной $w = e^{2\pi i z}$, является голоморфной вне точек $w = 0$, $w = \infty$. Из (2.6) следует, что

$$\lim_{w\to 0} w g(w) = 0, \qquad \lim_{w\to\infty} w^{-1} g(w) = 0. \tag{2.9}$$

Следовательно, $g(w)$ допускает продолжение, которое голоморфно в точках $w = 0$ и $w = \infty$. Значит, $g(w)$ является постоянной матрицей.

Стандартным образом построение решений задачи факторизации (2.1) сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Зафиксируем целое m и обозначим через Y_m голоморфную в Π_x функцию, которая в обеих бесконечностях $\pm i\infty$ полосы совпадает с Y с точностью до m-го порядка. Если $0 \notin \Pi_x$, то в качестве Y_m можно взять m-ю частную сумму ряда (2.5). Если $0 \in \Pi_x$, то мы зафиксируем $x_0 \notin \Pi_x$ и возьмем Y_m в виде

$$Y_m = \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\chi}_s (z - x_0)^{-s}\right)(z - x_0)^K, \tag{2.10}$$

где коэффициенты $\widetilde{\chi}_s$ однозначно определяются из сравнения

$$\left(1 + \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\chi}_s (z - x_0)^{-s}\right)\left(\frac{z - x_0}{z}\right)^K \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \chi_s z^{-s}\right)^{-1} = 1 + O(z^{-m-1}). \tag{2.11}$$

Любая секционно-голоморфная в Π_x функция может быть представлена с помощью интеграла типа Коши. Рассмотрим функцию Φ_x, задаваемую формулой

$$\Phi_x = Y_m \phi, \qquad \phi = 1 + \int_L \varphi(\xi) k(z,\xi)\, d\xi, \tag{2.12}$$

в которой интеграл берется вдоль прямой L_x: $\operatorname{Re}\xi = x$, а ядро интеграла равно

$$k(z,\xi) = \frac{e^{\pi i(z-x)} + e^{-\pi i(z-x)}}{(e^{\pi i(\xi-x)} + e^{-\pi i(\xi-x)})(e^{\pi i(\xi-z)} - e^{-\pi i(\xi-z)})}\,. \tag{2.13}$$

Обозначим через H пространство гёльдеровских функций на L_x таких, что

$$\varphi \in H\colon\ \exists\, \alpha < 1,\ |\varphi(\xi)| < O(e^{\pi\alpha|\operatorname{Im}\xi|}). \tag{2.14}$$

Если $\varphi \in H$, то интеграл в (2.12) сходится и определяет функцию ϕ, которая голоморфна внутри Π_x и непрерывна вплоть до границы. Ее граничные значения $\phi^{\pm}$ даются формулами Сохоцкого–Племеля:

$$\phi^-(\xi) = 1 + I_\varphi(\xi) - \frac{\varphi(\xi)}{2}\,, \qquad \phi^+(\xi+1) = 1 + I_\varphi(\xi) + \frac{\varphi(\xi)}{2}\,, \tag{2.15}$$

где $I_\varphi(\xi)$ обозначает главное значение интеграла

$$I_\varphi(\xi) = \mathrm{p.v.}\int_L \varphi(\xi') k(\xi,\xi')\, d\xi'. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.1) эквивалентно следующему неоднородному сингулярному интегральному уравнению:

$$(\widetilde{A}+1)\,\varphi - 2(\widetilde{A}-1)I_\varphi = 2(\widetilde{A}-1), \tag{2.17}$$

где

$$\widetilde{A} = Y_m(\xi+1)^{-1}A(\xi)Y_m(\xi). \tag{2.18}$$

По определению Y_m для больших $|z|$ мы имеем

$$|\widetilde{A}(\xi) - 1| \leqslant O(|\xi|^{-m+\kappa}), \qquad \kappa = \max_{ij}|k_i - k_j|. \tag{2.19}$$

Для больших $|x|$ левая часть неравенства (2.19) равномерно ограничена выражением $O(|x|^{-m+\kappa})$ и уравнение (2.17) может быть решено с помощью итераций.

Рассмотрим последовательность функций φ_n, определяемых рекуррентно с помощью равенств

$$(\widetilde{A}+1)\,\varphi_n - 2(\widetilde{A}-1)I_{\varphi_{n-1}} = 2(\widetilde{A}-1), \tag{2.20}$$

в которых мы полагаем $\varphi_0 = 0$. Для $n > 0$ из уравнения (2.20) следует

$$(\widetilde{A}+1)(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = 2(\widetilde{A}-1)I_{(\varphi_n - \varphi_{n-1})}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что если норма $(\widetilde{A}-1)$ достаточно мала, то $|\varphi_{n+1}-\varphi_n| < c\,\varepsilon^n$, $\varepsilon < 1$. В таком случае последовательность φ_n, очевидно, сходится к непрерывной функции φ, которая удовлетворяет уравнению (2.17). Стандартные аргументы теории граничных задач (см. детали в [15]) доказывают, что тогда φ является функцией класса Гёльдера, что доказывает первое утверждение теоремы.

При любом x левая часть уравнения (2.17) является сингулярным интегральным оператором $K\colon H \mapsto H$. Этот оператор допускает фредгольмову регуляризацию. Неоднородное уравнение (2.17) разрешимо всегда, если сопряженное однородное уравнение

$$f(\xi)(\widetilde{A}(\xi)+1) - 2\biggl(\text{p.v.}\int_L f(\xi')k(\xi',\xi)\,d\xi'\biggr)(\widetilde{A}(\xi)-1) = 0 \tag{2.22}$$

на вектор-строку $f \in H_0$ не имеет решений (см. [15; §53]). Здесь H_0 – пространство гёльдеровских *интегрируемых* на L_x функций. Каждое решение уравнения (2.22) определяет вектор-строку

$$F(z) = \cos^2(\pi(z-x))\biggl(\int_L f(\xi)k(\xi,z)\,d\xi\biggr)Y_m^{-1}(z), \tag{2.23}$$

которая является решением двойственной задачи Римана–Гильберта в Π_x

$$F(\xi+1)A(\xi) = F(\xi), \qquad \xi \in L. \tag{2.24}$$

Ядро Коши $k(\xi,z)$ имеет простой полюс в точке $x' = x+1/2$. Следовательно, функция F голоморфна во внутренности Π_x и равна нулю в точке x', $F(x')=0$. Она ограничена при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$. Несуществование таких решений является условием открытого типа, что доказывает второе утверждение леммы.

Из (2.17), (2.19) следует, что I_φ ограничен в бесконечности. Кроме того, мы имеем также $|\varphi(\xi)| < O(|\xi|^{-m+\kappa})$. Покажем, что для $z \in \Pi_{x,\varepsilon}$

$$\phi(z) = g^{\pm} + O(|z|^{-m+\kappa+1}), \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty, \tag{2.25}$$

где

$$g^{\pm} = 1 - \frac{1}{2}\int_L (\operatorname{tg}(\pi i(\xi-x)) \pm 1)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{2.26}$$

Рассмотрим случай $\operatorname{Im} z \to \infty$. Интеграл в (2.12) может быть представлен в виде суммы двух интегралов I_1 и I_2. Первый соответствует интегрированию вдоль интервала L_1: $(x-i\infty,\xi_0)$, а второй – интегрированию вдоль дополнительного интервала L_2: $(\xi_0, x+i\infty)$, где $\xi_0 = x + i\operatorname{Im} z/2$. Ядро Коши равномерно ограничено, $k(z,\xi) < C$, в области $\Pi_{x,\varepsilon}$. Следовательно,

$$|I_2| < C\int_{L_2} |\varphi(\xi)|\,d\xi < O(|z|^{-m+\kappa+1}). \tag{2.27}$$

Для $\xi \in L_1$ имеем $|\xi - z| > \operatorname{Im} z/2$, что влечет

$$k(z,\xi) = k_+(\xi)(1+O(e^{-\pi|z|})), \quad k_+(\xi) = (1-\operatorname{tg}(\pi i(\xi-x))), \quad \xi \in L_1. \tag{2.28}$$

Отсюда получаем

$$|I_2+1-g^+| < \left|\int_{L_2} k_+(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right| + O(e^{-\pi|z|})\int_L k_+(\xi)\,|\varphi(\xi)|\,d\xi < O(|z|^{-m+\kappa+1}). \tag{2.29}$$

Аналогичным образом доказывается (2.25) для случая $\operatorname{Im} z \to -\infty$.

Как было показано ранее, если решение задачи факторизации существует, то оно единственно. Значит, левая часть (2.12) не зависит от m. Из (2.25) следует, что неравенство (2.8) выполняется при $m' < m - 2\kappa$. Устремляя теперь m к бесконечности, мы получаем, что (2.8) выполняется при любых значениях m', что завершает доказательство леммы.

Теорема 2.1. *Пусть $A_0 = 1$ и $k_i - k_j \notin \mathbb{Z}$. Тогда*:

(A) *существуют и единственны мероморфные решения Ψ_l и Ψ_r уравнения* (1.1), *которые невырождены, голоморфны и асимптотически равны $Y(z)$ в областях $\operatorname{Re} z \ll 0$ и $\operatorname{Re} z \gg 0$ соответственно*[1];

(B) *матрица $S = \Psi_l^{-1}\Psi_r$ имеет вид*

$$S(z) = 1 - \sum_{m=1}^{n} \frac{S_m}{e^{2\pi i(z-z_m)}-1}, \qquad S_\infty = 1 + \sum_{m=1}^{n} S_m = e^{2\pi i K}. \tag{2.30}$$

Первое утверждение теоремы и вид матрицы связи $S(z)$ известны (см. теорему 10.8 в [13]). Автору не удалось найти в литературе явный вид матрицы S_∞. Для регулярных уравнений ($K = 0$) Биркгофом было доказано, что $S_\infty = 1$. Для случая регулярно-сингулярных уравнений в [13] утверждается лишь, что матрица S_∞ невырождена.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, каждое решение Φ_x задачи факторизации определяет мероморфное решение Ψ_x разностного уравнения (1.1).

Лемма 2.2. *Предположим, что задача факторизации* (2.1) *разрешима для пары вещественных чисел $x < y$. Тогда матрица связи $M_{x,y} = \Psi_y^{-1}\Psi_x$ двух соответствующих решений разностного уравнения имеет вид*

$$M_{x,y} = 1 - \sum_{k \in J_{x,y}} \frac{m_{k,(x,y)}}{e^{2\pi i(z-z_k)}-1}, \tag{2.31}$$

где сумма берется по подмножеству индексов $J_{x,y}$, соответствующему полюсам таким, что $x < \operatorname{Re} z_k < y$.

Доказательство. По определению функция Ψ_x голоморфна в Π_x. В области $\operatorname{Re} z > x+1$ она по построению имеет полюсы в точках $z_k + l$, $l = 1, 2, \ldots$, для $\operatorname{Re} z_k > x$. Следовательно, $M_{x,y}$ в полосе Π_y имеет полюсы в точках, конгруэнтных полюсам z_k, $k \in J_{xy}$. Функция $M_{x,y}$ периодична по z. Аргументы, идентичные тем, которые использовались выше при доказательстве единственности Φ_x, показывают, что $M_{x,y}(w)$, рассматриваемая как функция переменной $w = e^{2\pi i z}$, допускает голоморфное продолжение в точки $w = 0$, $w = \infty$. Следовательно, $M_{x,y}(w)$ является рациональной функцией переменной w. Она равна 1 при $w = 0$ и имеет полюсы в точках $w_k = e^{2\pi i z_k}$, $k \in J_{xy}$. Следовательно, $M_{x,y}$ представима в виде (2.31).

[1] В асимптотических равенствах $\Psi_{r(l)} = Y$ предполагается выбор однозначной ветви $\ln z$ на $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $\arg z = \pi/2$.

Замечание. Приведенное доказательство леммы одновременно демонстрирует, что существование Φ_x для общих A и x таких, что $\operatorname{ind}_x A = 0$, является простым следствием существования Ψ_l. Действительно, рассмотрим функцию M_x вида (2.31), где сумма берется по всем z_k таким, что $\operatorname{Re} z_k < x$. Условие, что функция $\Psi_x = \Psi_l M_x^{-1}$ голоморфна в Π_x, эквивалентно системе алгебраических уравнений на вычеты M_x. Если $\operatorname{ind}_x A = 0$, то число уравнений равно числу неизвестных, и в общем положении канонические мероморфные решения Ψ_x всегда существуют.

