1995 г. ноябрь — декабрь *т. 50, вып. 6(306)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512

СПИНОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ РЕЙСЕНАРСА–ШНАЙДЕРА, НЕАБЕЛЕВА ДВУМЕРИЗОВАННАЯ ЦЕПОЧКА ТОДА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ СКЛЯНИНА

И. Кричевер, А. Забродин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Первая часть настоящей работы является в определенном смысле побочным продуктом предпринятой авторами попытки анализа представлений алгебры Склянина – алгебры, порожденной четырьмя образующими S_0, S_α, $\alpha = 1, 2, 3$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$[S_0, S_\alpha]_- = iJ_{\beta\gamma}[S_\beta, S_\gamma]_+, \tag{1.1}$$

$$[S_\alpha, S_\beta]_- = i[S_0, S_\gamma]_+ \tag{1.2}$$

($[A, B]_\pm = AB \pm BA$, тройка греческих индексов α, β, γ в равенствах (1.1), (1.2) обозначает любую *циклическую* перестановку из $(1, 2, 3)$). Структурные константы алгебры $J_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$J_{\alpha\beta} = \frac{J_\beta - J_\alpha}{J_\gamma}\,, \tag{1.3}$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-16087) и Международного научного фонда (грант № MD-8000).

Исследования второго автора были частично поддержаны Международным научным фондом (грант № MGK300), Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 93-02-14365) и грантом МНТЦ 015.

где J_α – произвольные константы. Таким образом, формулы (1.1)–(1.3) определяют двухпарамерическое семейство квадратичных алгебр. Соотношения (1.1)–(1.3) были введены в [1] как минимальный набор соотношений, необходимых для того, чтобы операторы

$$L(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u) S_a \otimes \sigma_0 \tag{1.4}$$

удовлетворяли уравнению

$$R^{23}(u-v) L^{13}(u) L^{12}(v) = L^{12}(v) L^{13}(u) R^{23}(u-v). \tag{1.5}$$

Здесь σ_α – матрицы Паули; σ_0 – единичная матрица; $W_a(u) = W_a(u \mid \eta, \tau)$, $a = 0, \ldots, 3$, – функции переменной u, зависящие от параметров η и τ:

$$W_a(u) = \frac{\theta_{a+1}(u)}{\theta_{a+1}(\eta/2)} \tag{1.6}$$

($\theta_a(x) = \theta_a(x \mid \tau)$ – стандартные тэта-функции Якоби с характеристиками, отвечающие модулярному параметру τ);

$$R(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a\Big(u + \frac{1}{2}\eta\Big) \sigma_a \otimes \sigma_a \tag{1.7}$$

есть решение квантового уравнения Янга–Бактера

$$R^{23}(u-v) R^{13}(u) R^{12}(v) = R^{12}(v) R^{13}(u) R^{23}(u-v), \tag{1.8}$$

соответствующее так называемой восьмивершинной модели. (R-матрица, отвечающая шестивершинной модели, получается отсюда в пределе $\tau \to 0$.)

В равенствах (1.5), (1.8) мы используем следующие стандартные в теории уравнения Янга–Бакстера обозначения. Для любого модуля M над алгеброй Склянина формула (1.4) задает оператор в тензорном произведении $M \otimes C^2$. Через $L^{13}(u)$ ($L^{12}(u)$) обозначается оператор в тензорном произведении $M \otimes C^2 \otimes C^2$, действующий как оператор $L(u)$ на первом и третьем сомножителях и как единичный оператор на втором сомножителе (как оператор $L(u)$ на первом и втором сомножителях и как единичный оператор на третьем сомножителе). Аналогично, R^{23} – оператор, действующий как единичный на первом сомножителе и как оператор (1.7) на втором и третьем.

К уравнению (1.5), где $R(u)$ – некоторое фиксированное решение уравнения Янга–Бакстера (1.8), сводится проблема перечисления квантовых дискретных систем, решаемых с помощью квантового метода обратной задачи (см. обзоры [2]–[4]). Обобщения алгебры Склянина, отвечающие решениям уравнения Янга–Бакстера, полученным в [5], были предложены в [6], [7]. В настоящее время известны лишь простейшие конечномерные представления этих обобщенных алгебр Склянина. Было бы крайне интересно построить для этих обобщений аналоги представлений исходной алгебры Склянина (1.1)–(1.3), которые были найдены в [8].

Согласно [8] операторы S_a, $a = 0, \dots, 3$, допускают представления в виде разностных операторов второго порядка, действующих в пространстве мероморфных функций $f(x)$ одной комплексной переменной x. Одна из серий таких представлений имеет вид

$$(S_a f)(x) = \frac{(i)^{\delta_{a,2}}\theta_{a+1}(\eta/2)}{\theta_1(x)}\big(\theta_{a+1}(x-\ell\eta)f(x+\eta) - \theta_{a+1}(-x-\ell\eta)f(x-\eta)\big). \tag{1.9}$$

Непосредственные, хотя и весьма трудоемкие вычисления позволяют проверить, что для любых величин τ, η, ℓ операторы (1.9) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1)–(1.3), в которых

$$J_\alpha = \frac{\theta_{\alpha+1}(\eta)\theta_{\alpha+1}(0)}{\theta^2_{\alpha+1}(\eta/2)}\,. \tag{1.10}$$

Таким образом, величины τ, η параметризуют структурные константы алгебры, а ℓ является параметром представления. Отметим, что параметр η в формулах (1.6), (1.7), (1.9) и (1.10) равен *удвоенному* соответствующему параметру из работы [8].

Полагая $f_n = f(n\eta + x_0)$, мы сопоставим операторам (1.9) разностные операторы Шрёдингера

$$S_a f_n = A^a_n f_{n+1} + B^a_n f_{n-1} \tag{1.11}$$

с квазипериодическими коэффициентами. Спектр общего оператора подобного вида в пространстве квадратично-интегрируемых последовательностей ($\ell^2(\mathbb{Z})$) имеет структуру типа канторовского множества. Если параметр η рационален, $\eta = p/q$, то операторы (1.11) имеют периодические коэффициенты (с периодом q). Общий периодический разностный оператор Шрёдингера с периодом q имеет q запрещенных зон в спектре.

Как будет доказано в разделе 5 настоящей работы, оператор S_0, заданный формулой (1.9), обладает удивительным с точки зрения спектральной теории общих операторов свойством:

Теорема 1.1. *Оператор S_0, заданный формулой* (1.9), *для целых положительных значений “спина” ℓ при любом η имеет 2ℓ запрещенных зон в спектре. Его блоховские функции параметризованы точками гиперэллиптической кривой рода 2ℓ, заданной уравнением вида*

$$y^2 = R(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{\ell+1}(\varepsilon^2 - \varepsilon_i^2). \tag{1.12}$$

Блоховские функции $\psi(x, \pm\varepsilon)$ оператора S_0, отвечающие концам зон, образуют инвариантное функциональное подпространство для всех операторов S_a. Соответствующее $4\ell+2$-мерное представление алгебры Склянина является прямой суммой двух эквивалентных $2\ell+1$-мерных представлений алгебры Склянина.

Замечание. В разделе 5 показано, что существует единственный выбор знаков ε_i такой, что блоховские функции $\psi(x, \varepsilon_i)$ порождают *неприводимое* представление алгебры Склянина. К сожалению, мы пока не можем указать конструктивный рецепт такого разбиения концов зон на две группы. Предположительно, если структурные константы вещественны (тогда все ε_i вещественны), неприводимое представление отвечает положительным концам зон: $\varepsilon_i > 0$.

Это утверждение устанавливает связь между представлениями алгебр Склянина и теорией конечнозонного интегрирования солитонных уравнений. (Теория конечнозонных разностных операторов Шрёдингера [9]–[12] была развита в связи с задачами интегрирования уравнений цепочки Тода и разностного уравнения КдФ.) Более того, оно показывает, что оператор S_0 является разностным аналогом классического оператора Ламе

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \ell(\ell+1)\wp(x), \tag{1.13}$$

в который он переходит в пределе $\eta \to 0$. Конечнозонные свойства высших операторов Ламе при произвольных целых значениях ℓ хорошо известны (см. [13] и ссылки там).

В разделе 6 мы предлагаем сравнительно простой способ вывода функциональной реализации (1.9) алгебры Склянина, который в какой-то степени объясняет происхождение этих операторов. Основным для нас является одно замечательное свойство элементарной R-матрицы (1.7), использованное Бакстером в процессе решения восьмивершинной модели и названное им "прохождением пары векторов через вершину" [14]. Надлежащее обобщение этого свойства на L-оператор модели с произвольным спином (1.4) приводит непосредственно к формулам (1.9). Этот подход требует гораздо меньшего объема вычислений, чем прямая подстановка операторов (1.9) в коммутационные соотношения (1.1), (1.2). Отметим, что таким способом автоматически получаются все три серии представлений, найденные Склянином, и еще одна серия, которая, по-видимому, является новой.

В работе [15] была обнаружена замечательная связь между динамикой полюсов эллиптических решений уравнения КдФ, представляющих собой изоспектральную деформацию высших потенциалов Ламе и теорией системы Мозера–Калоджеро. Как было показано в [16], [17], эта связь превращается в полный изоморфизм в случае эллиптических решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП). Используя идеи конечнозонного интегрирования уравнения КП, в работе [18] уравнения движения эллиптической системы Мозера–Калоджеро были явно проинтегрированы в терминах тэта-функций Римана. В работе [19] эти результаты были обобщены на случай спиновых обобщений системы Мозера–Калоджеро.

Основной целью настоящей работы является построение аналогичной теории для эллиптических решений двумеризованной цепочки Тода и ее неабелевых аналогов. Уравнения двумеризованной цепочки Тода имеют вид

$$\partial_+\partial_-\varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n}, \qquad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial t_\pm}. \tag{1.14}$$

Рассмотрим *эллиптические по дискретной переменной* n решения этой системы, т.е. решения вида

$$\varphi_n(t_+, t_-) = \varphi(n\eta + x_0, t_+, t_-) \tag{1.15}$$

и такие, что функция

$$c(x,t_+,t_-)=\exp\bigl(\varphi(x,t_+,t_-)-\varphi(x-\eta,t_+,t_-)\bigr) \tag{1.16}$$

является эллиптической функцией переменной x. В дальнейшем мы покажем, что функция $\exp(\varphi)$ в этом случае имеет вид

$$\exp\varphi(x,t_+,t_-)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(x-x_i+\eta)}{\sigma(x-x_i)},\qquad x_i=x_i(t_+,t_-) \tag{1.17}$$

($\sigma(x\mid\omega_1,\omega_2)$ – стандартная σ-функция Вейерштрасса) и динамика ее полюсов x_i по переменным t_+, t_- совпадает с уравнениями движения релятивистского аналога системы Мозера–Калоджеро – системы Рейсенарса–Шнайдера [20]:

$$\ddot x_i=\sum_{s\neq i}\dot x_i\dot x_s\bigl(V(x_i-x_s)-V(x_s-x_i)\bigr), \tag{1.18}$$

где

$$V(x)=\zeta(x)-\zeta(x+\eta),\qquad \zeta(x)=\frac{\sigma(x)'}{\sigma(x)}\,. \tag{1.19}$$

Гамильтонианы, задающие коммутирующие потоки по $t_\pm$, имеют вид

$$H_\pm=\sum_{j=1}^{n}e^{\pm p_j}\prod_{s\neq j}^{n}\biggl(\frac{\sigma(x_j-x_s+\eta)\sigma(x_j-x_s-\eta)}{\sigma^2(x_j-x_s)}\biggr)^{1/2}, \tag{1.20}$$

а скобки Пуассона между p_i и x_i канонические: $\{p_i,x_k\}=\delta_{ik}$.

Предлагаемый метод доказательства этого утверждения позволяет одновременно построить переменные типа действие-угол для системы (1.18) и явно проинтегрировать ее в терминах тэта-функций. Применение этого подхода к исследованию полюсных систем, связанных с неабелевым аналогом двумеризованной цепочки Тода приводит к спиновому обобщению системы Рейсенарса–Шнайдера.