Следствием леммы является утверждение, что Ψ_x локально постоянно по переменной x. В частности, Ψ_x не зависит от x в интервале $x < \min_k\{\operatorname{Re} z_k\}$. Соответствующая функция Ψ_l является единственным мероморфным решением уравнения (1.1), которое голоморфно в области $\operatorname{Re} z \ll 0$, где оно асимптотически равно Y при $\operatorname{Im} z \to -\infty$ и асимптотически равно $Y g_l$, когда $\operatorname{Im} z \to \infty$. При больших $|x|$ коэффициент $(\widetilde{A} - 1)$ в уравнении (2.17) равномерно ограничен. Следовательно, решение φ уравнения, которое убывает как $|\varphi(\xi)| < O(|\xi|^{-m+k})$ на двух концах прямой L, равномерно ограничено величиной порядка $O(|x|^{-m+k})$. В этом случае из (2.26) следует, что $g_x^{\pm} = 1 + O(|x|^{-m+k})$. Матрица $g_l = g_x^+(g_x^-)^{-1}$ не зависит от x. Следовательно, $g_l = 1$ и Ψ_l асимптотически равно Y в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ll 0$. Аналогичным образом доказывается, что Ψ_x при $x \gg 0$ может быть отождествлена с Ψ_r. Утверждение (A) теоремы доказано.

Формула (2.30) является частным случаем формулы (2.31). Для доказательства утверждения (B) достаточно напомнить, что в определении Y необходимо задать однозначную ветвь $\ln z$. В наших рассмотрениях предполагалось, что она была фиксирована выбором на плоскости переменной z разреза вдоль положительной части мнимой оси. В этом случае значение матрицы связи S в $-i\infty$ равно 1, а ее значение в $i\infty$ равно отношению z^K на двух берегах разреза.

2.2. Локальные монодромии. Необходимым условием существования решения Φ_x граничной задачи (2.1) является равенство $\operatorname{ind}_x A = 0$. Если это условие выполнено при всех x, то можно определить понятие локальных монодромий разностного уравнения (1.1).

Специальные регулярно-сингулярные уравнения. Назовем регулярно-сингулярное уравнение (1.1) *специальным*, если вычеты A_m матричной функции $A(z)$ имеют ранг 1,

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k q_k^T}{z - z_k}, \tag{2.32}$$

и определитель A равен тождественно 1, $\det A(z) = 1$. Здесь p_k, q_k являются r-мерными векторами, рассматриваемыми с точностью до преобразований

$$p_k \to c_k p_k, \qquad q_k \to c_k^{-1} q_k, \tag{2.33}$$

где c_k – скаляры. Размерность пространства $\mathscr{A}_0$ таких матриц равна $2N(r-2)$. Явная параметризация открытого множества пространства $\mathscr{A}_0$ может быть получена, если упорядочить полюсы и представить $A(z)$ в мультипликативной форме

$$A(z) \in \mathscr{A}_0\colon \quad A(z) = \left(1 + \frac{a_n b_n^T}{z - z_n}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_1 b_1^T}{z - z_1}\right), \tag{2.34}$$

где a_k, b_k – пары ортогональных векторов,

$$b_k^T a_k = 0, \tag{2.35}$$

рассматриваемых с точностью до преобразований (2.33). Из равенств (2.35) следует, что

$$\left(1 + \frac{a_k b_k^T}{z - z_k}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{a_k b_k^T}{z - z_k}\right) \mapsto \det\left(1 + \frac{a_k b_k^T}{z - z_k}\right) = 1. \tag{2.36}$$

Из (2.34), (2.35) следует, что параметры p_j, q_j в аддитивном представлении (2.32) матричной функции A удовлетворяют соотношениям

$$q_k^T l_k^{-1} p_k = 0, \qquad l_k = 1 + \sum_{m \neq k}^{N} \frac{p_m q_m^T}{z_k - z_m}\,. \tag{2.37}$$

Для матриц $A \in \mathscr{A}_0$ калибровочное условие (2.4) имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} p_m q_m^T = \sum_{m=1}^{n} a_m b_m^T = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_r) = K. \tag{2.38}$$

В пределах этого раздела предполагается, что вещественные части полюсов $r_k = \operatorname{Re} z_k$ различны и упорядочены: $r_k < r_m$, $k < m$. Для краткости мы используем обозначения $r_0 = -\infty$, $r_{n+1} = \infty$.

Теорема 2.2. (i) *Для матриц $A \in \mathscr{A}_0$ общего положения, удовлетворяющих (2.38), где $k_i - k_j \notin \mathbb{Z}$, соответствующее специальное регулярно-сингулярное уравнение (1.1) имеет единственный набор мероморфных решений Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, которые голоморфны в полосах $r_k < \operatorname{Re} z < r_{k+1} + 1$ и которые в этих полосах асимптотически равны $Y g_k^{\pm}$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, где $g_k^- = 1$.*

(ii) *Локальные матрицы связи $M_k = \Psi_k^{-1} \Psi_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, имеют вид*

$$M_k = 1 - \frac{\alpha_k \beta_k^T}{e^{2\pi i (z - z_k)} - 1}\,, \tag{2.39}$$

где пары ортогональных векторов (α_k, β_k),

$$\beta_k^T \alpha_k = 0, \tag{2.40}$$

рассматриваемых с точностью до преобразований (2.33), удовлетворяют соотношению

$$(1 + \alpha_n \beta_n^T) \cdots (1 + \alpha_1 \beta_1^T) = e^{2\pi i K}. \tag{2.41}$$

(iii) *Отображение пар ортогональных векторов $\{a_m, b_m\} \mapsto \{\alpha_k, \beta_k\}$, рассматриваемых с точностью до преобразований (2.33), является взаимно однозначным соответствием открытых множеств многообразий, заданных соотношениями (2.35), (2.38) и (2.40), (2.41) соответственно.*

Доказательство. Как было доказано выше, решение $\Phi_x \in \mathscr{P}_x$ задачи факторизации (2.1) существует, если однородное сингулярное интегральное уравнение (2.22) не имеет решений. Это условие открытого типа. Следовательно, для фиксированного x и матрицы A соответствующее мероморфное решение Ψ_x уравнения (1.1) существует. Если $r_k < x < r_{k+1}$, то из (1.1) следует, что Ψ_x имеет полюсы в точках $z_m + l$, $m = 1, 2, \dots$, при $k < m$ и в точках $z_m - l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, при $m \leqslant k$. Следовательно, Ψ_x голоморфно в полосе $r_k < \operatorname{Re} z < r_{k+1} + 1$ и может рассматриваться как одно из искомых решений Ψ_k. Решения Ψ_k существуют при всех k, если A принадлежит пересечению конечного числа открытых множеств. Это по-прежнему условие открытого типа. Значит, полный набор решений Ψ_k для матриц A общего положения существует. Эти решения единственны и имеют асимптотику, описанную в первом утверждении (i) теоремы.

Вычеты $A(z)$ являются матрицами ранга 1. Следовательно, вычет M_k в точке z_k также является матрицей ранга 1 и, значит, может быть представлен в виде $\alpha_k \beta_k^T$. Из (2.31) следует (2.39). Условие $\det A = 1$ и нормировка $g_k^- = 1$ влекут за собой равенство $\det \Psi_k = 1$. Следовательно, $\det M_k = 1$, что эквивалентно (2.40). Глобальная матрица связи является произведением локальных матриц, $S = M_n \cdots M_1$. Поэтому из (2.30) следует (2.41). Второе утверждение теоремы доказано.

Докажем теперь инъективность определенного на открытом множестве $\mathscr{A}_0$ отображения $\{a_m, b_m\} \mapsto \{\alpha_k, \beta_k\}$. Действительно, предположим, что существуют два специальных сингулярно-регулярных уравнения, имеющих один и тот же набор локальных матриц связи. Канонические решения Ψ_k и Ψ'_k этих уравнений голоморфны в полосах $\operatorname{Re} z \in (r_k, r_{k+1} + 1)$ и асимптотически равны $O(1) z^K g_k^{\pm}$, $g_k^- = 1$, при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$. Заметим, что матрицы перехода g_k^+ в обоих случаях совпадают, поскольку они равны произведениям *матриц монодромии* $\mu_k = 1 + \alpha_k \beta_k^T$:

$$g_0^+ = 1, \quad g_k^+ = \mu_{k-1} \cdots \mu_1, \quad k > 1. \tag{2.42}$$

Матричная функция, равная $\Psi'_k \Psi_k^{-1}$ в каждой из полос, непрерывна на границах полос. Следовательно, она является ограниченной в бесконечности целой функцией. Она стремится к 1 при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. Следовательно, она тождественно равна единичной матрице 1.

Доказательство сюръективности отображения $\{a_m, b_m\} \mapsto \{\alpha_k, \beta_k\}$ на открытое подмножество пространства матриц связи сводится к задаче Римана–Гильберта. Зафиксируем достаточно малое число ε. Прямые L_m: $\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re} z_m + \varepsilon$ разделяют плоскость на $n+1$ областей $\mathscr{D}_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Задача II. *Для заданного набора матричных функций $\mathscr{M}_j(\xi)$ на прямых L_m найти голоморфные в $\mathscr{D}_k$ матричные функции $\mathscr{X}_k(z)$, которые непрерывны вплоть до границы и граничные значения которых удовлетворяют соотношениям*

$$\mathscr{X}_{k-1}^+(\xi) = \mathscr{X}_k^-(\xi) \mathscr{M}_k(\xi), \qquad \xi \in L_k. \tag{2.43}$$

Рассмотрим произвольный набор матриц M_k вида (2.39), удовлетворяющих соотношениям (2.40), (2.41). Задача II для случая набора кусочно-постоянных матриц

$$\mathscr{M}_k^0(\xi) = 1, \quad \operatorname{Im}\xi \geqslant 0, \qquad \mathscr{M}_k^0(\xi) = \mu_k, \quad \operatorname{Im}\xi < 0, \tag{2.44}$$

была исследована Племелем, который показал, что если по крайней мере одна из матриц диагонализуема, то решение задачи существует [17]. Обозначим через $\mathscr{F}_k$ решения этой вспомогательной проблемы. Определим с их помощью новый набор функций $\mathscr{M}_j(\xi)$ с помощью формулы

$$\mathscr{M}_k = \mathscr{F}_j^+ M_k (\mathscr{F}_k^-)^{-1}. \tag{2.45}$$

Функция M_k стремится к μ_k при $\operatorname{Im} z \to \infty$ экспоненциально. Следовательно, $\mathscr{M}_k \to 1$ на обоих концах L_k. В этом случае решение соответствующей задачи факторизации (2.43) может быть представлено в виде интеграла типа Коши

$$\mathscr{X}(z) = 1 + \sum_k \int_{L_k} \frac{\chi_k(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{2.46}$$

Внутри каждой из областей $\mathscr{D}_k$ формула (2.46) определяет голоморфные функции $\mathscr{X}_k$. Следствием формул Племеля–Сохоцкого для их граничных значений является система сингулярных интегральных уравнений для определения χ_k

$$\frac{1}{2}\chi_k(\xi)(\mathscr{M}_k(\xi) + 1) - \frac{1}{2\pi i} I_\chi(\xi)(\mathscr{M}_k(\xi) - 1) = (\mathscr{M}_k(\xi) - 1), \tag{2.47}$$

где $I_\chi(\xi)$ обозначает главное значение интеграла,

$$I_\chi(\xi) = \text{p.v.} \sum_k \int_{L_k} \frac{\chi_k(\xi')\, d\xi'}{\xi' - \xi}. \tag{2.48}$$

Неоднородный член системы стремится к нулю в бесконечности. Следовательно, для набора матриц M_k общего положения система уравнений имеет решение в пространстве гёльдеровских функций, убывающих на бесконечности. Соответствующие функции $\mathscr{X}_k$ на бесконечности стремятся к единичной матрице. Функции $\mathscr{F}_k$ имеют асимптотику $O(1)z^K g_k^\pm$. Значит, функции $\Psi_k = \mathscr{X}_k \mathscr{F}_k$ имеют ту же самую асимптотику. Их граничные значения удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{k-1}^+(\xi) = \Psi_k^-(\xi) M_k(\xi), \qquad \xi \in L_k, \tag{2.49}$$

которое может быть использовано для мероморфного продолжения Ψ_k на всю комплексную плоскость. Следствием этого же самого уравнения является то, что функция $A_k(z) = \Psi_k(z+1)\Psi_k^{-1}(z)$ на самом деле не зависит от k. В области $\mathscr{D}_k$ она имеет единственный полюс в точке z_k. Значит, $A(z)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами ранга 1 в точках z_k. Она стремится к единичной матрице в бесконечности, и ее определитель равен $\det A = 1$, т.е. $A \in \mathscr{A}_0$. Теорема доказана.

Унитарные разностные уравнения. Как неоднократно подчеркивалось выше, для заданного вещественного x каноническое мероморфное решение Ψ_x существует лишь в случае общего положения. В этом пункте мы приводим пример уравнений, для которых канонические мероморфные решения *существуют всегда*.