Это обобщение представляет собой систему N частиц на прямой с координатами x_i и внутренними степенями свободы, описываемыми l-мерными векторами $a_i=(a_{i,\alpha})$ и l-мерными ковекторами $b_i^+=(b_i^\alpha)$, $\alpha=1,\dots,l$. Уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot x_i=\sum_{j\neq i}(b_i^+a_j)(b_j^+a_i)\bigl(V(x_i-x_j)-V(x_j-x_i)\bigr), \tag{1.21}$$

$$\dot a_i=\sum_{j\neq i}a_j(b_j^+a_i)V(x_i-x_j), \tag{1.22}$$

$$\dot b_i^+=-\sum_{j\neq i}b_j^+(b_i^+a_j)V(x_j-x_i). \tag{1.23}$$

Потенциал $V(x)$ дается формулой (1.19) или ее вырождениями (тригонометрическое и рациональное вырождения формулы (1.19) равны $V(x)=(\operatorname{cth}x)^{-1}-(\operatorname{cth}(x+\eta))^{-1}$,

$V(x) = x^{-1} - (x-\eta)^{-1}$, соответственно). Гамильтонова формулировка этой системы требует специального рассмотрения и в данной работе обсуждаться не будет.

Определим число нетривиальных степеней свободы. Исходная система имеет $2N + 2Nl$ динамических переменных x_i, $\dot{x}_i$, $a_{i,\alpha}$, b_i^α. Уравнения движения инвариантны относительно преобразования

$$a_i \to \lambda_i a_i, \qquad b_i \to \frac{1}{\lambda_i} b_i. \tag{1.24}$$

Соответствующие интегралы системы имеют вид $I_i = \dot{x}_i - (b_i^+ a_i)$. Зафиксируем их нулевое значение, полагая

$$\dot{x}_i = (b_i^+ a_i). \tag{1.25}$$

Редуцированная система определяется дополнительными N условиями $\sum_\alpha b_i^\alpha = 1$ (разрушающими симметрию (1.24)). Таким образом, фазовое пространство редуцированной системы имеет размерность $2Nl$. Помимо симметрии (1.24) система инвариантна относительно преобразований

$$a_i \to W^{-1} a_i, \qquad b_i^+ \to b_i^+ W, \tag{1.26}$$

где W – любая матрица из $GL(r, \mathbb{R})$, сохраняющая приведенное выше условие на b_i. Это означает, что W должна оставлять вектор $v = (1, \ldots, 1)$ инвариантным. С учетом этой симметрии размерность фазового пространства полностью редуцированной системы равна

$$\dim \mathscr{M} = 2\left[Nl - \frac{l(l-1)}{2}\right]. \tag{1.27}$$

В следующих трех разделах работы будут построены явные тэта-функциональные формулы для общих решений системы (1.21)–(1.23). Необходимо подчеркнуть, что эти формулы идентичны формулам для решений спиновых обобщений системы Мозера–Калоджеро, которые были получены в работе [19]. Единственное различие заключается в том, что другим является класс вспомогательных спектральных алгебраических кривых (определяющих тэта-функции Римана). Эти кривые могут быть описаны целиком в терминах алгебраической геометрии.

С каждой гладкой алгебраической кривой Γ рода N ассоциирован N-мерный комплексный тор $J(\Gamma)$ (якобиан кривой). Пара точек $P^\pm \in \Gamma$ определяет вектор U в якобиане. Рассмотрим класс кривых, которые обладают следующим свойством: существует такая пара точек на кривой, что пересечение натянутой на вектор U комплексной прямой с якобианом *компактно*, т.е. является некоторой эллиптической кривой $\mathscr{E}_0$. Это означает, что найдутся два комплексных числа $2\omega_\alpha$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1 > 0$, таких, что $2\omega_\alpha U$ принадлежит решетке периодов голоморфных дифференциалов на Γ. С алгебро-геометрической точки зрения задача описания подобных кривых является трансцендентной. Оказывается, что эта задача имеет явное решение, и алгебраические уравнения, задающие такие кривые, представляют собой характеристические уравнения для оператора Лакса системы Рейсенарса–Шнайдера. В случае общего положения $\mathscr{E}_0$ пересекает тэта-дивизор в N точках x_i, и если двигать $\mathscr{E}_0$ в направлении вектора V^+ (V^-), касательного к $\Gamma \in J(\Gamma)$ в точке P^+ (P^-), точки пересечения $\mathscr{E}_0$ с тэта-дивизором двигаются в соответствии с динамикой системы Рейсенарса–Шнайдера. Имеется и аналогичное описание спиновых обобщений этой системы. Соответствующие кривые характеризуются тем, что имеют два набора точек $P_i^{\pm}$, $i = 1, \ldots, l$, таких, что в линейном подпространстве, натянутом на векторы, задаваемые каждой парой точек, существует вектор U, обладающий описанным выше свойством.

Отметим, что геометрическая интерпретация многочастичных интегрируемых систем типа Мозера–Калоджеро–Сазерленда заключается в представлении их как редукций геодезических потоков на симметрических пространствах [21]. Эквивалентным образом, эти системы могут быть получены из свободной динамики в некотором большем фазовом пространстве, обладающем богатой симметрией, с помощью процедуры гамильтоновой редукции [22]. Обобщение на случай бесконечномерных фазовых пространств (кокасательных расслоений к алгебрам и группам токов) было предложено в [23], [24]. Бесконечномерная калибровочная симметрия позволяет осуществить редукцию к системе с конечным числом степеней свободы. Среди возникающих таким образом систем содержатся модели типа Рейсенарса–Шнайдера и эллиптическая модель Мозера–Калоджеро.

Дальнейшее обобщение этого подхода должно состоять в рассмотрении динамических систем на кокасательном расслоении к пространству модулей стабильных голоморфных векторных расслоений на римановых поверхностях. Подобные системы были введены Хитчиным в работе [25], где и была доказана их интегрируемость. Попытка идентифицировать известные многочастичные интегрируемые системы в рамках абстрактного формализма, развитого Хитчиным, была недавно сделана в [26]. При этом потребовалось включить в рассмотрение расслоения на кривых с особенностями. Оказалось, что класс систем, соответствующих римановой сфере с отмеченными точками, включает в себя как спиновые обобщения модели Мозера–Калоджеро, так и интегрируемые магнетики Годена [27] (по поводу последних см. также [28]).

Однако формализм Хитчина, при всей его общности и геометричности, не позволяет получить явные формулы для решений уравнений движения. Более того, в случае общего положения неизвестен даже явный вид самих уравнений движения. Мы надеемся, что метод, впервые предложенный в [18] на примере эллиптической системы Мозера–Калоджеро и развиваемый в настоящей работе, может дать альтернативный подход к системам Хитчина – возможно, менее инвариантный, но обладающий преимуществом большей эффективности формул. В этом смысле нам представляется, что возможности этого метода еще далеко не исчерпаны. По-видимому, с каждой системой Хитчина может быть ассоциирована некоторая вспомогательная линейная задача, имеющая решения специального вида (в этой работе мы называем их дважды-блоховскими решениями), с помощью которых и должны строиться явные формулы для решений уравнений движения.

В целом следует отметить, что данную работу можно разделить на три относительно независимых части. Структура первой части (разделы 2–4) полностью повторяет структуру работы [19]. Более того, чтобы сделать изложение замкнутым и подчеркнуть универсальность предложенного в [18] метода, мы в ряде мест прибегаем к буквальному цитированию [19]. В то же время, стараясь акцентировать внимание на специфике разностных уравнений, мы опустили некоторые технические подробности, общие для обоих случаев. Во второй части (раздел 5) изучаются дискретные аналоги операторов Ламе. Наконец, в третьей части (раздел 6) на основе понятия семейства вакуумных векторов L-оператора дается простой вывод представлений алгебры Склянина разностными операторами. Имеются определенные основания ожидать, что указанные три темы на самом деле связаны между собой гораздо более тесным образом (что и послужило причиной их объединения в одной работе). Краткое обсуждение этого вопроса дается в заключительном разделе 7.

2. Порождающая линейная задача

Уравнения неабелевой двумеризованной цепочки Тода имеют вид

$$\partial_+\left((\partial_- g_n)g_n^{-1}\right) = g_n g_{n-1}^{-1} - g_{n+1}g_n^{-1}. \tag{2.1}$$

Эти уравнения эквивалентны условию совместности переопределенной системы линейных задач

$$\partial_+\psi_n(t_+,t_-) = \psi_{n+1}(t_+,t_-) + v_n(t_+,t_-)\psi_n(t_+,t_-), \tag{2.2}$$

$$\partial_-\psi_n(t_+,t_-) = c_n(t_+,t_-)\psi_{n-1}(t_+,t_-), \tag{2.3}$$

где

$$c_n = g_n g_{n-1}^{-1}, \qquad v_n = (\partial_+ g_n)g_n^{-1} \tag{2.4}$$

(g_n – матрица размера $l\times l$). Как и в случае системы Мозера–Калоджеро и ее спиновых обобщений [18], [19] в основе изоморфизма системы (1.21)–(1.23) и полюсной системы, отвечающей эллиптическим решениям двумеризованной неабелевой цепочки Тода, лежит утверждение о том, что вспомогательное линейное уравнение с эллиптическими коэффициентами имеет бесконечное число *дважды-блоховских* решений.

Мы называем *дважды-блоховской функцией* мероморфную вектор-функцию $f(x)$, обладающую следующими свойствами монодромии:

$$f(x+2\omega_\alpha) = B_\alpha f(x), \qquad \alpha = 1,2. \tag{2.5}$$

Здесь ω_α – периоды эллиптической кривой. Комплексные числа B_α называются *блоховскими множителями.* Другими словами, f является мероморфным сечением некоторого векторного расслоения на эллиптической кривой. Любую дважды-блоховскую функцию можно представить как линейную комбинацию элементарных, которые мы сейчас опишем явно.

Определим функцию $\Phi(x,z)$ следующей формулой

$$\Phi(x,z) = \frac{\sigma(z+x+\eta)}{\sigma(z+\eta)\sigma(x)}\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{x/(2\eta)}. \tag{2.6}$$

Используя теоремы сложения, которым удовлетворяет σ-функция Вейерштрасса, несложно проверить, что эта функция удовлетворяет разностному аналогу уравнения Ламе:

$$\Phi(x+\eta,z)+c(x)\Phi(x-\eta,z)=E(z)\Phi(x,z), \tag{2.7}$$

где

$$c(x)=\frac{\sigma(x-\eta)\sigma(x+2\eta)}{\sigma(x+\eta)\sigma(x)}\,. \tag{2.8}$$

Параметр z играет роль спектрального параметра и определяет параметризацию собственных значений $E(z)$ разностного оператора Ламе

$$E(z)=\frac{\sigma(2\eta)}{\sigma(\eta)}\,\frac{\sigma(z)}{(\sigma(z-\eta)\sigma(z+\eta))^{1/2}}\,. \tag{2.9}$$

Риманова поверхность $\widehat{\Gamma}_0$ функции $E(z)$ двулистно накрывает исходную эллиптическую кривую Γ_0 с периодами $2\omega_\alpha$, $\alpha=1,2$. Ее род равен 2.

Функция $\Phi(x,z)$ как функция переменной z является двоякопериодической:

$$\Phi(x,z+2\omega_\alpha)=\Phi(x,z), \tag{2.10}$$

где $2\omega_\alpha$ – периоды исходной эллиптической кривой. Для значений x таких, что отношение $x/2\eta$ – целое число, Φ является однозначной мероморфной функцией на Γ_0. Если отношение $x/2\eta$ полуцелое, то Φ становится однозначной на $\widehat{\Gamma}_0$. Для общих значений x можно выделить однозначную ветвь $\Phi(x,z)$, разрезав эллиптическую кривую Γ_0 между точками $z=\pm\eta$.