Назовем разностное уравнение унитарным, если его коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$A(z) \in \mathscr{A}^U: \quad A^+(\bar z) = A^{-1}(z), \tag{2.50}$$

где A^+ обозначает матрицу, эрмитово сопряженную A. Открытое пространство таких матриц с вычетами ранга 1 может быть параметризовано наборами единичных векторов a_k:

$$A(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+a_k a_k^+\frac{z_k-\bar z_k}{z-z_k}\right),\qquad a_k^+a_k=|a_k|^2=1. \tag{2.51}$$

Сомножители в произведении (2.51) упорядочены так, что индексы растут справа налево. Напомним, что в этом параграфе мы предполагаем, что вычет A в бесконечности является диагональной матрицей:

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k-\bar z_k)a_k a_k^+=K,\qquad K^{ij}=k_i\delta^{ij},\quad k_i-k_j\notin\mathbb{Z}. \tag{2.52}$$

Из (2.50) вытекает равенство $\overline{\det A(\bar z)}=\det A^{-1}(z)$. Следовательно, для любого $x\neq\operatorname{Re}z_k$ индекс задачи факторизации (2.1) равен нулю, $\operatorname{ind}_x A=0$.

Лемма 2.3. *Пусть $A(z)$ является коэффициентом регулярно-сингулярного унитарного уравнения. Тогда для каждого $x\neq\operatorname{Re}z_k$ краевая задача* (2.1) *имеет невырожденное голоморфное решение $\widetilde\Phi_x\in\mathscr{P}_x$ такое, что*

$$\widetilde\Phi_x^+(\bar z)=\widetilde\Phi_x^{-1}(z). \tag{2.53}$$

Это решение единственно с точностью до унитарного преобразования

$$\widetilde\Phi_x'(z)=\widetilde\Phi_x(z)u,\qquad u\in U(r). \tag{2.54}$$

Доказательство. Как было показано выше, задача Римана–Гильберта (2.1) имеет решение $\Phi\in P_x$, если не существует векторного решения двойственной задачи (2.24), которое ограничено в окрестности $-i\infty$ и на другом конце полосы стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени $\operatorname{Im}z$. Предположим, что такое решение F существует. Тогда скалярная функция $F(z)F^+(\bar z)$ голоморфна в Π_x и стремится к нулю на обоих концах полосы. Значит, ее интеграл по границе верхней половины Π_x^+ полосы Π_x равен нулю:

$$\oint_{\partial\Pi_x^+}F(z)F^+(\bar z)\,dz=0,\qquad z\in\Pi_x^+\subset\Pi_x\colon\quad \operatorname{Im}z\geqslant 0. \tag{2.55}$$

С другой стороны, из (2.50) следует, что эта функция периодична. Следовательно, интеграл (2.55) равен интегралу по нижней границе Π_x^+:

$$\oint_{\partial\Pi_x^+}F(z)F^+(\bar z)\,dz=\int_x^{x+1}|F(x')|^2\,dx'>0. \tag{2.56}$$

Противоречие между (2.55) и (2.56) доказывает, что решение Φ_x существует. Как было доказано выше, оно единственно с точностью до нормировки. Зафиксируем эту нормировку условием, что Φ_x имеет асимптотику Y при $\operatorname{Im}z\to-\infty$. При этом на другом конце полосы оно имеет асимптотику Yg_x (в этом пункте мы избегаем обозначений $g_x^{\pm}$ для того, чтобы избежать путаницы, связанной с использованием знака эрмитова сопряжения).

Докажем, что матрица g_x является положительно определенной эрмитовой матрицей. Из (2.50) следует, что если Φ_x является решением граничной задачи, то и матрица $(\Phi_x^+(\bar z))^{-1}$ также является решением той же самой задачи. Значит,

$$(\Phi_x^+(\bar z))^{-1}=\Phi_x(z)h, \qquad h\in GL_r. \tag{2.57}$$

Это равенство на двух концах полосы эквивалентно уравнениям $gh=1$ и $g^+h=1$. Следовательно, $g=g^+$. Матричная функция $\Phi_x^+(\bar z)\Phi_x(z)$ голоморфна в Π_x и периодична. Поэтому для любого постоянного вектора v мы имеем

$$\oint_{\partial\Pi_x^+} v^+\Phi_x^+(\bar z)\Phi_x(z)v\,dz=0 \longmapsto v^+gv=\int_x^{x+1} v\Phi_x^+(x')\Phi_x(x')v\,dx'>0. \tag{2.58}$$

Следовательно, g положительно определена, а значит, существует матрица g_1 такая, что $g=g_1^+g_1$. Из (2.57) следует, что $\widetilde\Phi_x=\Phi_x g_1^{-1}$ удовлетворяет соотношению (2.53).

Теорема 2.3. *Предположим, что $A(z)$ является матрицей вида* (2.51). *Тогда*:

(i) *разностное уравнение* (1.1) *имеет единственный набор мероморфных решений $\widetilde\Psi_k$ таких, что*: (a) $\widetilde\Psi_k$ *голоморфна в полосе $r_k<\operatorname{Re}z<r_{k+1}+1$ и растет не более чем полиномиально при $\operatorname{Im}z\to\pm\infty$*; (b) $\widetilde\Psi_0=(1+O(z^{-1}))z^K$, $\operatorname{Im}z\to-\infty$; (c) $\widetilde\Psi_k$ *удовлетворяет соотношению*

$$\widetilde\Psi_k^+(\bar z)=\widetilde\Psi_k^{-1}(z); \tag{2.59}$$

(d) *локальные матрицы связи $M_k=\widetilde\Psi_k^{-1}\widetilde\Psi_{k-1}$ имеют вид*

$$\widetilde M_k(z)=1-f_k(z)\alpha_k\alpha_k^+, \tag{2.60}$$

где

$$f_k(z)=(1+|w_k|)\,\frac{ww_k^{-1}-|w_k|^{-1}}{ww_k^{-1}-1}, \qquad w=e^{2\pi iz}, \quad w_k=w(z_k); \tag{2.61}$$

здесь α_k – единичные векторы, $\alpha_k^+\alpha_k=1$, удовлетворяющие ограничению

$$(1-\nu_n\alpha_n\alpha_n^+)\cdots(1-\nu_1\alpha_1\alpha_1^+)=e^{\pi iK}, \qquad \nu_k=1+|w_k|; \tag{2.62}$$

(ii) *отображение монодромии $\{a_k\}\mapsto\{\alpha_k\}$ является взаимно однозначным соответствием алгебраических многообразий, заданных уравнениями* (2.52) *и* (2.62).

Доказательство. Из утверждения леммы 2.3 следует, что решения $\widetilde{\Psi}'_k$, удовлетворяющие условиям (a) и (c), существуют и единственны с точностью до унитарной нормировки. Соответствующие матрицы связи $\widetilde{M}'_k$ являются рациональными функциями переменной w, удовлетворяют соотношению

$$\widetilde{M}'^{\,+}_k(\bar{z}) = \widetilde{M}'^{\,-1}_k(z) \qquad (2.63)$$

и имеют по одному полюсу в точках w_k соответственно. Их вычеты являются матрицами ранга 1. Можно непосредственно проверить, что такая матрица может быть единственным образом представлена в виде $\widetilde{M}'_k = u_k \widetilde{M}_k$, где $\widetilde{M}_k$ дается формулой (2.60) и $u_k \in U(r)$. Условие (b) однозначно задает $\widetilde{\Psi}_0$. После этого, меняя нормализацию $\widetilde{\Psi}'_k = \widetilde{\Psi}_k u_k$, $u_k \in U(r)$, можно привести локальные матрицы связи к виду $\widetilde{M}_k$.

Глобальная матрица связи $\widetilde{S} = \widetilde{M}_n \cdots \widetilde{M}_1$ с точностью до постоянного по z множителя равна глобальной матрице связи S, соответствующей канонически нормализованным решениям Ψ_k, которые рассматривались выше, т.е. $\widetilde{S} = \widetilde{S}(-i\infty)S(z)$. Используя (2.63), мы получим $S(i\infty) = \widetilde{S}^{-1}(-i\infty)\widetilde{S}(i\infty) = \widetilde{S}^2(i\infty)$. Левая часть равенства (2.62) равна $\widetilde{S}(i\infty)$. Следовательно, равенство (2.30) влечет (2.62).

Доказательство части (ii) теоремы почти полностью идентично доказательству заключительного утверждения теоремы 2.2.

Случай малой нормы. Теперь мы представим другой, важный для дальнейшего случай, в котором вновь в случае общего положения можно ввести понятие локальных монодромий вокруг полюсов $A(z)$.

Для простоты мы предполагаем, что $\operatorname{Re} z_k < \operatorname{Re} z_m$, $k < m$. Зафиксируем число $\varepsilon \ll \max_{km} |\operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_m|$ и рассмотрим пространство матричных функций $A(z)$ вида (2.3) таких, что евклидова норма $|A_k| < \varepsilon/2$. Если ε достаточно мало, то $A(z)$ обратимо при $|z - z_k| > \varepsilon$. В этом случае нули $\det A$ локализованы в окрестностях полюсов. Обозначим их через z^-_{ks}:

$$\det A(z^-_{ks}) = 0, \quad |z_k - z^-_{ks}| < \varepsilon, \quad s = 1, \ldots, h_k = \operatorname{rank} A_k. \qquad (2.64)$$

Если ε достаточно мало, то решение сингулярного интегрального уравнения (2.17) для $x_k = (\operatorname{Re} z_k + \operatorname{Re} z_{k+1})/2$, $k = 1, \ldots, n-1$, может быть построено такими же итерациями (2.20), как те, которые были использованы ранее для $|x| \gg 0$. Соответствующие канонические решения $\Psi_k = \Psi_{x_k}$ уравнения (1.1) имеют полюсы в точках $z_m + l$, $l = 1, 2, \ldots, k \leqslant m$, и в точках $z^-_{ms} - l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m \leqslant k$. Аналогично доказательству теоремы 2.2 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Существует такое ε, что если $|A_k| < \varepsilon$ и удовлетворяют* (2.4), *то соответствующее регулярно-сингулярное уравнение* (1.1) *имеет единственный набор канонических мероморфных решений Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, которые голоморфны в полосах $r_k + \varepsilon < \operatorname{Re} z < r_{k+1} + 1$, растут не более чем полиномиально при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ и нормированы условиями $\lim_{\operatorname{Im} z \to -\infty} \Psi_k z^{-K} = 1$.*

(i) *Решения Ψ_k асимптотически представимы в виде $Y g^\pm_k$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$; $g^-_k = 1$, $g^+_0 = g^+_n = 1$.*

(ii) *Локальные матрицы связи* $M_k = \Psi_k^{-1}\Psi_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, *имеют вид*

$$M_k = 1 - \frac{m_k}{e^{2\pi i(z-z_k)} - 1}, \tag{2.65}$$

где матрицы m_k *удовлетворяют соотношению*

$$(1 + m_n) \cdots (1 + m_1) = e^{2\pi i K}. \tag{2.66}$$

(iii) *Отображение* $\{A_m\} \mapsto \{m_k\}$ *является взаимно однозначным соответствием пространства матриц* $|A_m| < \varepsilon$, *удовлетворяющих* (2.4), *и пересечения открытой окрестности точки* ($m_k = 0$) *и алгебраического многообразия* (2.66).

2.3. Ручные уравнения. В этом разделе мы перенесем полученные ранее результаты на случай ручных уравнений (1.1) с диагонализуемым старшим коэффициентом

$$A = A_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{z - z_m}, \qquad A_0^{ij} = \rho_i \delta^{ij}. \tag{2.67}$$

Если $\rho_i \neq \rho_j$, то уравнение (1.1) имеет единственное формальное решение вида (1.5). Подстановка (1.5) в (1.1) дает систему уравнений для определения χ_s. Первое нетривиальное уравнение

$$[A_0, \chi_1] = \sum_{m=1}^{n} A_m - K \tag{2.68}$$

определяет диагональную матрицу

$$K^{ij} = k_i \delta^{ij}, \qquad k_i = \sum_{m=1}^{n} A_m^{ii}, \tag{2.69}$$

и внедиагональную часть матрицы χ_1. На каждом последующем шаге соответствующее уравнение определяет диагональные элементы χ_{s-1} и внедиагональную часть χ_s.

Рассмотрим сначала случай **вещественных экспонент**.