Функция $\Phi(x,z)$, как функция переменной x, является дважды-блоховской, т.е.

$$\Phi(x+2\omega_\alpha,z)=T_\alpha(z)\Phi(x,z), \tag{2.11}$$

где блоховские множители даются формулой

$$T_\alpha(z)=\exp\bigl(2\zeta(\omega_\alpha)(z+\eta)\bigr)\left(\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right)^{\omega_\alpha/\eta}. \tag{2.12}$$

В фундаментальном параллелограмме со сторонами $2\omega_\alpha$ функция $\Phi(x,z)$ имеет единственный полюс в точке $x=0$:

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{x}+A+O(x),\qquad A=\zeta(z+\eta)+\frac{1}{2\eta}\ln\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\,. \tag{2.13}$$

Любая дважды-блоховская функция $f(x)$ с блоховскими множителями B_α (по крайней мере один из которых не равен 1) и с простыми полюсами в точках x_i фундаментального параллелограмма может быть представлена в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}s_i\Phi(x-x_i,z)k^{x/\eta}, \tag{2.14}$$

где z и комплексный параметр k связаны соотношением

$$B_\alpha = T_\alpha(z) k^{2\omega_\alpha/\eta}. \tag{2.15}$$

(Любая пара блоховских множителей может быть записана в виде (2.15) при подходящем выборе z и k.)

Действительно, пусть x_i, $i = 1, \dots, m$, – полюса $f(x)$ в фундаментальной области решетки с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Тогда существуют векторы s_i такие, что функция

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i \Phi(x - x_i, z) k^{x/\eta}$$

голоморфна как функция x в фундаментальной области. Она является дважды-блоховской с теми же блоховскими множителями, что и функция f. Любая нетривиальная дважды-блоховская функция, у которой по крайней мере один блоховский множитель не равен 1, должна иметь по крайней мере один полюс в фундаментальной области. Следовательно, $F = 0$.

Калибровочное преобразование

$$f(x) \mapsto \widetilde{f}(x) = f(x) e^{ax}, \tag{2.16}$$

где a – произвольная константа, не меняет положение полюсов любой функции и преобразует дважды-блоховские функции в дважды-блоховские. Если B_α – блоховские множители для функции f, то блоховские множители для $\widetilde{f}$ равны:

$$\widetilde{B}_1 = B_1 e^{2a\omega_1}, \qquad \widetilde{B}_2 = B_2 e^{2a\omega_2}. \tag{2.17}$$

Назовем две пары блоховских множителей *эквивалентными*, если они связаны соотношением (2.17) при некотором a. Заметим, что для всех эквивалентных пар блоховских множителей величина

$$B_1^{\omega_2} B_2^{-\omega_1} = B \tag{2.18}$$

является константой, зависящей только от класса эквивалентности.

Теорема 2.1. *Уравнения*

$$\partial_t \Psi(x,t) = \Psi(x+\eta, t) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t) b_i^+(t) V\big(x - x_i(t)\big) \Psi(x,t), \tag{2.19}$$

$$-\partial_t \Psi^+(x,t) = \Psi^+(x-\eta, t) + \Psi^+(x,t) \sum_{i=1}^{N} a_i(t) b_i^+(t) V\big(x - x_i(t)\big) \tag{2.20}$$

имеют N пар линейно независимых дважды-блоховских решений $\Psi_{(s)}(x,t)$, $\Psi^+_{(s)}(x,t)$ с простыми полюсами в точках $x_i(t)$ и $(x_i(t) - \eta)$ соответственно,

$$\Psi_{(s)}(x + 2\omega_\alpha, t) = B_{\alpha,s} \Psi_{(s)}(x,t), \qquad \Psi^+_{(s)}(x - 2\omega_\alpha, t) = B_{\alpha,s} \Psi_{(s)}(x,t), \tag{2.21}$$

с эквивалентными блоховскими множителями (т.е. такими, что величина

$$B_{1,s}^{\omega_2} B_{2,s}^{-\omega_1} = B \tag{2.22}$$

не зависит от s), если и только если $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.21), *и векторы a_i, b_i^+ удовлетворяют связям* (1.25) *и системе уравнений*

$$\dot{a}_i = \sum_{j \neq i} a_j (b_j^+ a_i) V(x_i - x_j) - \lambda_i a_i, \tag{2.23}$$

$$\dot{b}_i^+ = -\sum_{j \neq i} b_j^+ (b_i^+ a_j) V(x_j - x_i) + \lambda_i b_i^+, \tag{2.24}$$

где $\lambda_i = \lambda_i(t)$ – скалярные функции.

Замечание. Система (1.21), (2.23), (2.24) "калибровочно эквивалентна" системе (1.21)–(1.23). Это означает, что если (x_i, a_i, b_i^+) удовлетворяют уравнениям (1.21), (1.23), (1.24), то x_i и вектор-функции

$$\widehat{a}_i = a_i q_i, \quad \widehat{b}_i^+ = b_i q_i^{-1}, \quad q_i = \exp\left(\int^t \lambda_i(t')\, dt'\right) \tag{2.25}$$

являются решениями системы (1.21)–(1.23).

Теорема 2.2. *Пусть уравнения* (2.19), (2.20) *имеют N линейно независимых дважды-блоховских решений с блоховскими множителями, удовлетворяющими соотношению* (2.22). *Тогда имеется бесконечное семейство таких решений. Все они могут быть представлены в виде*

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} s_i(t,k,z) \Phi\big(x - x_i(t), z\big) k^{x/\eta}, \tag{2.26}$$

$$\Psi^+ = \sum_{i=1}^{N} s_i^+(t,k,z) \Phi\big(-x + x_i(t) - \eta, z\big) k^{-x/\eta}, \tag{2.27}$$

где s_i – l-мерный вектор, $s_i = (s_{i,\alpha})$, s_i^+ – l-мерный ковектор, $s_i^+ = (s_i^\alpha)$. Множество соответствующих пар (z,k) параметризуется точками алгебраической кривой, определенной уравнением вида

$$R(k,z) = k^N + \sum_{i=1}^{N} r_i(z) k^{N-i} = 0.$$

Доказательство теоремы 2.1. Выше было отмечено, что $\Psi_{(s)}(x,t)$ (как и всякая дважды-блоховская функция) может быть записана в виде (2.26) с некоторыми z_s, k_s. Из (2.22) следует, что z_s должны совпадать:

$$z_s = z, \qquad s = 1, \ldots, N.$$

Подставим функцию $\Psi(x,t,z,k)$ вида (2.26) (с этим значением z) в уравнение (2.19). Так как любая функция с такими трансляционными свойствами имеет как минимум один полюс, то равенства (2.26), (2.23) выполнены тогда и только тогда, когда правая и левая части этих равенств имеют одинаковые сингулярные части в точках $x = x_i$ и $x = x_i - \eta$.

Приравнивание коэффициентов перед $(x-x_i)^{-2}$ в левой и правой частях (2.19) дает равенства

$$\dot{x}_i s_i = a_i(b_i^+ s_i), \tag{2.28}$$

откуда следует, что вектор s_i пропорционален вектору a_i:

$$s_{i,\alpha}(t,k,z) = c_i(t,k,z)a_{i,\alpha}(t), \tag{2.29}$$

и векторы a_i, b_i удовлетворяют связям (1.25). Сокращение коэффициентов перед $(x - x_i + \eta)^{-1}$ дает условия

$$-ks_i + \sum_{j\neq i} a_i b_i^+ s_j \Phi(x_i - x_j - \eta, z) = 0, \tag{2.30}$$

которые с учетом (1.25) и (2.29) могут быть переписаны как матричное уравнение на вектор $C = (c_i)$:

$$\big(L(t,z) - kI\big)C = 0, \tag{2.31}$$

где I – единичная матрица, а матрица Лакса $L(t,z)$ дается формулой

$$L_{ij}(t,z) = (b_i^+ a_j)\Phi(x_i - x_j - \eta, z). \tag{2.32}$$

Наконец, сокращение полюсов $(x-x_i)^{-1}$ приводит к условиям

$$\dot{s}_i - \left(\sum_{j\neq i} a_j b_j^+ V(x_i - x_j) + \big(A - \zeta(\eta)\big)a_i b_i^+\right)s_i - a_i \sum_{j\neq i}(b_i^+ s_j)\Phi(x_i - x_j, z) = 0, \tag{2.33}$$

которые с учетом (2.29) дают уравнения движения (2.23), причем

$$\lambda_i(t) = \frac{\dot{c}_i}{c_i} + \big(\zeta(\eta) - A\big)\dot{x}_i - \sum_{j\neq i}(b_i^+ a_j)\Phi(x_i - x_j, z)\frac{c_j}{c_i}\,. \tag{2.34}$$

Записывая эти равенства в матричном виде,

$$\big(\partial_t + M(t,z)\big)C = 0, \tag{2.35}$$

находим второй элемент пары Лакса:

$$M_{ij}(t,z) = \big(-\lambda_i + (\zeta(\eta) - A)\dot{x}_i\big)\delta_{ij} - (1-\delta_{ij})b_i^+ a_j \Phi(x_i - x_j, z). \tag{2.36}$$

Подстановка ковектора Ψ^+ (2.27) в уравнение (2.20) проводится совершенно аналогично и приводит к соотношениям

$$s_i^\alpha(t,k,z) = c_i^+(t,k,z) b_i^\alpha(t) \tag{2.37}$$

и условиям на ковектор $C^+ = (c_i^+)$:

$$C^+(L(t,z) - kI) = 0, \tag{2.38}$$

$$-\partial_t C^+ + C^+ M^{(+)}(t,z) = 0, \tag{2.39}$$

где L дается формулой (2.32), а $M^{(+)}$ получается из (2.36) заменой $\lambda_i(t)$ на

$$\lambda_i^+(t) = -\frac{\dot{c}_i^+}{c_i^+} + \big(\zeta(\eta) - A\big)\dot{x}_i - \sum_{j\neq i}(b_j^+ a_i)\Phi(x_j - x_i, z)\frac{c_j^+}{c_i^+}\,. \tag{2.40}$$

Кроме того, ковектор b_i^+ удовлетворяет уравнению движения

$$\dot{b}_i^+ = -\sum_{j\neq i} b_j^+(b_i^+ a_j)V(x_j - x_i) + \lambda_i^+ b_i^+. \tag{2.41}$$

Условие теоремы означает, что уравнения (2.31), (2.35) и (2.38), (2.39) имеют N линейно независимых решений (соответствующих различным значениям k). Условиями совместности уравнений (2.31), (2.35) и (2.38), (2.39) являются уравнения Лакса

$$\dot{L} + [M, L] = 0, \qquad \dot{L} + [M^{(+)}, L] = 0. \tag{2.42}$$

Из этих равенств следует, в частности, что $\lambda_i = \lambda_i^+$.

Функция $\Phi(x,z)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$\Phi(x-\eta,z)\Phi(y,z) - \Phi(x,z)\Phi(y-\eta,z) = \Phi(x+y-\eta,z)\big(V(-x) - V(-y)\big), \tag{2.43}$$

$$\Phi'(x-\eta,z) = -\Phi(x-\eta,z)(V(-x) + \zeta(\eta) - A) - \Phi(-\eta,z)\Phi(x,z) \tag{2.44}$$

(константа A определена в (2.13)). Первое из них эквивалентно трехчленному функциональному уравнению для σ-функции Вейерштрасса, а второе следует из первого при $y \to 0$.

Равенства (2.43) и (2.44) позволяют прямыми вычислениями доказать следующее утверждение, завершающее доказательство теоремы.

Лемма 2.1. *Для матриц L и M, определенных формулами* (2.32), (2.36), *в которых a_i и b_i^+ удовлетворяют уравнениям* (2.23) *и соотношению* (1.25), *уравнения Лакса* (2.42) *выполнены тогда и только тогда, когда $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям* (1.21).

Доказательство теоремы 2.2. Выше было доказано, что уравнения (2.19), (2.20) имеют N линейно независимых решений, если уравнения (2.23), (2.24), связи (3.9) и уравнения Лакса (2.42) выполняются при некотором значении параметра z. Но тогда (в силу утверждения леммы 2.1) уравнения Лакса выполнены при всех значениях спектрального параметра z. Следовательно, для каждого z можно задать дважды-блоховские решения уравнения (2.19) формулами (2.26) и (2.29), где c_i – компоненты общего решения уравнений (2.31) и (2.35).

Из (2.31) следует, что все допустимые пары спектральных параметров z и k удовлетворяют характеристическому уравнению

$$R(k,z) \equiv \det\bigl(kI - L(t,z)\bigr) = 0.$$

В начале следующего раздела будет доказано, что это уравнение определяет алгебраическую кривую $\widehat{\Gamma}$ конечного рода. Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 1. В абелевом случае ($l = 1$) операторы лаксовой пары после “калибровочного” преобразования с матрицей $U_{ij} = a_i\delta_{ij}$ могут быть представлены в виде

$$L_{ij}^{(l=1)} = \dot{x}_i \Phi(x_i - x_j - \eta, z), \tag{2.45}$$

$$M_{ij}^{(l=1)} = \biggl(\bigl(\zeta(\eta) - A\bigr)\dot{x}_i - \sum_{s\neq i} V(x_i - x_s)\dot{x}_s\biggr)\delta_{ij} - (1-\delta_{ij})\dot{x}_i\Phi(x_i - x_j, z). \tag{2.46}$$

Эти операторы эквивалентны лаксовой паре, полученной в [29], [30].

Замечание 2. В абелевом случае достаточно потребовать, чтобы только одно из уравнений (2.19), (2.20) имело N линейно независимых дважды-блоховских решений с блоховскими множителями, удовлетворяющими условию (2.22).

3. Прямая задача

Из уравнения Лакса (2.42) следует, что коэффициенты характеристического уравнения

$$R(k,z) \equiv \det\bigl(kI - L(t,z)\bigr) = 0. \tag{3.1}$$

не зависят от времени. Заметим, что они инвариантны относительно симметрий (1.24), (1.26).

Теорема 3.1. *Коэффициенты $r_i(z)$ характеристического уравнения* (3.1)

$$R(k,z) = k^N + \sum_{i=1}^{N} r_i(z) k^{N-i} \tag{3.2}$$

не зависят от t и имеют вид

$$r_i(z) = \phi_i(z)\Big(I_{i,0} + (1-\delta_{l,1})I_{i,1}\widetilde{s}_i(z) + \sum_{s=2}^{m_i} I_{i,s}\partial_z^{s-2}\wp(z+\eta)\Big), \tag{3.3}$$

где

$$m_i = i-1, \quad i=1,\dots,l; \qquad m_i = l-1, \quad i=l+1,\dots,N; \tag{3.4}$$

$$\phi_i(z) = \frac{\sigma(z+\eta)^{(i-2)/2}\sigma(z-(i-1)\eta)}{\sigma(z-\eta)^{i/2}}, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{s}_i(z) = \frac{\sigma(z-\eta)\sigma(z-(i-3)\eta)}{\sigma(z+\eta)\sigma(z-(i-1)\eta)}. \tag{3.6}$$

В окрестности точки $z=-\eta$ функция $R(k,z)$ может быть представлена в виде

$$R(k,z) = \prod_{i=1}^{l}\big(k+(z+\eta)^{-1/2}h_i(z+\eta)\big)\prod_{i=l+1}^{N}\big(k+(z+\eta)^{1/2}h_i(z+\eta)\big), \tag{3.7}$$

где $h_i(z)$ – регулярные в окрестности точки $z=0$ функции переменной z.

Доказательство. Матричные элементы L_{ij} в силу (2.10) являются двояко-периодическими функциями переменной z. Поэтому их можно рассматривать как однозначные функции на исходной эллиптической кривой Γ_0 с разрезом между точками $z=\pm\eta$. Покажем прежде всего, что коэффициенты $r_i(z)$ характеристического полинома (3.1) являются мероморфными функциями на римановой поверхности $\widehat{\Gamma}_0$ функции $E(z)$, определенной равенством (2.9). (Последнее означает, что $r_i(z)$ являются двузначными функциями переменной z, имеющими корневое ветвление в точках $z=\pm\eta$.)

Сформулированное утверждение следует из того, что $L(t,z)$ может быть представлена в виде

$$L(t,z) = G(t,z)\widetilde{L}(t,z)G^{-1}(t,z), \qquad G_{ij} = \delta_{ij}\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{x_i(t)/(2\eta)}, \tag{3.8}$$

где матричные элементы $\widetilde{L}(t,z)$ имеют корневые особенности в окрестностях точек $z=\pm\eta$. Более того, из равенств

$$\widetilde{L}_{ij}(t,z) = \frac{(b_i^+a_j)}{[\sigma(z-\eta)\sigma(z+\eta)]^{1/2}}\,\frac{\sigma(z+x_i-x_j)}{\sigma(x_i-x_j-\eta)} \tag{3.9}$$

следует, что $r_{2i}(z)$ являются однозначными мероморфными функциями переменной z (эллиптическими функциями), а $r_{2i+1}(z)$ являются мероморфными функциями на $\widehat{\Gamma}_0$, нечетными относительно инволюции $\widehat{\tau}_0\colon\widehat{\Gamma}_0\to\widehat{\Gamma}_0$, переставляющей листы накрытия

$\widehat{\Gamma}_0 \to \Gamma_0$ (эта инволюция соответствует изменению знака корня: $E(z) \to -E(z)$). Значит, кривая $\widehat{\Gamma}$ инвариантна относительно инволюции

$$\widehat{\tau}\colon \widehat{\Gamma} \mapsto \widehat{\Gamma}, \qquad \widehat{\tau}(k,E) \mapsto (-k,-E), \tag{3.10}$$

накрывающей инволюцию $\widehat{\tau}_0$.

Обозначим через Γ фактор-кривую

$$\Gamma := \{\widehat{\Gamma}/\widehat{\tau}\}. \tag{3.11}$$

Эта кривая N-листно накрывает исходную эллиптическую кривую

$$\Gamma \mapsto \Gamma_0 \tag{3.12}$$

и может быть задана уравнением

$$\widehat{R}(K,z) = K^N + \sum_{i=1}^{N} R_i(z) K^{N-i} = 0, \tag{3.13}$$

где

$$K = k\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{1/2}, \qquad R_i(z) = r_i(z)\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{i/2}. \tag{3.14}$$

Остановимся несколько подробнее на смысле сделанного утверждения. Коэффициенты $R_j(z)$ уравнения (3.13) являются мероморфными функциями комплексной переменной z, удовлетворяющими следующим трансляционным свойствам:

$$R_j(z+2\omega_\alpha) = R_j(z) e^{-2j\zeta(\omega_\alpha)\eta}. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.13) задает риманову поверхность $\widetilde{\Gamma}$, которая N-листно накрывает комплексную плоскость. В силу (3.15) эта поверхность инвариантна относительно преобразований

$$z \mapsto z + 2\omega_\alpha, \qquad K \mapsto K e^{-2\zeta(\omega_\alpha)\eta}. \tag{3.16}$$

Фактор римановой поверхности $\widetilde{\Gamma}$ по преобразованиям (3.16) является алгебраической кривой Γ, накрывающей эллиптическую кривую с периодами $2\omega_\alpha$.

Докажем теперь равенство (3.7). Оно следует из того, что ранг первого слагаемого в разложении $\widetilde{L}(t,z)$ в окрестности точки $z=-\eta$,

$$\widetilde{L}_{ij}(t,z) = \frac{(b_i^+ a_j)}{[\sigma(-2\eta)(z+\eta)]^{1/2}} + O\big((z+\eta)^{1/2}\big), \tag{3.17}$$

равен l. Соответствующее $(N-l)$-мерное подпространство собственных векторов $C=(c_1,\ldots,c_N)$, отвечающих нулевому собственному значению, определяется равенствами

$$\sum_{j=1}^{N} c_j a_{j,\alpha}=0, \qquad \alpha=1,\ldots,l. \tag{3.18}$$

Вернемся к определению явного вида коэффициентов характеристического уравнения (3.1). Так как матричные элементы $\widetilde{L}(t,z)$ имеют простые полюса в точке $z=\eta$, то в общем положении функция $r_i(z)$ имеет в этой точке полюс порядка i. Из (3.7) следует, что в точке $z=-\eta$ эта функция при $i=1,\ldots,l$ имеет полюс порядка i, при $i=l+1,\ldots,2l$ имеет полюс порядка $2l-i$ и, наконец, при $i=2l+1,\ldots,N$ она имеет нуль порядка $i-2l$, т.е.

$$r_i(z)=(z+\eta)^{-i/2}\rho_i(z+\eta), \qquad i=1,\ldots,l, \tag{3.19}$$

$$r_i(z)=(z+\eta)^{i/2-l}\rho_i(z+\eta), \qquad i=l+1,\ldots,N, \tag{3.20}$$

где $\rho_i(z)$ – регулярные функции. Перечисленные свойства функций $r_i(z)$ вместе со свойствами их четности позволяют представить их в виде (3.3), (3.4). (Отметим, что функция $\phi_i(z)$, заданная формулой (3.5), имеет полюс порядка i в точке $z=\eta$ и нуль порядка $i-2$ в точке $z=-\eta$.)

Важное замечание. Необходимо подчеркнуть, что из равенства (3.7) следует, что уравнение (3.1) задает особую алгебраическую кривую. В самом деле, (3.7) показывает, что $(N-l)$ листов соответствующего разветвленного накрытия пересекаются в точке $(z=-\eta,\ k=0)$. Ниже мы сохраним обозначение Γ для гладкой кривой с разрешенной особенностью в этой точке.

Коэффициенты $I_{i,s}$ в представлении (3.3) коэффициентов характеристического полинома являются интегралами движения рассматриваемой системы. Их число равно $Nl-l(l-1)/2$, т.е. половине размерности редуцированного фазового пространства. (Из результатов следующего раздела будет следовать, что эти интегралы независимы.)

Лемма 3.1. *В общем положении род g спектральной кривой Γ, заданной уравнением* (3.13), *равен* $Nl-l(l+1)/2+1$.

Доказательство. Найдем прежде всего род кривой $\widehat{\Gamma}$, заданной уравнением (3.1). В силу формулы Римана–Гурвица ее род $\widehat{g}$ определяется из соотношения $2\widehat{g}-2=2N+\nu$, где ν – число точек ветвления кривой $\widehat{\Gamma}$ над $\widehat{\Gamma}_0$, т.е. число точек z, для которых $R(k,z)=0$ имеет двукратный корень. Это число равно числу нулей функции $\partial_k R(k,z)$ на поверхности $R(k,z)=0$ вне прообразов точки $z=-\eta$ (из-за отмеченной выше сингулярности исходной кривой). Функция $\partial_k R(k,z)$ в прообразах точки $z=\eta$ имеет полюса кратности $(N-1)$. Полюса той же кратности она имеет еще в l прообразах точки $z=-\eta$, отвечающих первым l сомножителям формулы (3.7). В остальных прообразах $z=-\eta$ она имеет нули кратности $(N-l)(N-2l-1)$. Следовательно, $\nu=4lN-2l(l+1)$. Кривая $\widehat{\Gamma}$ двулистно накрывает спектральную кривую Γ, причем соответствующее накрытие имеет $2N$ точек ветвления (в прообразах $z=\pm\eta$).

Формула Римана–Гурвица дает в этом случае соотношение $2\widehat{g}-2=2(2g-2)+2N$, которое вместе с предшествующими равенствами доказывает утверждение леммы.

Характеристическое уравнение (3.1) не только определяет спектральную кривую (3.13), но и позволяет выделить на этой кривой два набора точек. Обозначим через P_i^+, $i=1,\ldots,l$, те из прообразов точки $z=-\eta$, в которых функция k имеет полюс (они соответствуют первым l сомножителям разложения (3.7) функции $R(k,z)$). Так как числа нулей и полюсов мероморфной функции совпадают, то из (3.14) и (3.7) следует, что функция k на неприведенной спектральной кривой $\widehat{\Gamma}$ имеет $2l$ нулей вне прообразов точки $z=-\eta$. Этим нулям отвечают l точек P_i^-, $i=1,\ldots,l$, на спектральной кривой Γ:

$$k(P_i^-)=0. \tag{3.21}$$

В общем положении точки P_i^- расположены по одной над нулями z_i^- функции $r_N(z)$, отличными от $z=-\eta$:

$$r_N(z)=\widetilde{I}_{N,0}\frac{\sigma^{(N-l)/2}(z+\eta)}{\sigma^{N/2}(z-\eta)}\prod_{i=1}^{l}\sigma(z-z_i^-). \tag{3.22}$$

(При $l=1$ вторая из отмеченных точек P_1^- расположена над точкой $z=(N-1)\eta$.)