Теорема 2.5. *Пусть матрица* A *имеет вид* (2.67) *с* $\rho_i \neq \rho_j$, $\operatorname{Im} \rho_i = 0$. *Тогда:*

(A) *существуют единственные мероморфные решения* $\Psi_{l(r)}$ *уравнения* (1.1), *которые голоморфны соответственно в областях* $\operatorname{Re} z \ll 0$ *и* $\operatorname{Re} z \gg 0$, *в которых они асимптотически равны* $Y g_{l(r)}^{\pm}$, $g_{l(r)}^{-} = 1$, *при* $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$; *матрицы* $g_{r(l)} = g_{r(l)}^{+}$ *удовлетворяют условиям* (1.11);

$$g_{r(l)}^{ii} = 1, \quad g_r^{ij} = 0, \quad \textit{если} \quad \rho_i < \rho_j, \qquad g_l^{ij} = 0, \quad \textit{если} \quad \rho_i > \rho_j; \tag{2.70}$$

(B) *глобальная матрица связи* $S = (\Psi_r)^{-1}\Psi_l$ *имеет вид*

$$S(z) = 1 - \sum_{m=1}^{n} \frac{S_m}{e^{2\pi i(z-z_m)} - 1}, \qquad S_\infty = 1 + \sum_{m=1}^{n} S_m = g_r^{-1} e^{2\pi i K} g_l. \tag{2.71}$$

В случае вещественных экспонент, $\operatorname{Im}\rho_i = 0$, матрица $e^{z\ln A_0 + zK}$ растет не более чем полиномиально при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ и практически все результаты, доказанные выше для регулярно-сингулярных уравнений, остаются в силе. Лемма 2.1 вообще не требует никаких изменений. Ее следствием является существование мероморфных канонических решений Ψ_r и Ψ_l уравнения (1.1). Эти решения асимптотически равны $Yg^{\pm}_{l(r)}$, $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, и могут быть единственным образом нормированы условием $g^{-}_{l(r)} = 1$. Единственным существенным отличием ручных уравнений с вещественными экспонентами от регулярно-сингулярных уравнений является то, что для ручных уравнений не выполняется равенство $g_{l(r)} = 1$. Коэффициент $(\widetilde{A}-1)$ уравнения (2.17) имеет вид

$$\widetilde{A} - 1 = e^{-z\ln A_0 - K\ln z} O(z^{-m}) e^{z\ln A_0 + K\ln z}. \tag{2.72}$$

Из (2.17) следует, что φ асимптотически имеет треугольную форму. При этом из (2.26) вытекает (2.70). Доказательство (2.71) аналогично доказательству (2.30).

Рассмотрим теперь **случай Биркгофа** экспонент с различными мнимыми частями $\ln\rho_i$. Ниже предполагается, что ветви $\ln\rho_i$ выбраны так, что

$$-\pi < \nu_i = \operatorname{Im}(\ln\rho_i) \leqslant \pi. \tag{2.73}$$

Теорема 2.6. *Предположим, что A имеет вид* (2.67) *и удовлетворяет условию $\nu_i \neq \nu_j \neq 0$. Тогда*:

(A) *уравнение* (1.1) *имеет единственные мероморфные решения $\Psi_{l(r)}$, которые голоморфны соответственно в областях $\operatorname{Re} z \ll 0$ и $\operatorname{Re} z \gg 0$, где они асимптотически равны Y, $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$;*

(B) *матрица связи этих решений $S = (\Psi_r)^{-1}\Psi_l$ имеет вид*

$$S(z) = S_0 - \sum_{m=1}^{n} \frac{S_m}{e^{2\pi i(z-z_m)} - 1}, \tag{2.74}$$

где S_0 и $S_\infty = 1 + \sum_{m=1}^{n} S_m$ удовлетворяют соотношениям

$$S_0^{jj} = 1,\ \ S_0^{ij} = 0,\ \ \text{если}\ \nu_i > \nu_j, \quad S_\infty^{jj} = e^{2\pi i k_j},\ \ S_\infty^{ij} = 0,\ \ \text{если}\ \nu_i < \nu_j. \tag{2.75}$$

Первое утверждение является одним из фундаментальных результатов Биркгофа. Тем не менее мы приведем его доказательство, основанное на задаче Римана–Гильберта (2.1). Это позволит продемонстрировать сходство и различия случая Биркгофа и случая вещественных экспонент. В основном различия связаны с простым фактом: при $\nu_i \neq \nu_j$ формальные ряды Y и Yg асимптотически равны при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, если g является соответственно квазиверхне- или квазинижнетреугольной матрицей с единичной диагональю. Как следствие, в случае Биркгофа введенное выше понятие матрицы переноса g_x вдоль толстого пути Π_x не имеет внутреннего смысла. Матрица переноса скрыта в нормировке $\Psi_{l(r)}$ и проявляется лишь в форме матрицы связи S.

Как и ранее, построение секционно-голоморфного решения Φ_x задачи факторизации Римана–Гильберта (2.1) сводится к сингулярному интегральному уравнению. Рассмотрим функцию Φ_x, заданную формулой

$$\Phi_x = Y_m\phi, \qquad \phi = g + \int_L \varphi(\xi)k(z,\xi)\,d\xi. \tag{2.76}$$

Она является решением задачи Римана–Гильберта, если $\varphi \in H$ удовлетворяет уравнению

$$(\widetilde{A}+1)\varphi - 2(\widetilde{A}-1)I_\varphi = 2(\widetilde{A}-1)g, \tag{2.77}$$

где $\widetilde{A}$ дается формулой (2.18). Для регулярно-сингулярных уравнений, как и для случая ручных уравнений с вещественными экспонентами, выбор постоянного члена g в (2.76) был несущественен. Этот выбор становится решающим в случае Биркгофа.

Нашей целью является доказательство того, что существует единственная матрица g с единичными диагональными элементами $g^{ii} = 1$ такая, что уравнение (2.77) имеет решение $\varphi \in H$, удовлетворяющее условиям

$$|\varphi^{ij}(\xi)| < O(|y|^{-m+\kappa})e^{y\nu_{ij}}, \qquad \nu_{ij} = \nu_i - \nu_j, \quad y = \operatorname{Im}\xi \to \pm\infty. \tag{2.78}$$

Если гладкая функция φ удовлетворяет (2.78), то соответствующий интеграл Коши имеет асимптотику

$$\pm\nu_{ij} > 0\colon \quad \begin{cases} |I_\varphi^{ij}| < O(|y|^{-m+\kappa})e^{y\nu_{ij}}, & y \to \pm\infty, \\ |I_\varphi^{ij} - f_\varphi^{ij}| < O(|y|^{-m+\kappa})e^{y\nu_{ij}}, & y \to \mp\infty, \end{cases} \tag{2.79}$$

где

$$\pm\nu_{ij} > 0\colon \quad f_\varphi^{ij} = -\frac{1}{2}\int_L (\operatorname{tg}(\pi y) \pm 1)\varphi^{ij}(\xi)\,d\xi. \tag{2.80}$$

Доказательство второго из неравенств (2.79) идентично доказательству (2.25). Первое из неравенств может быть получено аналогично.

Из самосогласованности (2.77) и условия (2.79) следует, что

$$g = 1 - f_\varphi, \tag{2.81}$$

где матрица f_φ внедиагональна и дается формулами (2.80). Уравнения (2.77) и (2.81) являются системой уравнений для неизвестных $\varphi(\xi)$ и g. Для больших $|x|$ она может быть решена методом итераций. Для этого выберем $\varphi_0 = 0$ и рекуррентно определим φ_n с помощью уравнения

$$(\widetilde{A}+1)\,\varphi_{n+1} = 2(\widetilde{A}-1)(1 + I_{\varphi_n} - f_{\varphi_n}). \tag{2.82}$$

Из (2.79) следует, что если φ_n удовлетворяет (2.78), то φ_{n+1} также удовлетворяет этим соотношениям. Последовательности $g_n = 1 - f_{\varphi_n}$, φ_n сходятся и определяют g и решение φ соответствующего уравнения (2.77), которое удовлетворяет (2.79).

Из (2.79) следует, что если ϕ и g удовлетворяют (2.77) и (2.81), то внедиагональные элементы функции Φ, заданной формулой (2.76), на обоих концах $\Pi_{x,\varepsilon}$ имеют следующую асимптотику:

$$|\phi^{ij}(z)| < O(|z|^{-m+\kappa})|(\rho_j/\rho_i)^z|, \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty. \tag{2.83}$$

Диагональные элементы ϕ имеют ту же асимптотику, что и в случае регулярно-сингулярных уравнений:

$$|\phi^{jj}(z) - v_j^\pm| < O(|z|^{-m+\kappa+1}), \qquad \operatorname{Im} z \to \pm\infty, \tag{2.84}$$

где

$$v_j^\pm = 1 - \frac{1}{2}\int_L (\operatorname{tg}(\pi i(\xi - x)) \pm 1)\varphi^{jj}(\xi)\,d\xi. \tag{2.85}$$

Так же как и ранее, доказывается, что если секционно-голоморфное решение Φ_x задачи Римана–Гильберта (2.1) существует, то оно единственно. Поэтому из (2.83), (2.84) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Для матрицы A общего положения и такой, что* $\operatorname{ind}_x A = 0$ *существует единственное секционно-голоморфное решение Φ_x задачи Римана–Гильберта* (2.1), *асимптотически равное Y при* $\operatorname{Im} z \to -\infty$ *и* $Y v_x$ *при* $\operatorname{Im} z \to \infty$, *где v_x является диагональной матрицей.*

Для больших $|x|$ соответствующие решения Ψ_x уравнения (1.1) не зависят от x. Эти решения при $x \gg 0$ и $x \ll 0$ и являются решениями Биркгофа Ψ_r и Ψ_l соответственно. Заметим, что для больших $|x|$ функции φ^{ii} равномерно имеют вид $O(|x|^{-m+\kappa})$. Следовательно, из (2.84) вытекает, что $v_{l(r)} = 1$. Первое утверждение теоремы доказано.

Из (2.73) следует, что матрица связи S, рассматриваемая как функция переменной $w = e^{2\pi i z}$, имеет голоморфное продолжение в точки $w = 0, w = \infty$. Следовательно, она является рациональной функцией w с полюсами в точках $w_m = w(z_m)$. Значит, она имеет вид (2.71). Ее значения в точках $w = 0$ и $w = \infty$ являются квазитреугольными матрицами в силу изложенных выше аргументов. Доказательство теоремы завершено.

Локальные монодромии для ручных уравнений могут быть введены в случаях, аналогичных тем, которые были рассмотрены ранее в разделе 2.2. А именно для случаев *специальных* и *унитарных* уравнений и в случае коэффициентов *малой нормы*. Вид локальных матриц монодромии в случае ручных уравнений с вещественными экспонентами был приведен во введении. Все остальные результаты раздела 2.2 также допускают прямое обобщение на случай ручных уравнений. В качестве примера рассмотрим случай специальных ручных уравнений с мнимыми экспонентами.

Теорема 2.7. (i) *Для общей матрицы A вида*

$$A(z) = A_0\left(1 + \frac{a_n b_n^T}{z - z_n}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_1 b_1^T}{z - z_1}\right), \tag{2.86}$$

где

$$\begin{gathered}
\text{(a)} \quad A_0^{ij} = \rho_i \delta^{ij}, \quad \nu_i \neq \nu_j, \quad \nu_i = \operatorname{Im}(\ln \rho_i), \\
\text{(b)} \quad b_k^T a_k = 0, \qquad \text{(c)} \quad \operatorname{Re} z_k < \operatorname{Re} z_m, \quad k < m,
\end{gathered}$$

уравнение (1.1) *имеет единственный набор меромофных решений Ψ_k, $k = 0, 1, \dots, n$, которые голоморфны в полосах $r_k < \operatorname{Re} z < r_{k+1} + 1$ и асимптотически равны $Y v_k^{\pm}$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, где $v_k^- = 1$ и v_k^+ диагональны.*

(ii) *Локальные матрицы связи $M_k = \Psi_k^{-1} \Psi_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, имеют вид*

$$M_k = m_{k0} - \frac{\alpha_k \beta_k^T}{e^{2\pi i (z - z_k)} - 1}, \tag{2.87}$$

где (α_k, β_k) – пары ортогональных векторов, рассматриваемых по модулю преобразований (2.33), *матрицы m_{k0} являются квазинижнетреугольными и такими, что $M_k(i\infty)$ являются квазиверхнетреугольными, т.е.*

$$m_{k0}^{jj} = 1, \quad m_{k0}^{ij} = 0, \quad \textit{если} \quad \nu_i > \nu_j, \qquad m_{k0}^{ij} = -\alpha_k^i \beta_k^j, \quad \textit{если} \quad \nu_i < \nu_j. \tag{2.88}$$

(iii) *Отображение пар ортогональных векторов* $\{a_m, b_m\} \mapsto \{\alpha_k, \beta_k\}$, *рассматриваемых по модулю преобразований* (2.33), *является взаимно однозначным соответствием открытых множеств.*

В случае малой нормы структура локальных матриц связи описывается аналогичным образом. А именно, M_k имеет вид

$$M_k = m_{k0} - \frac{m_{k1}}{e^{2\pi i(z-z_k)} - 1}, \tag{2.89}$$

где m_{k0} – квазинижнетреугольная матрица, а матрица $m_{k0} + m_{k1}$ является квазиверхнетреугольной матрицей. Дискретный аналог локальной матрицы монодромии определяется как их отношение

$$\mu_k = 1 + m_{k1} m_{k0}^{-1}. \tag{2.90}$$

Заметим, что матрица μ_k общего положения допускает представление в виде произведения верхне- и нижнетреугольных матриц. Значит, в общем положении μ_k единственным образом определяют матрицы m_{k0}, m_{k1} и, как следствие, локальные и глобальную матрицы связи.