Теорема 3.2. *Компоненты $\Psi_\alpha(x,t,P)$ решения $\Psi(x,t,P)$ уравнения* (2.19) *определены на N-листной накрывающей Γ исходной эллиптической кривой с разрезами между точками P_i^+ и P_i^-, $i=1,\ldots,l$. Вне этих разрезов они мероморфны. Для начальных данных общего положения кривая Γ является гладкой кривой рода $g=Nl-\frac{1}{2}l(l+1)+1$, и Ψ_α имеет $(g-1)$ полюсов $\gamma_1,\ldots,\gamma_{g-1}$, которые не зависят от переменных x,t. В окрестности точек P_i^+, $i=1,\ldots,l$, функция Ψ_α имеет вид*

$$\Psi_\alpha(x,t,P)=\left(\chi_0^{\alpha i}+\sum_{s=1}^{\infty}\chi_s^{\alpha i}(x,t)(z+\eta)^s\right)\left(\varkappa_i(z+\eta)^{-1}\right)^{x/\eta}e^{\varkappa_i(z+\eta)^{-1}t}\Psi_1(0,0,P), \tag{3.23}$$

где $\chi_0^{\alpha i}$ – константы, не зависящие от x, t, а $\varkappa_i$ – ненулевые собственные значения матрицы $(b_i^+a_j)$. В окрестности точек P_i^- функция Ψ_α имеет вид

$$\Psi_\alpha(x,t,P)=(z-z_i^-)^{x/\eta}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\widetilde{\chi}_s^{\alpha i}(x,t)(z-z_i^-)^s\right)\Psi_1(0,0,P) \tag{3.24}$$

(z_i^- – проекции точек P_i^- на исходную эллиптическую кривую; они определяются равенством (3.22)*). Граничные значения $\Psi_\alpha^{(\pm)}$ функции Ψ_α на берегах разрезов связаны соотношением*

$$\Psi_\alpha^{(+)}=\Psi_\alpha^{(-)}e^{2\pi ix/\eta}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Первым шагом доказательства утверждений теоремы является исследование аналитических свойств совместного решения уравнений (2.31) и (2.35).

Обозначим через $\widehat{\Gamma}^*$ кривую $\widehat{\Gamma}$ с разрезами между прообразами P_i^+ точки $z = -\eta$ и прообразами Q_i^- точки $z = \eta$, $i = 1, \ldots, N$. Для общей точки $\widehat{P}$ кривой $\widehat{\Gamma}$, т.е. для пары $(k, z) = \widehat{P}$, удовлетворяющей уравнению (3.1), существует единственный собственный вектор $C(0, \widehat{P})$ матрицы $L(0, z)$, нормированный условием, что его первая компонента равна единице, $c_1(0, P) = 1$. Все остальные компоненты $c_i(0, \widehat{P})$ равны $\Delta_i(0, \widehat{P})/\Delta_1(0, \widehat{P})$, где $\Delta_i(0, P)$ – миноры матрицы $kI - L(0, z)$. Следовательно, они являются мероморфными функциями на $\widehat{\Gamma}^*$. Полюсы $c_i(0, \widehat{P})$ совпадают с нулями на $\widehat{\Gamma}^*$ первого главного минора

$$\Delta_1(0, \widehat{P}) = \det\bigl(k\delta_{ij} - L_{ij}(0, z)\bigr) = 0, \qquad i, j > 1. \tag{3.26}$$

Следовательно, эти полюсы зависят только от начальных данных задачи Коши для рассматриваемой системы.

Лемма 3.2. *Координаты $c_j(0, \widehat{P})$ собственного вектора $C(0, \widehat{P})$ мероморфны на $\widehat{\Gamma}^*$. Граничные значения $c_j^{\pm}$ функций $c_j(0, \widehat{P})$ на берегах разрезов удовлетворяют соотношению*

$$c_j^+ = c_j^- e^{\pi i (x_j(0) - x_1(0))/\eta}. \tag{3.27}$$

В окрестности точек P_i^+ функции $c_j(0, \widehat{P})$ имеют вид

$$c_j(0, \widehat{P}) = \bigl(c_j^{(i,+)}(0) + O(z + \eta)\bigr)(z + \eta)^{(x_1(0) - x_j(0))/(2\eta)}, \tag{3.28}$$

где $c_j^{(i,+)}(t)$ – собственные векторы вычета матрицы $\widetilde{L}(0, z)$ в точке $z = -\eta$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{N} (b_k^+ a_j) c_j^{(i,+)}(t) = -\varkappa_i c_k^{(i,+)}(t). \tag{3.29}$$

В окрестности точек Q_i^- функции $c_j(0, \widehat{P})$ имеют вид

$$c_j(0, \widehat{P}) = \bigl(c_j^{(i,-)}(0) + O(z - \eta)\bigr)(z - \eta)^{(x_j(0) - x_1(0))/(2\eta)}, \tag{3.30}$$

где $c_j^{(i,-)}(t)$ – собственные векторы вычета матрицы $\widetilde{L}(0, z)$ в точке $z = \eta$.

Доказательство утверждений леммы следует из того, что согласно (3.8)

$$C(0, \widehat{P}) = G(0, z)\widetilde{C}(0, P), \tag{3.31}$$

где $G(t, z)$ определено в (3.8), а $\widetilde{C}(0, P)$ – собственный вектор матрицы $\widetilde{L}(0, z)$. Матричные элементы $\widetilde{L}(0, z)$ аналитичны на разрезах между точками $z = \pm\eta$. Следовательно, $\widetilde{C}(0, P)$ не имеют скачков на разрезах. Это доказывает равенство (3.27). Равенства (3.28) и (3.30) являются непосредственными следствиями того, что $\widetilde{L}(0, z)$ имеет простые полюсы в точках $z = \pm\eta$.

Замечание. Отметим, что сомножитель $\widetilde{C}(0,P)$ инвариантен относительно инволюции (3.10), что отражено в том, что его аргументом является точка P спектральной кривой Γ, а не точка накрывающей $\widehat{P}\in\widehat{\Gamma}$. Необходимо подчеркнуть, что эта запись достаточно условна, поскольку каждый из сомножителей многозначен на $\widehat{\Gamma}$, а однозначным является лишь их произведение.

Лемма 3.3. *Полюсы $C(0,\widehat{P})$ инвариантны относительно инволюции $\widehat{\tau}$. Их число равно $2Nl-l(l+1)$.*

Доказательство утверждений подобного рода в теории конечнозонного интегрирования стандартно. Для этого рассмотрим функцию комплексного переменного z

$$F(z)=\left(\operatorname{Det}|c_i(0,M_j)|\right)^2,$$

где M_j, $j=1,\ldots,N$, – прообразы z. Эта функция корректно определена как функция переменной z, поскольку она не зависит от нумерации прообразов. Из аналитических свойств c_j следует, что F имеет вид

$$F(z)=\widetilde{F}(z)\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{\sum(x_i(0)-x_1(0))}, \tag{3.32}$$

где $\widetilde{F}$ – мероморфный сомножитель. Это означает, что числа нулей и полюсов функции F совпадают. Число полюсов F равно удвоенному числу полюсов вектора $C(0,\widehat{P})$. Число же нулей F равно числу точек ветвления ν накрытия $\widehat{\Gamma}$ над $\widehat{\Gamma}_0$, заданного уравнением (3.1). В ходе доказательства леммы 3.1 было доказано, что $\nu=4Nl-2l(l+1)$. Инвариантность полюсов $C(0,\widehat{P})$ относительно инволюции $\widehat{\tau}$ вытекает из того, что уравнение (3.26), определяющее их положение, инвариантно относительно $\widehat{\tau}$. Утверждение леммы доказано.

Обозначим через $\gamma_1,\ldots,\gamma_{g-1}$ точки спектральной кривой Γ, прообразами которых являются полюсы $C(0,\widehat{P})$. (Отметим, что в случае, когда кривая G гладкая, $g=Nl-l(l+1)/2+1$ совпадает с родом Γ.)

Рассмотрим теперь $C(t,\widehat{P})$ – эволюцию $C(0,\widehat{P})$ в силу уравнения (2.35).

Лемма 3.4. *Координаты $c_j(t,\widehat{P})$ вектора $C(t,\widehat{P})$ мероморфны на $\widehat{\Gamma}^*$. Их полюсы являются прообразами точек $\gamma_1,\ldots,\gamma_{g-1}$ и не зависят от t. Граничные значения $c_j^{\pm}$ функций $c_j(t,\widehat{P})$ на берегах разрезов удовлетворяют соотношению*

$$c_j^{+}=c_j^{-}e^{\pi i(x_j(t)-x_1(0))/\eta}. \tag{3.33}$$

В окрестности точек P_i^{+} функции $c_j(t,\widehat{P})$ имеют вид

$$c_j(0,\widehat{P})=\left(c_j^{(i,+)}(t)+O(z+\eta)\right)(z+\eta)^{(x_1(0)-x_j(t))/(2\eta)}\exp\left(\varkappa_i(z+\eta)^{-1}t\right), \tag{3.34}$$

где $\varkappa_i$ и $c_j^{(i,+)}(t)$ определены в (3.29). В окрестности точек Q_i^{-} функции $c_j(t,\widehat{P})$ имеют вид

$$c_j(t,\widehat{P})=\left(c_j^{(i,-)}(t)+O(z-\eta)\right)(z-\eta)^{(x_j(t)-x_1(0))/(2\eta)}. \tag{3.35}$$

Доказательство. Фундаментальная матрица $S(t,z)$ решений уравнения

$$(\partial_t + M(t,z))S(t,z) = 0, \qquad S(0,z) = 1, \tag{3.36}$$

является голоморфной функцией z вне разреза, соединяющего точки $z = \pm\eta$. Из уравнения Лакса следует, что $L(t,z) = S(t,z)L(0,z)S^{-1}(t,z)$. Следовательно, вектор $C(t,z)$ равен $C(t,z) = S(t,z)C(0,z)$ и, значит, имеет те же полюсы, что и $C(0,P)$.

Рассмотрим вектор $\widetilde{C}(t,\widehat{P})$ такой, что

$$C(t,\widehat{P}) = G(t,z)\widetilde{C}(t,\widehat{P}), \tag{3.37}$$

где $G(t,z)$ – та же диагональная матрица, что и в (3.8). Этот вектор является собственным для матрицы $\widetilde{L}(t,z)$ и удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t + \widetilde{M}(t,z))\widetilde{C}(t,P) = 0, \qquad \widetilde{M} = G^{-1}\partial_t G + G^{-1}MG. \tag{3.38}$$

Матричные элементы $\widetilde{M}$ аналитичны на разрезе между точками $z = \pm\eta$. Следовательно, вектор $\widetilde{C}(t,\widehat{P})$ аналитичен на разрезах на $\widehat{\Gamma}$. Поэтому многозначность $C(t,\widehat{P})$ на берегах разрезов полностью порождается многозначностью матрицы $G(t,z)$. Это доказывает равенство (3.33). Равенство (3.35) следует из того, что матрица $\widetilde{M}$ аналитична в точке $z = \eta$. В окрестности точки $z = -\eta$ имеем

$$\widetilde{M}_{ij}(t,z) = \frac{(b_i^+ a_j)}{(z+\eta)} + O\big((z+\eta)^0\big). \tag{3.39}$$

Следовательно, в окрестности P_i^+

$$\partial_t \widetilde{C}(t,\widehat{P}) = \big(\mu_i(t,z) + O(z^0)\big)\widetilde{C}(t,\widehat{P}),$$

где

$$\mu_i(t,z) = \varkappa_i(z+\eta)^{-1} + O(1), \tag{3.40}$$

собственные значения матрицы $\widetilde{M}$. Это доказывает равенство (3.34).

Приступим теперь непосредственно к доказательству утверждений теоремы. В силу первоначального определения

$$\Psi(x,t,\widehat{P}) = \sum_{j=1}^{N} s_j(t,\widehat{P})\Phi\big(x - x_j(t), z\big)k^{x/\eta}, \qquad s_j(t,\widehat{P}) = c_j(t,\widehat{P})a_j(t),$$

решения Ψ порождающей линейной задачи (2.19) определены на кривой $\widehat{\Gamma}$. Для того чтобы показать, что Ψ корректно определена на спектральной кривой Γ, воспользуемся равенством

$$c_j(t,\widehat{P})\Phi(x - x_j(t), z)k^{x/\eta} = \widetilde{c}_j(t,P)\frac{\sigma(z + x - x_j + \eta)}{\sigma(z+\eta)\sigma(x - x_j)}\left[k\left(\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right)^{1/2}\right]^{x/\eta}. \tag{3.41}$$

Как уже отмечалось выше, компоненты вектора $\widetilde{C}$ четны относительно инволюции $\widehat{\tau}$ (3.10). Произведение

$$K(P) = k\left[\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right]^{1/2} \tag{3.42}$$

также инвариантно относительно $\widehat{\tau}$. Следовательно, $\Psi(x,t,P)$ корректно определена как вектор-функция на спектральной кривой Γ. Одновременно мы получаем, что полюсы $\Psi(x,t,P)$ совпадают с полюсами $\widetilde{C}(0,P)$, т.е. с точками $\gamma_1,\ldots,\gamma_{g-1}$.

Обратим внимание на то, что произведение $K(P)$ в целом на Γ является многозначной мероморфной функцией, имеющей нули и полюсы (которые, несмотря на многозначность K, корректно определены) в точках P_i^- и P_i^+, $i=1,\ldots,l$, соответственно. Таким образом, разрезав Γ между точками $P_i^{\pm}$, $i=1,\ldots,l$, мы можем выбрать ветвь третьего сомножителя в (3.42) так, что вне этих разрезов Ψ будет однозначна, а ее граничные значения на берегах разрезов будут удовлетворять соотношению (3.25). Рассмотрим теперь поведение Ψ в окрестностях точек P_i^+. В окрестности точки $z=-\eta$ имеем

$$\frac{\sigma(z+x+\eta)}{\sigma(z+\eta)\sigma(x)} = \frac{1}{z+\eta} + O(1). \tag{3.43}$$

Следовательно, в окрестности точек P_i^+

$$\Psi_\alpha = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{a_{j,\alpha}c_j^{(i,+)}(t)}{z+\eta} + O(1)\right)\left[k_i(z)\left(\frac{\sigma(z-\eta)}{\sigma(z+\eta)}\right)^{1/2}\right]^{x/\eta}, \tag{3.44}$$

где $k_i(z)$ – ветвь функции $k(P)$, определяемая i-м сомножителем разложения (3.7). Для $i>l$ произведение второго и третьего сомножителей в (3.44) регулярно в окрестности P_i^+. Из того, что собственные значения $\varkappa_i$ в (3.29) равны нулю при $i>l$, следует, что в окрестностях точек P_i^+, $i>l$, регулярным является и первый сомножитель в (3.44). Следовательно, функции Ψ_α регулярны в этих точках в целом. Аналогичное рассмотрение для $i=1,\ldots,l$, доказывает равенство (3.23). Отметим также, что $\Psi_1(0,0,P)$, входящее в это равенство, имеет простые полюсы в точках P_i^+, $i=1,\ldots,l$.

Рассмотрим теперь свободный член $\chi_0^{\alpha i}$ в разложении (3.23). Он не зависит от x по построению. Подстановка ряда (3.23) в уравнение (2.19) доказывает, что он не зависит и от t.

Полностью аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 3.3. *Компоненты $\Psi^{+,\alpha}(x,t,P)$ решения $\Psi^+(x,t,P)$ уравнения* (2.20) *определены на N-листной накрывающей Γ исходной эллиптической кривой, с разрезами между точками P_i^+ и P_i^-, $i=1,\ldots,l$. Вне этих разрезов они мероморфны. Для начальных данных общего положения кривая Γ является гладкой кривой рода $g = Nl - \frac{1}{2}l(l+1)+1$, и $\Psi^{+,\alpha}$ имеет $(g-1)$ полюсов $\gamma_1^+,\ldots,\gamma_{g-1}^+$,* *которые не зависят от переменных x, t. В окрестности точек P_i^+, $i = 1, \dots, l$, функция $\Psi^{+,\alpha}$ имеет вид*

$$\Psi^{+,\alpha}(x,t,P) = \left(\chi_0^{+,\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+,\alpha i}(x,t)(z+\eta)^s\right) \times \left(\varkappa_i (z+\eta)^{-1}\right)^{-x/\eta} e^{-\varkappa_i (z+\eta)^{-1} t} \Psi^{+,1}(0,0,P), \tag{3.45}$$

где $\chi_0^{\alpha i}$ – константы, не зависящие от x, t. В окрестности точек P_i^- функция $\Psi^{+,\alpha}$ имеет вид

$$\Psi^{+,\alpha}(x,t,P) = (z - z_i^-)^{-x/\eta} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \widetilde{\chi}_s^{\alpha i}(x,t)(z - z_i^-)^s\right) \Psi^{+,1}(0,0,P). \tag{3.46}$$

Граничные значения $\Psi^{+,\alpha;(\pm)}$ функции $\Psi^{+,\alpha}$ на берегах разрезов связаны соотношением

$$\Psi^{+,\alpha;(+)} = \Psi^{+,\alpha;(-)} e^{-2\pi i x/\eta}. \tag{3.47}$$

Замечание. Теорема 3.2 утверждает, в частности, что решение Ψ уравнения (2.19) является (с точностью до нормировки) функцией Бейкера–Ахиезера. В следующем разделе мы покажем, что эта функция однозначно определяется кривой Γ, полюсами γ_s, матрицей χ_0 и величиной $x_1(0)$. Все эти величины определяются начальными данными и не зависят от времени t. Необходимо подчеркнуть, что часть из них зависит от выбора начальной точки t_0, которая была выбрана нулевой ($t_0 = 0$). Каждый набор начальных данных $\{x_i, \dot{x}_i, a_i, b_i^+ \mid (b_i^+, a_i) = \dot{x}_i\}$ определяет матрицу L с помощью формул (2.32). Характеристическое уравнение (3.1) определяет кривую Γ. Уравнение (3.26) определяет $g-1$ точку γ_s на Γ. Следовательно, определено отображение

$$\{x_i, \dot{x}_i, a_i, b_i^+ \mid (b_i^+, a_i) = \dot{x}_i\} \mapsto \{\Gamma,\ D \in J(\Gamma)\}, \tag{3.48}$$

$$D = \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) + x_1 U^{(0)}, \tag{3.49}$$

где $A\colon \Gamma \to J(\Gamma)$ – отображение Абеля и $U^{(1)}$ – вектор, зависящий только от Γ (см. (4.13)). Коэффициенты уравнения (3.1) являются интегралами системы (1.21)–(1.23). В следующем разделе будет показано, что вторая часть данных (3.48) определяет переменные типа углов, т.е. если точка фазового пространства эволюционирует в силу уравнений движения (1.21)–(1.23), то вектор $D(t)$ эволюционирует линейно: $D(t) = D(t_0) + (t - t_0)U^{(+)}$. Уравнения движения рассматриваемой системы имеют очевидные симметрии:

$$a_i,\ b_i^+ \to q_i a_i,\ q_i^{-1} b_i^+, \qquad a_i,\ b_i^+ \to W^{-1} a_i,\ b_i^+ W, \tag{3.50}$$

где q_i – константы, а W – произвольные постоянные матрицы. В следующем разделе мы докажем, что данные Γ, D однозначно определяют точку фазового пространства с точностью до симметрий (3.50).

4. Конечнозонные решения неабелевой цепочки Тода

Конечнозонные решения неабелевой цепочки Тода были построены в работе одного из авторов [31]. Мы начнем построение обратного спектрального преобразования для спинового обобщения системы Рейсенарса–Шнайдера с изложения необходимых сведений соответствующей конструкции вместе с ее незначительными изменениями, вызванными заменой дискретной переменной n на непрерывную переменную x.

Теорема 4.1. *Пусть* Γ – *гладкая алгебраическая кривая рода* g *с фиксированными локальными координатами* $w_{j,\pm}(P)$ *в окрестностях* $2l$ *точек* $P_j^{\pm}$, $w_{j,\pm}(P_j^{\pm}) = 0$, $j = 1,\dots,l$, *и фиксированными разрезами между точками* $P_j^{\pm}$. *Тогда для любого набора* $g+l-1$ *точек* $\gamma_1,\dots,\gamma_{g+l-1}$ *общего положения существует единственная функция* $\psi_\alpha(x,T,P)$, $\alpha = 1\dots,l$, $T = \{t_{i,j;\pm},\ i = 1,\dots,\infty;\ j = 1,\dots,l\}$, *такая, что*

1°. *Функция* ψ_α *как функция переменной* $P \in \Gamma$ *мероморфна вне разрезов и имеет не более чем простые полюсы в точках* γ_s *(если все они различны).*

2°. *Граничные значения* $\psi_\alpha^{(\pm)}$ *этой функции на различных берегах разрезов удовлетворяют соотношению*

$$\psi_\alpha^{(+)}(x,T,P) = \psi_\alpha^{(-)}(x,T,P)e^{2\pi ix/\eta}. \tag{4.1}$$

3°. *В окрестности точек* $P_j^{\pm}$ *она имеет вид*

$$\psi_\alpha(x,T,P) = w_{j,\pm}^{\mp x/\eta}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s^{\alpha j;\pm}(x,T)w_{j,\pm}^{s}\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}w_{j,\pm}^{-i}t_{i,j;\pm}\right), \quad w_{j,\pm} = w_{j,\pm}(P), \tag{4.2}$$

$$\xi_0^{\alpha j;+}(x,T) \equiv \delta_{\alpha j}. \tag{4.3}$$

Доказательство теорем подобного типа, как и конечное выражение соответствующей функции через тэта-функции Римана, абсолютно стандартны в теории конечнозонного интегрирования. Мы приведем эти формулы в обозначениях, которые были использованы в работе [19].

Согласно теореме Римана–Роха, для любого дивизора $D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g+l-1}$ в общем положении существует единственная мероморфная функция $h_\alpha(P)$ такая, что ее дивизор полюсов совпадает с D и такая, что

$$h_\alpha(P_j^{+}) = \delta_{\alpha j}. \tag{4.4}$$

Зафиксировав базис циклов a_i^0, b_i^0 на Γ с канонической матрицей пересечений, эту функцию можно представить в виде

$$h_\alpha(P) = \frac{f_\alpha(P)}{f_\alpha(P_\alpha^{+})}; \qquad f_\alpha(P) = \theta\big(A(P) + Z_\alpha\big)\frac{\prod_{j\neq\alpha}\theta(A(P)+R_j)}{\prod_{i=1}^{l}\theta(A(P)+S_i)}, \tag{4.5}$$

где тэта-функция Римана $\theta(z_1,\dots,z_g) = \theta(z_1,\dots,z_g \mid B)$ построена по матрице $B = (B_{ik})$ периодов голоморфных дифференциалов на Γ; $A(P)$ – отображение Абеля, $A\colon P \in \Gamma \to J(\Gamma)$;

$$R_j = -\mathscr{K} - A(P_j^+) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \qquad j = 1,\dots,l, \tag{4.6}$$

$$S_i = -\mathscr{K} - A(\gamma_{g-1+i}) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \tag{4.7}$$

$$Z_\alpha = Z_0 - A(P_\alpha^+), \qquad Z_0 = -\mathscr{K} - \sum_{i=1}^{g+l-1} A(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{l} A(P_j^+), \tag{4.8}$$

где $\mathscr{K}$ – вектор римановых констант (доказательство этих формул можно найти в [19]).