§ 3. Изомонодромные преобразования и обратная задача монодромии

В этом параграфе мы рассматриваем отображение, обратное к прямому отображению монодромии:

$$\{z_m, A_m\} \mapsto \{w_m, S_m\}, \qquad w_m = w(z_m) = e^{2\pi i z_m}. \tag{3.1}$$

Для любой диагонализуемой матрицы A_0 характеризация уравнений (1.1), имеющих одинаковые данные монодромии, полностью совпадает с характеризацией, данной Биркгофом для случая экспонент с различными мнимыми частями.

Лемма 3.1. *Рациональные функции* $A(z)$ *и* $A'(z)$ *вида* (1.2) *соответствуют при отображении* (3.1) *одной и той же матрице связи* $S(z)$ *тогда и только тогда, когда существует рациональная матричная функция* $R(z)$ *такая, что*

$$A'(z) = R(z+1)A(z)R^{-1}(z), \qquad R(\infty) = 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $\Psi_{l(r)}$ и $\Psi'_{l(r)}$ являются каноническими мероморфными решениями уравнений (1.1) с коэффициентами $A(z)$ и $A'(z)$ соответственно. Если $\Psi_r^{-1}\Psi_l = (\Psi'_r)^{-1}\Psi'_l$, то

$$R = \Psi'_l \Psi_l^{-1} = \Psi'_r \Psi_r^{-1}. \tag{3.3}$$

Из определения канонических решений следует, что R голоморфна для больших $|z|$. Если $A_0 = A'_0$, $K = K'$, то $R \to 1$, $|z| \to \infty$. Значит, R имеет только конечное число полюсов и, как следствие, является рациональной функцией переменной z.

Обозначим через $\mathscr{A}_D$ подпространство матричных функций, имеющих заданный определитель:

$$A \in \mathscr{A}_D \subset \mathscr{A}\colon \quad \det A(z) = D(z) = \frac{\prod_{\alpha=1}^{N}(z-\zeta_\alpha)}{\prod_{m=1}^{n}(z-z_m)^{h_m}}, \quad h_m = \operatorname{rk} A_m. \tag{3.4}$$

Заметим, что (1.4) эквивалентно условию

$$\operatorname{tr} K = 0 \;\longleftrightarrow\; \sum_\alpha \zeta_\alpha = \sum_m h_m z_m. \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Если нули ζ_α не конгруэнтны, $\zeta_\alpha - \zeta_\beta \notin \mathbb{Z}$, то отображение монодромии* (3.1), *ограниченное на $\mathscr{A}_D$, является инъективным.*

Доказательство. Рассмотрим матричную функцию $\mathscr{A} \in \mathscr{A}_D$, полюсы и нули которой попарно не конгруэнтны. Предположим, что существует рациональная матричная функция R, равная единичной матрице в бесконечности,$R = 1 + O(z^{-1})$, и такая, что матрица A', заданная равенством (3.3), имеет тот же самый определитель, т.е. $A' \in \mathscr{A}_D$. Тогда из уравнения $R(z+1) = A'(z)R(z)A^{-1}(z)$ следует, что R имеет полюсы постоянного ранга во всех точках вида $\zeta_\alpha + l$ и $z_m + l$, где $l \in \mathbb{Z}_+$. Матрица R регулярна в бесконечности. Следовательно, она регулярна всюду. Значит, $R = 1$.

Назовем две рациональные функции D и D' эквивалентными, если наборы их полюсов z_m, z'_m и нулей ζ_α, ζ'_α попарно конгруэнтны, т.е. $z_m - z'_m \in \mathbb{Z}$, $\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha \in \mathbb{Z}$, и удовлетворяют (3.5).

Лемма 3.3. *Для каждой пары эквивалентных рациональных функций D и D' существует единственный изомонодромный бирациональный изоморфизм*

$$T_D^{D'} : \mathscr{A}_D \mapsto \mathscr{A}_{D'}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Построение преобразований $T_D^{D'}$ аналогично конструкции, предложенной в [10] для случая полиномиальных коэффициентов $\widetilde{A}$. Мы начнем с определения двух типов элементарных преобразований. Эти преобразования бирациональны и определены на открытых множествах соответствующих пространств. Элементарные преобразования первого типа определяются парой (z_k, ζ_α) и собственным вектором матрицы $A_k = \operatorname{res}_{z_k} A$, отвечающим ненулевому собственному значению λ,

$$q^T A_k = \lambda q^T \neq 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим матрицу

$$R = 1 + \frac{pq^T}{z - z_k}, \tag{3.8}$$

где p является нуль-вектором матрицы $A(\zeta_\alpha)$, нормированным так, что

$$(q^T p) = z_k - \zeta_\alpha, \qquad A(\zeta_\alpha)p = 0. \tag{3.9}$$

Замечание. Если $z_k \neq \zeta_\alpha$, то матрица R определена только для открытого множества $\mathscr{A}_D$, для которого скалярное произведение $(q^T p)$ соответствующих векторов не равно нулю.

Из уравнений (3.9) следует

$$R^{-1} = 1 - \frac{pq^T}{z - \zeta_\alpha}. \tag{3.10}$$

Из второго из уравнений (3.9) следует, что матрица A', заданная формулой (3.2), регулярна в точке ζ_α. Матрица A' имеет полюс ранга 1 в точке $z_k - 1$. Ранг ее вычета в z_k равен рангу матрицы $A_k R^{-1}(z_k)$. Левое нуль-пространство последней содержит нуль-пространство A_k и вектор-строку q^T. Следовательно, ранг вычета A' в z_k равен

h_k-1. Тем же самым способом, выбирая другой нуль ζ_{α_2} определителя D и собственный вектор $A'_k = \operatorname{res}_{z_k} A'$, отвечающий ненулевому собственному значению, мы построим функцию A'' с полюсом в z_k ранга h_k-2. Продолжая этот процесс, мы получим матричную функцию $T_k^{\alpha_1,\dots,\alpha_{h_k}}(A)$, которая регулярна в z_k и имеет полюс ранга h_k в точке z_k-1.

Как следует из утверждения леммы 3.2, изомонодромное преобразование $T_k^{\alpha_1,\dots,\alpha_{h_k}}$ однозначно определено выбором полюса z_k и подмножества h_k нулей ζ_{α_s} функции D. Эти преобразования аналогичны преобразованиям, введенным в [10] для случая полиномиальных $A(z)$.

Элементарные преобразования второго типа задаются парой нулей ζ_α и ζ_β функции D. Соответствующая матрица $R=R_{\alpha,\beta}$ определяется формулой

$$R_{\alpha,\beta} = 1 + \frac{p_\alpha q_\beta^T}{z-\zeta_\beta-1}\,, \tag{3.11}$$

в которой p_α и q_β определяются соотношениями

$$\text{(i)}\ \ A(\zeta_a)p_\alpha = 0;\quad \text{(ii)}\ \ q_\beta^T A(\zeta_\beta) = 0;\quad \text{(iii)}\ \ (q_\beta^T p_\alpha) = \zeta_\beta - \zeta_\alpha + 1. \tag{3.12}$$

Из (3.12) (iii) следует, что $R_{\alpha,\beta}^{-1} = 1 - p_\alpha q_\beta^T/(z-\zeta_\alpha)$. При этом из уравнений (3.12) (i), (ii) следует, что матрица

$$T^{\alpha|\beta}(A) = R_{\alpha,\beta}^{-1}(z+1)A(z)R_{\alpha,\beta}^{-1}(z) = \left(1+\frac{p_\alpha q_\beta^T}{z-\alpha_\beta}\right)A(z)\left(1+\frac{p_\alpha q_\beta^T}{z-\alpha_\alpha}\right) \tag{3.13}$$

регулярна и невырождена в точках ζ_α и ζ_β. Она имеет те же полюсы, что и A. Нулями ее определителя являются точки $\zeta_\alpha-1$, $\zeta_\beta+1$ и ζ_γ, $\gamma\neq\alpha,\beta$.

Преобразования $T_D^{D'}$ могут быть получены композицией элементарных преобразований. Действительно, если D и D' эквивалентны, то полюсы A могут быть сдвинуты из D в D' с помощью преобразований (или их обратных) первого типа. После этого $N-1$ нулей могут быть сдвинуты в $N-1$ нулей D' с помощью преобразований второго типа. При этом уравнение (3.5) однозначно определяет положение последнего нуля. Лемма доказана.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Предположим, что* $A_0^{ij} = \rho_i\delta^{ij}$ *и* K – *диагональные матрицы, а рациональная матрица* $S(w)$ *имеет один из следующих видов*: (a) (2.30), *если* $A_0 = 1$, (b) (2.70), (2.71), *если* $\operatorname{Im}\rho_i = 0$; (c) (2.74), (2.75), *если* $\operatorname{Im}(\ln\rho_i)\neq \operatorname{Im}(\ln\rho_j)\neq 0$. *Тогда в общем положении для каждой* S *и каждого набора ветвей* z_k, ζ_α *логарифмов полюсов и нулей* $\det S(w)$ *существует единственная рациональная матричная функция* $A(z)$ *вида* (1.2) *такая, что* $S(z)$ *является матрицей связи соответствующего разностного уравнения* (1.1). *При этом* $\det A(\zeta_\alpha) = 0$.

Доказательство. Из результатов, доказанных выше, следует, что если матричная функция $A(z)$ существует для одного набора ветвей z_k, ζ_α, то в общем положении она существует и для любого другого эквивалентного набора. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно построить хотя бы одно уравнение (1.1), для которого заданная функция S является матрицей связи канонических решений.

Выберем вещественное число x такое, что на прямой L: $\operatorname{Re} z = x$ матрица $S(z)$ является регулярной и обратимой. Обозначим полуплоскости $\operatorname{Re} z < x$ и $\operatorname{Re} z > x$ через $\mathscr{D}_l$ и $\mathscr{D}_r$ соответственно. Рассмотрим следующую задачу факторизации.

Задача III. *Для заданной S найти в областях $\mathscr{D}_l$ и $\mathscr{D}_r$ обратимые матричные функции $\mathscr{X}_l(z)$ и $\mathscr{X}_r(z)$, которые голоморфны и ограничены внутри областей, непрерывны вплоть до границ и таковы, что граничные значения функций $\Psi_{l(r)} = \mathscr{X}_{l(r)} e^{z \ln A_0 + K \ln z}$ удовлетворяют уравнению*

$$\Psi_l(\xi) = \Psi_r(\xi) S(\xi), \qquad \xi \in L. \tag{3.14}$$

Лемма 3.4. *Для матрицы S общего положения задача* III *имеет решение, которое единственно с точностью до нормализации $\mathscr{X}'_{l(r)} = g\mathscr{X}_{l(r)}$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $\mathscr{X}_{l(r)}$, задаваемые в каждой из соответствующих полуплоскостей интегралом Коши

$$\mathscr{X}(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\chi(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.14) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{2}\chi(\xi)(\mathscr{M}(\xi) + 1) - \frac{1}{2\pi i} I_\chi(\xi)(\mathscr{M}(\xi) - 1) = (\mathscr{M}(\xi) - 1), \tag{3.16}$$

в котором $\mathscr{M} = Y_0 S Y_0^{-1}$, $Y_0 = e^{z \ln A_0 + K \ln z}$. Если S имеет вид (a) или (c), то в бесконечности $\mathscr{M}$ экспоненциально стремится к 1 и для матрицы S общего положения уравнение (3.16) имеет единственное решение. В случае (b) ручных уравнений с вещественными экспонентами $\mathscr{M}$ не имеет предела в бесконечности. Следующая незначительная модификация задачи позволяет доказать лемму и в случае (b). Рассмотрим функции $\mathscr{X}'_{l(r)}$, задаваемые интегралом Коши (3.15) вдоль прямой $\xi \in L'$: $\operatorname{Arg}(\xi - x) = \pi/2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Если $\chi(\xi)$, $\xi \in L'$, является решением уравнения (3.16) на L' с коэффициентом $\mathscr{M}' = Y_0 g_r S Y_0^{-1}$, то граничные значения функций $\Psi' = \mathscr{X}'_l Y_0$ и $\mathscr{X}'_r Y_0$ на L' удовлетворяют уравнению

$$\Psi'_l(\xi) = \Psi'_r(\xi) g_r S(\xi), \qquad \xi \in L'. \tag{3.17}$$

Из (2.70) следует, что $\mathscr{M}'$ вдоль L' экспоненциально стремится к единичной матрице. Поэтому в общем положении решение χ соответствующего уравнения (3.16) на L' существует и единственно. Оно определяет решение задачи факторизации (3.17). Уравнение (3.17) может быть использовано для мероморфного продолжения функций $\Psi'_{l(r)}$, которые первоначально определены в полуплоскостях, разделенных L'. Если $\varepsilon > 0$

достаточно мало, то S в секторах между L и L' регулярна и обратима. Значит, продолжения Ψ_l' и Ψ_r' голоморфны в областях $\mathscr{D}_l$ и $\mathscr{D}_r$ соответственно. Функции $\Psi_l = \Psi_l'$ и $\Psi_r = \Psi_r' g_r$ являются решением задачи факторизации (3.14). Лемма доказана.