Обозначим через $d\Omega^{(i,j;\pm)}$ единственный дифференциал, голоморфный на Γ вне точки $P_j^\pm$, $j = 1,\dots,l$, в окрестности которой он имеет вид

$$d\Omega^{(i,j;\pm)} = d\big(w_{j,\pm}^{-i} + O(w_{j;\pm})\big), \tag{4.9}$$

и нормированный условиями

$$\oint_{a_k^0} d\Omega^{(i,j;\pm)} = 0. \tag{4.10}$$

Он определяет вектор $U^{(i,j;\pm)}$ с координатами

$$U_k^{(i,j;\pm)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k^0} d\Omega^{(i,j;\pm)}. \tag{4.11}$$

Определим также дифференциал $d\Omega^{(0)}$, голоморфный вне точек $P_j^\pm$, в окрестности которых он имеет вид

$$d\Omega^{(0)} = \pm\frac{dw_{j,\pm}}{\eta w_{j,\pm}} + O(1)\, dw_{j,\pm}, \tag{4.12}$$

с нулевыми a-периодами. Он определяет вектор $U^{(0)}$ с координатами

$$U_k^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k^0} d\Omega^{(0)}. \tag{4.13}$$

Отметим, что из билинейных соотношений Римана для периодов дифференциалов третьего рода следует, что

$$U^{(0)} = \eta^{-1} \sum_{j=1}^{l} \big(A(P_j^-) - A(P_j^+)\big). \tag{4.14}$$

Теорема 4.2. *Компоненты ψ_α вектор-функции Бейкера–Ахиезера $\psi(x,T,P)$ равны*

$$\psi_\alpha = h_\alpha(P)\frac{\theta(A(P)+U^{(0)}x+\sum_A U^{(A)}t_A+Z_\alpha)\theta(Z_0)}{\theta(A(P)+Z_\alpha)\theta(U^{(0)}x+\sum_A U^{(A)}t_A+Z_0)}e^{\left(x\Omega^{(0)}(P)+\sum_A t_A\Omega^{(A)}(P)\right)}, \tag{4.15}$$

$$\Omega^{(A)}(P)=\int_{q_0}^P d\Omega^{(A)}, \qquad A=(i,j;\pm). \tag{4.16}$$

Замечание. Отметим, что из-за того, что абелев интеграл $\Omega^{(0)}$ имеет логарифмические особенности в отмеченных точках, однозначная ветвь ψ может быть выделена лишь после разреза кривой Γ между точками $P_j^{\pm}$.

Определим теперь двойственную функцию Бейкера–Ахиезера. Для любого набора $g+l-1$ точек общего положения существует единственный дифференциал $d\Omega$, голоморфный вне точек $P_j^{\pm}$, в которых он имеет простые полюсы с вычетами ± 1, т.е.

$$d\Omega = \pm\frac{dw_{j,\pm}}{w_{j,\pm}} + O(1)\,dw_{j,\pm} \tag{4.17}$$

и который равен нулю в точках γ_s:

$$d\Omega(\gamma_s)=0. \tag{4.18}$$

Помимо точек γ_s этот дифференциал имеет еще $g+l-1$ нулей, которые обозначаются через γ_s^+.

Двойственной функцией Бейкера–Ахиезера называется вектор-функция $\psi^+(x,T,P)$ с компонентами $\psi^{+,\alpha}(x,t,P)$ такими, что

1°. функция $\psi^{+,\alpha}$ как функция переменной $P\in\Gamma$ мероморфна вне разрезов и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s^+ (если все они различны);

2°. граничные значения $\psi^{+;\alpha,(\pm)}$ этой функции на различных берегах разрезов удовлетворяют соотношению

$$\psi^{+;\alpha,(+)}(x,T,P)=\psi^{+;\alpha,(-)}(x,T,P)e^{-2\pi ix/\eta}; \tag{4.19}$$

3°. в окрестности точек $P_j^{\pm}$ она имеет вид

$$\psi^{+,\alpha}(x,T,P)=w_{j,\pm}^{\pm x/\eta}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s^{+;\alpha j;\pm}(x,T)w_{j,\pm}^s\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}w_{j,\pm}^{-i}t_{i,j;\pm}\right), \tag{4.20}$$

$$\xi_0^{+;\alpha j;+}(x,T)\equiv\delta_{\alpha j}. \tag{4.21}$$

Обозначим через $h_\alpha^+(P)$ функцию, имеющую полюсы в точках дуального дивизора $\gamma_1^+,\dots,\gamma_{g+l-1}^+$ и нормированную условием $h_\alpha^+(P_j^+)=\delta_{\alpha j}$. Она может быть представлена в виде (4.5), в котором γ_s заменены на γ_s^+. Из определения двойственного дивизора следует:

$$\sum_{s=1}^{g+l-1} A(\gamma_s)+\sum_{s=1}^{g+l-1} A(\gamma_s^+)=K_0+\sum_{j=1}^{l}\big(A(P_j^+)+A(P_j^-)\big), \tag{4.22}$$

где K_0 – канонический класс (т.е. класс эквивалентности дивизора нулей голоморфного дифференциала). Следовательно, вектор Z_0^+ в формулах для h_α^+ связан с вектором Z_0 соотношением

$$Z_0+Z_0^+=-2\mathscr{K}-K_0+\sum_{j=1}^{l}\big(A(P_j^+)-A(P_j^-)\big)=-2\mathscr{K}-K_0-U^{(0)}\eta. \tag{4.23}$$

Теорема 4.3. *Компоненты двойственной функции Бейкера–Ахиезера* $\psi^+(x,T,P)$ *равны*

$$\psi^{+;\alpha}=h_\alpha^+(P)\frac{\theta(A(P)-U^{(0)}x-\sum_A U^{(A)}t_A+Z_\alpha^+)\theta(Z_0^+)}{\theta(A(P)+Z_\alpha^+)\theta(U^{(0)}x+\sum_A U^{(A)}t_A-Z_0^+)}e^{-(x\Omega^{(0)}(P)+\sum_A t_A\Omega^{(A)}(P))}, \tag{4.24}$$

где

$$Z_0^+=-Z_0-2\mathscr{K}-K_0-U^{(0)}\eta,\qquad Z_\alpha^+=Z_0^+-A(P_\alpha^+). \tag{4.25}$$

Приведенные результаты справедливы для любой алгебраической кривой с двумя наборами отмеченных точек. Рассмотрим теперь класс специальных кривых, отвечающих спиновым обобщениям модели Рейсенарса–Шнайдера.

Теорема 4.4. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}$ – *риманова поверхность, заданная уравнением*

$$\widehat{R}(K,z)=K^N+\sum_{i=1}^{N}R_i(z)K^{N-i}=0, \tag{4.26}$$

коэффициенты $R_j(z)$ *которого являются мероморфными функциями переменной* z *такими, что*

$$R_j(z+2\omega_\alpha)=R_j(z)e^{-2j\zeta(\omega_\alpha)\eta}, \tag{4.27}$$

и голоморфными в фундаментальном параллелограмме со сторонами $2\omega_\alpha$ *всюду кроме точки* $z=-\eta$. *Предположим, что в окрестности* $z=-\eta$ *полином* $\widehat{R}$ *имеет следующее разложение*:

$$\widehat{R}(K,z)=\prod_{i=1}^{l}\big(K+(z+\eta)^{-1}H_i(z+\eta)\big)\prod_{i=l+1}^{N}\big(K+(z+\eta)H_i(z+\eta)\big), \tag{4.28}$$

где $H_i(z)$ – *регулярные в окрестности точки* $z = -\eta$ *функции переменной* z. *Тогда функция Бейкера–Ахиезера* ψ, *соответствующая*: (i) *алгебраической кривой* Γ, *являющейся фактор-кривой* $\widetilde{\Gamma}$ *по группе преобразований*

$$z \mapsto z + 2\omega_\alpha, \qquad K \mapsto K e^{-2\zeta(\omega_\alpha)\eta}, \tag{4.29}$$

(ii) *локальным параметрам* $w_{j,+} = (z+\eta)H_j^{-1}(0)$ *в полюсах* P_j^+, $j = 1, \dots, l$, *многозначной функции* $K = K(P)$ *и произвольным локальным параметрам* $w_{j,-}$ *в нулях* P_j^- *этой функции, удовлетворяет соотношению*

$$\psi(x + 2\omega_\alpha, T, P) = \varphi_\alpha(P)\psi(x, T, P), \tag{4.30}$$

где

$$\varphi_\alpha(P) = K(P)^{2\omega_\alpha/\eta} e^{\zeta(\omega_\alpha)z}. \tag{4.31}$$

Доказательство сформулированного утверждения элементарно. Из трансляционных свойств (4.29) следует, что значения функции $\varphi_\alpha(P)$ не меняются при сдвигах z на периоды эллиптической кривой, т.е. оно корректно определяет функцию на Γ. Равенство (4.30) следует из того, что правые и левые части этого равенства имеют одинаковые аналитические свойства.

Следствие 4.1. *Функция Бейкера–Ахиезера* $\psi(x, T, P)$ *с компонентами* $\psi_\alpha(x, T, P)$, *отвечающая перечисленным в условиях теоремы* 4.4 *данным, может быть представлена в виде*

$$\psi(x, T, P) = \sum_{i=1}^{m} s_i(T, P)\Phi\big((x - x_i(T)), z\big)k^{x/\eta}, \qquad k = K\left[\frac{\sigma(z+\eta)}{\sigma(z-\eta)}\right]^{1/2}. \tag{4.32}$$

При этих же условиях двойственная функция Бейкера–Ахиезера может быть представлена в виде

$$\psi^+(x, T, P) = \sum_{i=1}^{m} s_i^+(T, P)\Phi\big((-x + x_i(T) - \eta), z\big)k^{-x/\eta}. \tag{4.33}$$

Доказательство следствия полностью идентично доказательству аналогичного утверждения работы [19]. Фактически оно уже было приведено в начале раздела 2, поскольку теорема 4.4 утверждает, что ψ и ψ^+ являются дважды-блоховскими функциями. Отметим только, что из (4.23) и (4.24) следует, что ψ^+ имеет полюсы в точках $x_i - \eta$.

До сих пор $t_{i,\alpha;\pm}$ были произвольными внешними параметрами, зависимость ψ от которых определялась видом существенной особенности ψ в точках $P_\alpha^\pm$. Зафиксируем теперь любые значения этих параметров при $i > 1$, т.е. $t_{i,\alpha;\pm} = t^0_{i,\alpha;\pm}$, а для $i = 1$ мы положим

$$t_{1,\alpha;\pm} = t_\pm + t^0_{1,\alpha;\pm}. \tag{4.34}$$

Соответствующая функция Бейкера–Ахиезера ψ будет теперь зависеть от переменных (x, t_+, t_-). Для краткости мы ее будем обозначать через $\psi(x, t_+, t_-, P)$, опуская при этом указание на ее зависимость от выбора констант T^0.