Пусть $\Psi_{l(r)}$ являются решением задачи факторизации (3.14). Тогда функция

$$A(z) = \Psi_l(z+1)\Psi_l^{-1}(z) = \Psi_r(z+1)\Psi_r^{-1}(z) \tag{3.18}$$

голоморфна в областях $\operatorname{Re} z < x-1$ и $\operatorname{Re} z > x$. Она стремится к A_0 при $z \to \infty$. Внутри полосы Π_{x-1} полюсы A и A^{-1} совпадают соответственно с полюсами S и S^{-1}. Следовательно, $A(z)$ имеет вид (1.2), где $x - 1 < \operatorname{Re} z_m < x$. Теорема доказана.

§ 4. Непрерывный предел

Нашей следующей целью является доказательство того, что в пределе $h \to 0$ канонические мероморфные решения Ψ_x разностного уравнения (1.21) сходятся к решениям дифференциального уравнения (1.22).

Построение мероморфных решений Ψ_x уравнения (1.21), которые голоморфны в полосе Π_x^h: $x < \operatorname{Re} z < x + h$, требует лишь незначительных изменений формул, приведенных выше. Как и ранее, секционно-голоморфное решение Φ_x задачи факторизации

$$\Phi_x^+(\xi + h) = (1 + hA(\xi))\Phi_x^-(\xi), \qquad \xi = x + iy, \tag{4.1}$$

может быть представлено с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi_x = Y_0\phi, \quad \phi = 1 + \int_L \varphi(\xi) k_h(z,\xi)\, d\xi, \quad k_h = k(h^{-1}z, h^{-1}\xi), \tag{4.2}$$

где $k(z,\xi)$ определено формулой (2.13), а $Y_0 = e^{z\ln(1+hA_0)+hK\ln z}$. Вычет k_h в $z = \xi$ равен h, поэтому граничные значения ϕ равны

$$\phi^-(\xi) = -\frac{h\varphi(\xi)}{2} + 1 + I_\varphi(\xi), \qquad \phi^+(\xi+1) = \frac{h\varphi(\xi)}{2} + 1 + I_\varphi(\xi), \tag{4.3}$$

где I_φ обозначает главное значение соответствующего интеграла. Сингулярное интегральное уравнение для φ, которое эквивалентно (4.1), имеет вид

$$(2 + h\widetilde{A})\varphi - 2\widetilde{A} I_\varphi = 2\widetilde{A}, \tag{4.4}$$

где $\widetilde{A} = Y_0(\xi+1)^{-1}A(\xi)Y_0(\xi)$. Если $|x - \operatorname{Re} z_k| > Ch$, то уравнение (4.4) может быть решено с помощью итераций. Соответствующее решение Ψ_x разностного уравнения не зависит от x в интервалах $\operatorname{Re} z_k + Ch < x < \operatorname{Re} z_{k+1} - Ch$. Таким образом, мы приходим к выводу, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой рациональной функции $A(z)$ вида (1.2) существует h_0 такое, что уравнение (1.21) для $h < h_0$ имеет набор канонических мероморфных решений Ψ_k, которые голоморфны в полосах $z \in \mathscr{D}_k$: $\operatorname{Re} z_k + \varepsilon < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_{k+1} - \varepsilon$.

Существование Ψ_k означает, что для любой матрицы A вида (1.2) локальные матрицы монодромии μ_k определены для достаточно малых h. Следовательно, можно рассмотреть их непрерывный предел.

Теорема 4.1. *В пределе* $h \to 0$:

(A) *канонические мероморфные решения* Ψ_k *разностного уравнения* (1.21) *сходятся равномерно в* $\mathscr{D}_k$ *к решениям* $\widehat{\Psi}_k$ *дифференциального уравнения* (1.22), *которые голоморфны в* $\mathscr{D}_k$;

(B) *локальные матрицы монодромии* (1.17) *разностного уравнения сходятся к монодромиям соответствующих решений* $\widehat{\Psi}_k$ *вдоль замкнутого пути* $z = i\infty$, *обходящего полюс* z_k;

(C) *верхне- и нижнетреугольные матрицы* (g_r, g_l) *и* (S_0, S_∞), *определенные в* (2.70) *и* (2.75) *соответственно для случаев вещественных и мнимых экспонент, сходятся к матрицам Стокса дифференциального уравнения* (1.22).

Первое утверждение теоремы следует из того, что в континуальном пределе система сингулярных интегральных уравнений для решений задачи Римана–Гильберта переходит в дифференциальное уравнение (1.22). Легко проверить, что

$$k_h(z,\xi) = \begin{cases} 1 + O(h), & z - \xi > h \ln h,\ \xi > h \ln h, \\ O(h), & \xi - z > h \ln h \text{ или } \xi < h \ln h, \end{cases} \qquad z > h \ln h. \tag{4.5}$$

Аналогичные соотношения справедливы для случая $z < h \ln h$. В обоих случаях мы получаем, что

$$I_\varphi(z) = \int_0^z \varphi(\xi)\, d\xi + O(h). \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.6) следует, что функция $\psi = 1 + I_\varphi$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\psi}{dz} = A(z)\psi(z) + O(h). \tag{4.7}$$

На прямой L_x: $\operatorname{Re} z = x$ функция Φ_x равна $\psi + O(h)$. Следовательно, на этой прямой Ψ_x сходится к $\widehat{\Psi}_k$. Для случаев ручных уравнений с вещественными экспонентами сходимость равномерна в $\mathscr{D}_k$. Для случая Биркгофа сходимость становится равномерной лишь при специальном выборе постоянного члена g в интегральном представлении для Φ_x, который в (4.2) был выбран в виде $g = 1$ (ср. с (2.76)).

Второе и третье утверждения теоремы являются прямыми следствиями (A) и определений локальных матриц монодромии μ_k и матриц (g_r, g_l) и (S_0, S_∞).

§ 5. Разностные уравнения на эллиптических кривых

В этом параграфе мы строим прямое и обратное преобразования монодромии для разностных уравнений на эллиптической кривой.

Рассмотрим уравнение

$$\Psi(z+h) = A(z)\Psi(z), \tag{5.1}$$

в котором $A(z)$ является мероморфной $(r \times r)$-матричной функцией с простыми полюсами, которая удовлетворяет следующим свойствам монодромии:

$$A(z + 2\omega_\alpha) = B_\alpha A(z) B_\alpha^{-1}, \qquad B_\alpha \in SL_r. \tag{5.2}$$

Матрица $A(z)$ может рассматриваться как мероморфное сечение расслоения $\operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$ над эллиптической Γ с периодами $(2\omega_1, 2\omega_2)$, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Здесь $\mathscr{V}$

является голоморфным векторным расслоением над Γ, которое определяется парой коммутирующих матриц B_α. Мы будем предполагать, что B_α диагонализуемы. Уравнение (5.1) инвариантно относительно преобразований $A' = GAG^{-1}$. Поэтому если B_α диагонализуемы, то без ограничения общности можно считать, что B_α диагональны. Далее, в этой калибровке если G – диагональная матрица, то уравнение (5.1) инвариантно и относительно преобразований

$$\Psi' = G^z \Psi, \quad A' = G^{z+h} A(z) G^{-z}, \quad G^{ij} = G^i \delta^{ij}. \tag{5.3}$$

Матрица A' имеет следующие свойства монодромии:

$$A'(z + 2\omega_\alpha) = B'_\alpha A'(z)(B'_\alpha)^{-1}, \qquad B'_\alpha = G^{2\omega_\alpha} B_\alpha. \tag{5.4}$$

Следовательно, если B_α диагонализуемы, то без ограничения общности можно считать, что

$$B_1^{lj} = \delta^{lj}, \qquad B_2^{lj} = e^{\pi i q_j/\omega_1} \delta^{ij}. \tag{5.5}$$

Ниже мы будем предполагать, что $q_i \neq q_j$. Матричные элементы A могут быть выражены в терминах одной из стандартных тэта-функций Якоби $\theta_3(z) = \theta_3(z|\tau)$, $\tau = \omega_2/\omega_1$. Определим функцию $\widetilde{\theta}$ формулой

$$\widetilde{\theta}(z) = \widetilde{\theta}(z|2\omega_1, 2\omega_2) = \theta_3(z/2\omega_1|\omega_2/\omega_1). \tag{5.6}$$

Из свойства монодромии θ_3 следует, что

$$\widetilde{\theta}(z + 2\omega_1) = \widetilde{\theta}(z), \qquad \widetilde{\theta}(z + 2\omega_2) = -\widetilde{\theta}(z) e^{-\pi i z/\omega_1}. \tag{5.7}$$

Функция $\widetilde{\theta}$ является нечетной функцией, $\widetilde{\theta}(z) = -\widetilde{\theta}(-z)$. Из (5.7) следует, что матричные элементы A, удовлетворяющие (5.2), (5.5), могут быть единственным образом представлены в виде

$$\begin{aligned} A^{ii} &= \rho_i + \sum_{m=1}^{n} A_m^i \widetilde{\zeta}(z - z_m), \quad \sum_m A_m^i = 0, \\ A^{ij} &= \sum_{m=1}^{n} A_m^{ij} \frac{\widetilde{\theta}(z - q_i + q_j - z_m)}{\widetilde{\theta}(z - z_m)}, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\widetilde{\zeta} = \partial_z(\ln \widetilde{\theta})$ и $z_m \in \mathbb{C}$ – полюсы $A(z)$ в фундаментальном параллелограмме фактора $\mathbb{C}/\Lambda$, $\Lambda = \{2n\omega_1, 2m\omega_2\}$, т.е.

$$0 < r(z_m) < 1, \qquad 0 < u(z_m) < 1. \tag{5.9}$$

Здесь и далее мы используем обозначения $r(z)$ и $u(z)$ для вещественных координат точки $z \in \mathbb{C}$ в базисе $2\omega_\alpha$: $z = 2r\omega_1 + 2u\omega_2$, т.е.

$$r(z) = \frac{z\bar{\omega}_2 - \bar{z}\omega_2}{2(\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2)}, \qquad u(z) = \frac{z\bar{\omega}_1 - \bar{z}\omega_1}{2(\omega_2\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\omega_1)}. \tag{5.10}$$

В этом параграфе мы предполагаем, что все полюсы A не конгруэнтны $(\operatorname{mod} h)$. В частности, $h^{-1}(z_m - z_k) \notin \mathbb{Z}$.

Наша следующая цель – построить канонические мероморфные решения уравнения (5.1) с коэффициентами вида (5.8). Как и ранее, эта задача сводится к подходящей задаче факторизации Римана–Гильберта. Для определенности мы будем предполагать, что шаг разностного уравнения h удовлетворяет условию

$$0 < r(h) < 1. \tag{5.11}$$

Зафиксируем вещественное число x и рассмотрим следующую задачу в полосе $z \in \Pi_x$: $x \leqslant r(z) \leqslant x + r(h)$.

Задача IV. *Найти в полосе Π_x непрерывную функцию $\Phi(z)$, которая голоморфна внутри Π_x и такова, что ее граничные значения на двух краях полосы удовлетворяют уравнению*

$$\Phi^+(\xi + h) = A(\xi)\Phi^-(\xi), \qquad r(\xi) = x. \tag{5.12}$$

Индекс этой задачи равен

$$\operatorname{ind}_x(A) = \int_{L_x} d \ln \det A, \qquad \xi \in L_x\colon\ r(\xi) = x. \tag{5.13}$$

Лемма 5.1. *Для матрицы $A(z)$, общего положения и такой, что* $\operatorname{ind}_x(A) = 0$, *существует невырожденное голоморфное решение Φ_x задачи* (5.12), *имеющее следующие свойства монодромии*:

$$\Phi_x(z + 2\omega_2) = e^{\pi i \hat{q}/\omega_1}\Phi_x(z)e^{-2\pi i \hat{s}}, \tag{5.14}$$

где $\hat{q}$ – диагональная матрица, определяющая свойства монодромии (5.2), (5.5) *матрицы A, а $\hat{s}$ – некоторая диагональная матрица, $\hat{s}^{ij} = s^i\delta^{ij}$. Решение Φ_x единственно с точностью до преобразования $\Phi'_x = \Phi_x F$, в котором F диагональна.*

Доказательство. Утверждение леммы может быть легко доказано с помощью методов алгебраической геометрии. Рассмотрим следующее действие решетки Λ_h, порожденной h и $2\omega_2$, на линейном пространстве $(z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$:

$$(z, f) \to (z + h, A(z)f), \qquad (z, f) \to (z + 2\omega_2, B_2 f), \qquad B_2 = e^{\pi i \hat{q}/\omega_1}. \tag{5.15}$$

Фактор-пространство $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r/\Lambda_h$ является векторным расслоением $\mathscr{V}$ над эллиптической кривой Γ_h с периодами $(h, 2\omega_2)$. Из (5.13) следует, что степень его детерминантного расслоения равна нулю, $c_1(\mathscr{V}) = 0$. Согласно [18], для общего векторного расслоения степени нуль существует плоская голоморфная связность. Базис горизонтальных сечений такой связности задает голоморфную матричную функцию Φ', удовлетворяющую соотношениям $\Phi'(z + h) = A(z)\Phi'(z)V_1$, $\Phi'(z + 2\omega_2) = B_2\Phi'(z)V_2$, где V_1, V_2 – пара коммутирующих матриц. Изменение базиса горизонтальных сечений соответствует преобразованию $\Phi' \to \Phi g$, $V_i \to g^{-1}V_i g$. Следовательно, в общем положении, когда V_i диагонализуемы, мы можем считать, что V_i диагональны. Искомое голоморфное решение задачи (5.12) задается формулой $\Phi_x = \Phi' V_1^{-z/h}$. Оно удовлетворяет соотношениям (5.14), где $e^{-2\pi i\hat{s}/h} = V_2 V_1^{-2\omega_2/h}$. Это решение Φ_x будет называться *блоховским* решением задачи факторизации (5.12). В общем положении мы будем предполагать, что $s_i \neq s_j$.

Предположим, что существуют два блоховских решения Φ_x и Φ'_x задачи (5.12). Из условия $\operatorname{ind}_x A = 0$ следует, что Φ_x невырождена в Π_x. Следовательно, матричные элементы $F = \Phi_x^{-1}\Phi'_x$ являются голоморфными матричными функциями, удовлетворяющими соотношениям

$$F^{lj}(z+h) = F(z), \qquad F^{lj}(z+2\omega_2) = F^{lj}(z)e^{2\pi i(s_l - s'_j)/h}. \tag{5.16}$$

Покажем, что из (5.16) следует, что $s_i = s'_i$ и $F^{ij} = 0$, $i \neq j$ (напомним, что мы предполагаем $s_i \neq s_j$). Действительно, рассмотрим функцию

$$\widehat{F}^{ij} = F^{ij}\widetilde{\theta}_h(z + s_i - s'_j)/\widetilde{\theta}_h(z), \tag{5.17}$$

где $\widetilde{\theta}_h$ задается формулой (5.7) для Γ_h, т.е.

$$\widetilde{\theta}_h(z) = \widetilde{\theta}(z|h, 2\omega_2). \tag{5.18}$$

Из (5.16) следует, что $\widehat{F}^{ij}$ является эллиптической функцией на Γ_h с единственным простым полюсом в $z = 0$. Такой функции не существует. Следовательно, $s_i = s'_i$ и $F^{ij} = 0, i \neq j$. Лемма доказана.

Теперь мы готовы определить прямое отображение монодромии для разностных уравнений (5.1) с коэффициентами A вида (5.8). Как и ранее, голоморфное решение Φ_x задачи факторизации (5.12) определяет мероморфное решение $\Psi_x(z)$ уравнения (5.1). В силу (5.14) оно удовлетворяет блоховскому соотношению (1.25).

Матрица A имеет период $2\omega_1$. Значит,

$$\Phi_{x+1}(z + 2\omega_1) = \Phi_x(z), \qquad z \in \Pi_x. \tag{5.19}$$

Следовательно, $\Psi_x(z - 2\omega_1)$ является блоховским решением уравнения (5.1), аналитичным в полосе Π_{x+1}. Рассмотрим матрицу связи двух блоховских решений

$$S_x(z) = \Psi_x^{-1}(z - 2\omega_1)\Psi_x(z). \tag{5.20}$$

По очевидным соображениям S_x имеет период h. Из соотношения (1.25) следует, что она обладает также следующим свойством монодромии:

$$S(z+h) = S(z), \qquad S(z+2\omega_2) = e^{2\pi i\hat{s}/h}S(z)e^{-2\pi i\hat{s}/h}, \tag{5.21}$$

где $\hat{s}$ – та же диагональная матрица, что и в (5.14).

По определению S_x зависит от x. Зафиксируем x, например положив его равным нулю, и обозначим $S_{x=0}(z)$ через $S(z)$.

Теорема 5.1. *В общем положении матричные элементы $S(z)$ имеют вид*

$$\begin{gathered} S^{ii} = S_0^i + \sum_{m=1}^{n} S_m^i \zeta_h(z - z_m), \quad \sum_{m=1}^{n} S_m^i = 0, \\ S^{ij} = \sum_{m=1}^{n} S_m^{ij} \frac{\widetilde{\theta}_h(z - s_i + s_j - z_m)}{\widetilde{\theta}_h(z - z_m)}, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{5.22}$$

где $\zeta_h = \partial_z(\ln \widetilde{\theta}_h)$ и $\widetilde{\theta}_h$ дается формулой (5.18).

Напомним, что z_m – полюсы $A(z)$ в фундаментальной области $\mathbb{C}/\Lambda$.

Доказательство. В полуплоскости $r(z) > 0$ функция $\Psi_{x=0}$ имеет полюсы в точках $z_m + nh + 2m\omega_2$, $n = 1, 2, \dots, m \in \mathbb{Z}$. По определению $\Psi_{x=1}$ голоморфна в полосе $\Pi_{x=1}$. Значит, полюсы матрицы связи S в полосе Π_1 – это точки, которые конгруэнтны z_m по модулю решетки Λ_h. Учитывая (5.21), мы получаем (5.22).

Построенное соответствие

$$\{\rho_i, A_m^{ij}, q_i\} \mapsto \{S_0^i, S_m^{ij}, s_i\} \tag{5.23}$$

мы будем называть прямым отображением монодромии.

5.1. Локальные монодромии. Все результаты, доказанные выше для случая разностных уравнений с рациональными коэффициентами, переносятся с незначительными техническими изменениями на случай уравнений с эллиптическими коэффициентами. Например, аналогом специальных регулярно-сингулярных уравнений с рациональными коэффициентами являются уравнения (5.1) с коэффициентами $A(z)$, вычеты A_m которых имеют ранг 1, определитель которых тождественно равен $\det\ A(z) = 1$, а параметры q_i в (5.8) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 0. \tag{5.24}$$

Обозначим пространство таких матриц через $\mathscr{A}_0(\Gamma)$. Его размерность равна $\dim\ \mathscr{A}_0(\Gamma) = n(2r-1) - n + (r-1) = (2n+1)(r-1)$. Первый член в этой сумме равен размерности пространства матриц вида (5.8), ранг вычетов которых равен 1. Второй член суммы равен числу условий, эквивалентных равенству $\det A = 1$. Последний член равен числу параметров q_i. Рассмотрим фактор-пространство $\mathscr{B}(\Gamma) = \mathscr{A}_0(\Gamma)/\mathbb{C}^{r-1}$ пространства $\mathscr{A}_0(\Gamma)$ по действию $A \to gAg^{-1}$ диагональных матриц g. Его размерность равна $\dim \mathscr{B}(\Gamma) = 2n(r-1)$. Явная параметризация открытого подмножества $\mathscr{B}(\Gamma)$ может быть задана следующим образом. Упорядочим полюсы и рассмотрим матрицы $A(z)$ вида

$$A(z) = L_n(z) L_{n-1}(z) \cdots L_1(z), \tag{5.25}$$

где

$$L_m^{ij} = f_m^i \frac{\widetilde{\theta}(z - q_{i,m+1} + q_{j,m} - z_m)}{\widetilde{\theta}(z - z_m)\widetilde{\theta}(q_{i,m+1} - q_{j,m})} \tag{5.26}$$

и $q_{i,m}$ – наборы комплексных чисел, удовлетворяющих (5.24) и таких, что $q_{i,n+1} = q_{i,1}$.

Ранг вычета L_m в z_m равен 1. Следовательно, ее определитель имеет не более чем простой полюс в точке z_m. Из соотношения (5.24) для $q_{i,m}$ следует, что определитель $\det L_m$ является эллиптической функцией. Значит, он тождественно равен некоторой константе. Вектор f_m может быть нормализован условием $\det L_m(z) = \det L(0) = 1$,

$$\prod_{i=1}^{r} f_i^{-1} = \det\left[\frac{\widetilde{\theta}(z_m + q_{i,m+1} - q_{j,m})}{\widetilde{\theta}(z_m)\widetilde{\theta}(q_{i,m+1} - q_{j,m})}\right]. \tag{5.27}$$

Число параметров $(f_{i,m}, q_{i,m})$ в (5.25), удовлетворяющих ограничениям (5.24) и (5.27), равно размерности $\mathscr{B}(\Gamma)$.

Предположим, что первые координаты $r_m = r(z_m)$ полюсов A в базисе $2\omega_\alpha$ различны, $r_l < r_m$, $l < m$. Ниже мы используем для краткости обозначения $r_0 = 0$, $r_{n+1} = 1$.

Теорема 5.2. *Для матрицы $A \in \mathscr{A}_0(\Gamma)$ общего положения уравнение* (5.1) *имеет единственный набор мероморфных решений Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, которые голоморфны соответственно в полосах $r_k < r(z) < r_{k+1} + h$, имеют следующее свойство монодромии*:

$$\Psi_k(z + 2\omega_2) = e^{\pi i\hat{q}/\omega_1}\Psi_k(z)e^{-2\pi i\hat{s}_k/h}, \qquad \hat{s}_k^{ij} = s_{i,k}\delta^{ij}, \tag{5.28}$$

и таковы, что локальные матрицы связи $M_k = \Psi_k^{-1}\Psi_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$M_k = \alpha_{i,k}\frac{\widetilde{\theta}_h(z - s_{i,k} + s_{j,k-1} - z_k)}{\widetilde{\theta}_h(z - z_k)\widetilde{\theta}_h(s_{i,k} - s_{j,k-1})}, \tag{5.29}$$

где $s_{i,k}$ и $\alpha_{i,k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{r} s_{i,k} = 0, \qquad \prod_{i=1}^{r}\alpha_{i,k}^{-1} = \det\left[\frac{\widetilde{\theta}_h(z_k + s_{i,k} - s_{j,k-1})}{\widetilde{\theta}_h(z_k)\widetilde{\theta}_h(q_{i,k} - q_{j,k-1})}\right]. \tag{5.30}$$

Отображение $\{f_m^i, q_{i,m}\} \mapsto \{\alpha_k^i, s_{i,k}\}$ является взаимно однозначным соответствием открытых подмножеств многообразий, заданных уравнениями (5.24), (5.27) *и* (5.30) *соответственно.*

Доказательство. Существование мероморфных решений Ψ'_k, которые голоморфны в полосах $r_k < r(z) < r_{k+1} + h$ и удовлетворяют (5.28), является следствием леммы 5.1. Матрица $M'_k = (\Psi'_k)^{-1}\Psi'_{k-1}$ имеет период h, т.е. $M'_k(z+h) = M'_k(z)$. Из (5.28) следует, что

$$M'_k(z + 2\omega_2) = e^{2\pi i\hat{s}_k/h}M'_k(z)e^{-2\pi i\hat{s}_{k-1}/h}.$$

В полосе Π_{r_k+h} она имеет простой полюс в точке z_k, где ее вычет равен 1. Следовательно, априори она может быть представлена в виде

$$M'_k = \widetilde{\alpha}_{i,k}\beta_{j,k}\frac{\widetilde{\theta}_h(z - s_{i,k} + s_{j,k-1} - z_k)}{\widetilde{\theta}_h(z - z_k)\widetilde{\theta}_h(s_{i,k} - s_{j,k-1})}. \tag{5.31}$$

Решения Ψ'_k единственны с точностью до умножения $\Psi'_k = \Psi_k F_k$ на диагональную матрицу $F_k^{ij} = F_k^i \delta^{ij}$. Если мы положим $F_{k-1}^j = \beta_{j,k}$, то соответствующие матрицы $M_k = F_k^{-1} M'_k F_{k-1}$ имеют вид (5.29). Ограничение (5.30) эквивалентно условию $\det M_k = 1$.

Доказательство последнего утверждения стандартно в рамках настоящей работы и сводится к задаче Римана–Гильберта на наборе прямых $r_1(z) = r_{1,m} + \varepsilon$. Ее разрешимость для набора матриц M_k общего положения является следствием теоремы Римана–Роха.

Замечание. Эллиптический аналог унитарных уравнений может быть определен для вещественных эллиптических кривых. Обобщение соответствующих результатов, полученных выше для рационального случая, не встречает никаких проблем.

5.2. Изомонодромные преобразования. Для фиксированной эллиптической кривой Γ характеризация уравнений (5.1), имеющих одинаковые данные монодромии, является прямым аналогом соответствующих результатов в рациональном случае.

Из (5.2) следует, что определитель $A \in \mathscr{A}(\Gamma)$ является эллиптической функцией:

$$\det A(z) = D(z) = c \frac{\prod_{\alpha=1}^N \widetilde{\theta}(z-\zeta_\alpha)}{\prod_{k=1}^n \widetilde{\theta}(z-z_k)^{h_k}}, \quad \sum_{\alpha=1}^N \zeta_\alpha = \sum_{k=1}^n h_k z_k, \ N = \sum_j \nu_j. \tag{5.32}$$

Подпространство матричных функций, имеющих фиксированный определитель $D(z)$, обозначается через $\mathscr{A}_D(\Gamma) \subset \mathscr{A}(\Gamma)$.

Лемма 5.2. (i) *Матричные функции $A(z)$ и $A'(z)$ вида* (5.8) *при отображении* (5.23) *соответствуют одной и той же матрице связи $S(z)$ тогда и только тогда, когда они связаны соотношением*

$$A'(z) = R(z+1)A(z)R^{-1}(z), \tag{5.33}$$

где матрица R удовлетворяет следующим соотношениям монодромии:

$$R(z+2\omega_1) = R(z), \qquad R(z+2\omega_2) = e^{\pi i \hat{q}'/\omega_1} R(z)\, e^{-\pi i \hat{q}/\omega_1}. \tag{5.34}$$

(ii) *Если нули ζ_α не конгруэнтны, $(\zeta_\alpha - \zeta_\beta)h^{-1} \notin \mathbb{Z}$, то отображение* (5.23), *ограниченное на $\mathscr{A}_D(\Gamma)$, является инъективным.*

Доказательство леммы непосредственно следует из определения $S(z)$ и свойств монодромии блоховских решений разностных уравнений.

Назовем эллиптические функции D и D' эквивалентными, если их полюсы z_i, z'_i и нули ζ_α, ζ'_α конгруэнтны $\operatorname{mod} h$ друг другу, т.е. $(z_i - z'_i)h^{-1} \in \mathbb{Z}$, $(\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha)h^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.3. *Для любой пары эквивалентных эллиптических функций D и D' существует единственное изомонодромное преобразование*

$$T_D^{D'}(\Gamma)\colon \mathscr{A}_D(\Gamma) \mapsto \mathscr{A}_{D'}(\Gamma). \tag{5.35}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A(z) \in \mathscr{A}_D$ вида (5.8). Элементарные изомонодромные преобразования первого типа определяются парой z_m, ζ_α и левым собственным вектором v вычета $A_m = \operatorname{res}_{z_m} A$, соответствующим ненулевому собственному значению λ (см. (3.7)).

Рассмотрим матричную функцию $R(z)$ такую, что матричные элементы обратной матрицы имеют вид

$$(R^{-1})^{ij} = p^i \frac{\widetilde{\theta}(z - q_i + q'_j - \zeta_\alpha)}{\widetilde{\theta}(z - \zeta_\alpha)}\,, \tag{5.36}$$

где p^i являются координатами нуль-вектора $A(\zeta_\alpha)$,

$$A(\zeta_\alpha)p = 0. \tag{5.37}$$

Вычет R^{-1} в ζ_α имеет ранг 1. Следовательно, определитель R^{-1} имеет простой полюс в ζ_α. Если параметры q'_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{r} q'_i = \zeta_\alpha - z_m + \sum_{i=1}^{m} q_i, \tag{5.38}$$

то $\det R^{-1}$ имеет простой нуль в z_m. В общем положении параметры q'_j однозначно определяются равенством (5.38) и уравнением

$$vR^{-1}(z_m) = 0. \tag{5.39}$$

Из уравнения (5.39) следует, что матрица R имеет вид

$$R^{ij} = v^j \frac{\widetilde{\theta}(z - q'_i + q_j - z_m)}{\widetilde{\theta}(z - z_m)}\,. \tag{5.40}$$

Рассмотрим теперь матрицу A', заданную формулой (5.33). Из (5.37) следует, что она регулярна в ζ_α. Матрица A' имеет полюс ранга 1 в $z_m - 1$. Ранг ее вычета в z_m равен рангу матрицы $A_m R^{-1}(z_m)$. Левое нуль-пространство последней содержит нуль-пространство A_m и вектор v. Следовательно, ранг вычета A' в z_m равен $h_m - 1$. Как и в рациональном случае, дальнейшие итерации позволяют получить матрицу $T_i^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{h_i}}(A)$, которая регулярна в z_m и имеет полюс ранга h_m в $z_m - h$.

Как следует из утверждения теоремы 5.3, изомонодромное преобразование $T_m^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{h_m}}$ однозначно определено выбором полюса z_m и подмножества h_m нулей ζ_{α_s} функции D.

Элементарное изомонодромное преобразование второго типа задается парой нулей ζ_α и ζ_β функции D. Пусть v_α и v_β являются соответствующими нуль-векторами, т.е.

$$A(\zeta_a)v_\alpha = 0, \qquad v_\beta^T A(\zeta_\beta) = 0. \tag{5.41}$$

Тогда, используя те же аргументы, что и выше, получим, что существует единственная с точностью до постоянного множителя матричная функция $R = R_{\alpha,\beta}$ вида

$$R_{\alpha,\beta}^{ij} = v_\beta^j \frac{\widetilde{\theta}(z - q_i^{\alpha,\beta} + q_j - \zeta_\beta - h)}{\widetilde{\theta}(z - \zeta_\beta - h)} \tag{5.42}$$

такая, что

$$(R_{\alpha,\beta}^{-1})^{ij} = v_\alpha^i \frac{\widetilde{\theta}_1(z - q_i + q_j^{\alpha,\beta} - \zeta_\alpha)}{\widetilde{\theta}(z - \zeta_\alpha)}\,. \tag{5.43}$$

Из уравнений (5.41) следует, что матричная функция

$$T^{\alpha|\beta}(A) = R_{\alpha,\beta}^{-1}(z+h)A(z)R_{\alpha,\beta}^{-1}(z)$$

регулярна и обратима в точках ζ_α и ζ_β. Ее полюсы совпадают с полюсами A. Нулями ее детерминанта являются точки $\zeta_\alpha - h$, $\zeta_\beta + h$ и ζ_γ, $\gamma \neq \alpha, \beta$.

Изомонодромное преобразование $T_D^{D'}(\Gamma)$ может быть получено композицией элементарных изомонодромных преобразований. Теорема доказана.

Изомонодромные преобразования, изменяющие эллиптические кривые. Изомонодромные преобразования $T_D^{D'}(\Gamma)$ являются прямыми аналогами изомонодромных преобразований, построенных в третьем параграфе для разностных уравнений с рациональными коэффициентами. В эллиптическом случае имеется еще один тип преобразований, не имеющий аналогов в рациональном случае по простой причине: эти преобразования изменяют периоды эллиптических кривых.

Лемма 5.3. *В общем положении для матрицы $A(z)$, имеющей вид (5.8), существует мероморфная матричная функция $\mathscr{R}(z)$, которая голоморфна в полосе Π_*: $0 < r(z) < 1 + r(h)$ и такова, что*

$$\mathscr{R}(z + 2\omega_1 + h)A(z) = \mathscr{R}(z), \qquad \mathscr{R}(z + 2\omega_2) = e^{2\pi i \hat{q}'/(2\omega_1+h)}\mathscr{R}(z)e^{-\pi i \hat{q}/\omega_1}, \tag{5.44}$$

где $\hat{q}'$ – диагональная матрица. Функция $\mathscr{R}$ единственна с точностью до умножения, $\mathscr{R}' = F\mathscr{R}$, на диагональную матрицу $F \in GL_r$.

Функция $\mathscr{R}$, удовлетворяющая (5.44), является не чем иным, как каноническим блоховским решением разностного уравнения (5.44). Ее существование для матрицы A общего положения следует из утверждения леммы 5.1.

Рассмотрим теперь матричную функцию $A' = \mathscr{R}(z+h)A(z)\mathscr{R}^{-1}(z)$. Из (5.44) следует, что

$$A'(z + 2\omega_1 + h) = A'(z), \quad A'(z + 2\omega_2) = e^{2\pi i \hat{q}'/(2\omega_1+h)}A'(z)e^{-2\pi i \hat{q}'/(2\omega_1+h)}. \tag{5.45}$$

Предположим теперь, что матрица A голоморфна и обратима в полосе $\Pi_{x=0}$. Тогда A' в фундаментальном параллелограмме эллиптической кривой с периодами $(2\omega_1 + h, 2\omega_2)$ имеет те же полюсы z_m, что и A. В этом же параллелограмме нули определителя A' совпадают с нулями ζ_α определителя $\det A$.

Замечание. Если условия $r(h) < r(z_m)$, $r(h) < r(\zeta_a)$ не выполнены, то дополнительный полюс или нуль детерминанта A' в $\Pi_{x=1}$ конгруэнтен $(\operatorname{mod} h)$ его нулю или полюсу в Π_0.

ТЕОРЕМА 5.4. *Если матричная функция A регулярна и обратима в Π_0, то преобразование $A' = \mathscr{R}(z+h)A(z)\mathscr{R}^{-1}(z)$ является изомонодромным.*

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что при выполнении предположения теоремы каноническое блоховское решение Ψ_1 уравнения (5.1) голоморфно и обратимо в полосе $\Pi_{1+r(h)}$. Поэтому блоховские решения уравнения (5.1) с коэффициентом A', определяющие матрицу связи S', равны

$$\Psi'_{x=0} = \mathscr{R}\Psi_0, \qquad \Psi'_{1+r(h)} = \mathscr{R}\Psi_1. \tag{5.46}$$

Следовательно, $S'(z) = S(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C. A. Tracy, H. Widom. Fredholm determinants, differential equations and matrix models // Comm. Math. Phys. 1994. V. 163. №1. P. 33–72.

[2] M. Jimbo, T. Miwa, Ya. Môri, M. Sato. Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent // Phys. D. 1980. V. 1. №1. P. 80–158.

[3] M. L. Mehta. A non-linear differential equation and a Fredholm determinant // J. Physique I. 1992. V. 2. №9. P. 1721–1729.

[4] J. Harnad, A. R. Its. Integrable Fredholm operators and dual isomonodromic deformations // Comm. Math. Phys. 2002. V. 226. №3. P. 497–530.

[5] A. Borodin, P. Deift. Fredholm determinants, Jimbo–Miwa–Ueno τ-functions, and representation theory // Comm. Pure Appl. Math. 2002. V. 55. №9. P. 1160–1230.

[6] M. Jimbo, H. Sakai. A q-analog of the sixth Painlevé equation // Lett. Math. Phys. 1996. V. 38. №2. P. 145–154.

[7] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations // Comm. Math. Phys. 2001. V. 220. №1. P. 165–229.

[8] A. Borodin. Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations // Duke Math. J. 2003. V. 117. №3. P. 489–542.

[9] A. Borodin, D. Boyarchenko. Distribution of the first particle in discrete orthogonal polynomial ensembles // Comm. Math. Phys. 2003. V. 234. №2. P. 287–338.

[10] A. Borodin. Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations // math.CA/0209144.

[11] G. D. Birkhoff. General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. V. 12. №2. P. 243–284.

[12] G. D. Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and allied problems for linear difference and q-difference equations // Proc. Amer. Acad. of Arts and Sci. 1913. V. 49. №9. P. 521–568.

[13] M. van der Put, M. F. Singer. Galois Theory of Difference Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1997. (Lecture Notes in Math. V. 1666.)

[14] L. Schlesinger. Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordung mit festen kritischen Punkten // J. Math. 1912. V. 141. P. 96–145.

[15] Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.

[16] G. Felder, A. Varchenko. q-deformed KZB heat equations: completeness, modular properties and $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ // Adv. Math. 2002. V. 171. №2. P. 228–275.
[17] J. Plemelj. Problems in the Sense of Riemann and Klein. New York: Wiley, 1964.
[18] M. Narasimhan, C. S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface // Ann. of Math. (2). 1965. V. 82. P. 540–567.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
Columbia University, New York, USA
E-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступила в редакцию
28.06.2004