Теорема 4.5. *Для любого выбора констант T^0 соответствующая вектор-функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x,t_+,t_-,P)$ удовлетворяет уравнениям*

$$\partial_+\psi(x,t_+,t_-,P)=\psi(x+\eta,t_+,t_-,P)+v(x,t_+,t_-)\psi(x,t_+,t_-,P), \tag{4.35}$$

$$\partial_-\psi(x,t_+,t_-,P)=c(x,t_+,t_-)\psi(x-\eta,t_+,t_-,P), \qquad \partial_\pm=\partial/\partial t_\pm, \tag{4.36}$$

где

$$v(x,t_+,t_-)=\partial_+g(x,t_+,t_-)g^{-1}(x,t_+,t_-)=\xi_1^+(x,t_+,t_-)-\xi_1^+(x+\eta,t_+,t_-), \tag{4.37}$$

$$c(x,t_+,t_-)=g(x,t_+,t_-)g^{-1}(x-\eta,t_+,t_-)=\partial_-\xi_1^+(x,t_+,t_-), \tag{4.38}$$

а матрицы g и ξ_1^+ определяются коэффициентами разложений (4.2):

$$g^{\alpha,j}(x,t_+,t_-)=\xi_0^{\alpha,j;-}(x,t_+,t_-), \qquad \xi_1^+(x,t_+,t_-)=\{\xi_1^{\alpha j;+}\}. \tag{4.39}$$

Доказательство. Равенство (4.35) вытекает из того, что функция

$$\partial_+\psi_\alpha(x,t_+,t_-,P)-\psi_\alpha(x+\eta,t_+,t_-,P)$$

имеет те же аналитические свойства, что и компоненты ψ, за исключением условий нормировки (4.3). Следовательно, эта функция может быть разложена по базисным функциям ψ_β с коэффициентами $v^{\alpha\beta}$. Эти коэффициенты разложения можно определить, сравнивая коэффициенты разложения правых и левых частей равенства (4.35) в точках P_j^-. При этом мы получим первое из равенств (4.37). В то же время можно воспользоваться коэффициентами разложения в окрестности точек P_j^+. При этом мы получим второе из равенств (4.37). Аналогично доказываются равенство (4.36) и равенства (4.38).

Следствие 4.2. *Матричная функция $g_n(t_+,t_-)=g(n\eta+x_0,t_+,t_-)$, соответствующая в силу определения функций Бейкера–Ахиезера римановой поверхности Γ с фиксированными локальными координатами в окрестностях отмеченных точек $P_j^\pm$ и набору точек $\gamma_1,\dots,g+l-1$, является решением уравнений двумеризованной цепочки Тода* (2.1).

Замечание. Зависимость g от переменных $t_{i,j}$, $i=1,\dots,\infty$, $j=1,\dots,l$, соответствует динамике g в силу высших уравнений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

Теорема 4.6. *Двойственная функция Бейкера–Ахиезера удовлетворяет уравнениям*

$$-\partial_+\psi^+(x,t_+,t_-,P)=\psi^+(x-\eta,t_+,t_-,P)+\psi^+(x,t_+,t_-,P)v(x,t_+,t_-), \tag{4.40}$$

$$-\partial_-\psi^+(x,t_+,t_-,P)=\psi^+(x+\eta,t_+,t_-,P)c(x+\eta,t_+,t_-), \tag{4.41}$$

где $c(x,t_+,t_-)$, $v(x,t_+,t_-)$ те же, что и в (4.35), (4.36).

Доказательство. Полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы можно показать, что ψ^+ удовлетворяет уравнениям вида (4.40), (4.41) с коэффициентами v^+ и c^+, равными

$$c^+(x, t_+, t_-) = [\xi_0^{+;-}(x+\eta, t_+, t_-)]^{-1}\xi_0^{+;-}(x, t_+, t_-), \tag{4.42}$$

$$v^+(x, t_+, t_-) = -[\xi_0^{+;-}(x, t_+, t_-)]^{-1}\partial_+\xi_0^{+;-}(x, t_+, t_-), \tag{4.43}$$

где матричные элементы $\xi_0^{+;-} = \{\xi_0^{+;\alpha j;-}\}$ определяются из разложений (4.20). Утверждение леммы о совпадении коэффициентов уравнений для ψ и ψ^+ вытекает из равенства

$$[\xi_0^{+;-}]^{-1} = \xi_0^-(x, t_+, t_-) = g(x, t_+, t_-), \tag{4.44}$$

которое является следствием определения двойственной функции Бейкера–Ахиезера. Для доказательства последнего равенства рассмотрим дифференциал $\psi_\alpha\psi^{+\beta}d\Omega$, где $d\Omega$ тот же, что и в определении двойственного дивизора γ_s^+. Это мероморфный дифференциал на Γ с единственными полюсами в точках $P_j^\pm$. Вычет этого дифференциала в точке P_j^+ равен

$$\operatorname*{res}_{P_j^+} \psi_\alpha\psi^{+\beta}\, d\Omega = \delta_{\alpha,j}\delta_{\beta,j}. \tag{4.45}$$

Его вычет в точке P_j^- равен

$$\operatorname*{res}_{P_j^+} \psi_\alpha\psi^{+\beta}\, d\Omega = -\xi_0^{\alpha,j;-}\xi_0^{+;\beta,j;-}. \tag{4.46}$$

Так как сумма вычетов мероморфного дифференциала равна нулю, то из (4.45) и (4.46) следует (4.44).

Теорема 4.7. *Пусть кривая* Γ, *отмеченные точки* $P_j^\pm$ *и локальные параметры в их окрестностях те же, что и в теореме* 4.4, *тогда соответствующие этим данным алгебро-геометрические потенциалы* v *и* c *уравнений* (4.35), (4.36) *являются эллиптическими функциями переменной* x. *В общем положении они имеют вид*

$$v(x, T) = \sum_{i=1}^N a_i(T)b_i^+(T)V\big(x - x_i(T)\big), \tag{4.47}$$

$$c(x, T) = \partial_-\left(S_0(T) + \sum_{i=1}^N a_i(T)b_i^+(T)\zeta\big(x - x_i(T)\big)\right), \tag{4.48}$$

где a_i, b_i^+ – *векторы, а* S_0 – *не зависящая от* x *матрица.*

Доказательство. Потенциалы уравнений (4.35) и (4.36) являются эллиптическими функциями в силу (4.30). Из формулы (4.15) следует, что полюсы $x = x_i(T)$ функции Бейкера–Ахиезера соответствуют решениям уравнения

$$\theta\biggl(U^{(0)}x + \sum_A U^{(A)}t_A + Z_0\biggr) = 0. \tag{4.49}$$

Из (4.8) следует, что для соответствующих решений $(x_i(T), T)$ первый сомножитель в числителе формулы (4.15) равен нулю при $P = P_\alpha^+$. В точках P_β^+, $\beta \neq \alpha$, равна нулю функция $h_\alpha(P)$. Следовательно, вычет $\psi_{\alpha,i}^0(T,P)$ функции $\psi_\alpha(x,T,P)$ в $x = x_i(T)$ (как функция переменной P) имеет следующие аналитические свойства:

1°. она является мероморфной функцией на Γ вне разрезов, соединяющих точки $P_j^\pm$, и имеет те же полюсы, что и ψ;

2°. ее граничные значения $\psi_{\alpha,i}^{0;(\pm)}(T,P)$ на берегах разрезов удовлетворяют равенству

$$\psi_{\alpha,j}^{0;(+)}(T,P) = \psi_{\alpha,j}^{0;(-)}(T,P)e^{2\pi i x_j(T)/\eta}; \tag{4.50}$$

3°. в окрестностях точек $P_j^\pm$

$$\psi_{\alpha,i}^0(T,P) = w_{j,\pm}^{\mp x_i(T)/\eta} \exp\biggl(\sum_{s=1}^\infty w_{j,\pm}^{-s} t_{s,j;\pm}\biggr) F_{i,j,\alpha}^\pm(w_{j,\pm}), \tag{4.51}$$

где $F_{i,j,\alpha}^\pm$ – регулярные функции в этих окрестностях и при этом

$$F_{i,j,\alpha}^+(0) = 0. \tag{4.52}$$

Следовательно, $\psi_{\alpha,i}^0$ имеет те же аналитические свойства, что и функция Бейкера–Ахиезера, за одним исключением. Регулярный сомножитель в разложении этой функции в окрестности *всех* точек P_j^+ имеет нулевой свободный член. Для общих значений x, t_A такой функции не существует. Для специальных значений $(x = x_i(T), T)$ такая функция $\psi_{i0}(T,P)$ существует и *единственна* с точностью до постоянного (по P) множителя (она единственна в общем случае, когда $x_i(T)$ – простой корень уравнения (4.49)). Следовательно, компоненты функции Бейкера–Ахиезера могут быть представлены в виде

$$\psi_\alpha(x,T,P) = \frac{\phi_\alpha(T)\,\psi_{i0}(T,P)}{x - x_i(T)} + O\bigl((x - x_i(T))^0\bigr). \tag{4.53}$$

Из последнего равенства вытекает, что вычеты $\rho_i(T)$ матрицы $\xi_1^+(x,T)$ с матричными элементами $\xi_1^{\alpha j;+}(x,T)$,

$$\xi_1^+(x,T) = \frac{\rho_i(T)}{x - x_i(T)} + O\bigl((x - x_i(t))^0\bigr), \tag{4.54}$$

имеют ранг один. Значит, найдутся векторы $a_i(T)$ и ковекторы $b_i^+(T)$ такие, что $\rho_i = a_i(T)b_i^+(T)$. Из (4.30) следует, что матрица ξ_1^+ удовлетворяет следующим свойствам монодромии:

$$\xi_1^+(x+2\omega_l) = \xi_1^+(x,T) + 2\zeta(\omega_l)r, \tag{4.55}$$

где r – константа. Из этих равенств и (4.54) вытекает, что ξ_1^+ может быть представлена в виде

$$\xi_1^+ = S_0(T) + \sum_{i=1}^{N} a_i(T)b_i^+(T)\zeta\big(x - x_i(T)\big). \tag{4.56}$$

Этот вид в сочетании со вторыми из равенств (4.37), (4.38), выражающими коэффициенты линейных уравнений (4.35), (4.36) через $\xi_1^+(x,T)$, доказывает утверждение теоремы.

Замечание. В абелевом случае ($l=1$) выражение для $c(x)$ имеет эквивалентное представление в виде произведения полюсных множителей

$$c(x,T) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\sigma(x - x_i(T) + \eta)\sigma(x - x_i(T) - \eta)}{\sigma^2(x - x_i(T))} \tag{4.57}$$

(ср. (1.17)). Приравнивая коэффициенты при полюсах в (4.48) и (4.57), получаем соотношения

$$\partial_+\partial_- x_i(T) = -\sigma^2(\eta)\prod_{k\neq i}\frac{\sigma(x_i - x_k + \eta)\sigma(x_i - x_k - \eta)}{\sigma^2(x_i - x_k)}, \tag{4.58}$$

$$\partial_+\partial_- x_i(T) = -\partial_+ x_i(T)\partial_- x_i(T)\sum_{k\neq i}\big(V(x_i - x_k) - V(x_k - x_i)\big). \tag{4.59}$$

Легко проверить, что если динамика по $t_\pm$ задается гамильтонианами $\sigma(\pm\eta)H_\pm$ (1.20), то эти соотношения являются следствиями уравнений движения.

Связь алгебро-геометрических потенциалов уравнений (4.35), (4.36), соответствующих эквивалентным дивизорам, является стандартной в теории конечнозонного интегрирования. Пусть $D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g+l-1}$ и $D^{(1)} = \gamma_1^{(1)} + \cdots + \gamma_{g+l-1}^{(1)}$ – два эквивалентных дивизора. Это означает, что существует мероморфная функция $h(P)$ на Γ такая, что D является дивизором ее полюсов, а $D^{(1)}$ – дивизором ее нулей.

Следствие 4.3. *Алгебро-геометрические потенциалы $v(x,T)$, $c(x,T)$ и $v^{(1)}(x,T)$, $c^{(1)}(x,T)$, соответствующие $\Gamma, P_j^\pm, w_{j,\pm}(P)$ и эквивалентным дивизорам D и $D^{(1)}$, калибровочно эквивалентны*:

$$v^{(1)}(x,T) = Hv(x,T)H^{-1}, \quad c^{(1)}(x,T) = Hc(x,T)H^{-1}, \quad H^{\alpha j} = h(P_j^+)\delta^{\alpha j}. \tag{4.60}$$

Следствие 4.4. *В общем положении кривая* Γ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.4 *тогда и только тогда, когда она является спектральной кривой* (3.13) *матрицы Лакса* L, *определенной формулой* (2.32), *в которой* x_i, $\dot{x}_i$ – *произвольные константы, а векторы* a_i, b_i^+ *удовлетворяют соотношениям* (1.25).

Функция Бейкера–Ахиезера $\Psi_\alpha(x,t,P)/\Psi_1(0,0,P)$ в силу утверждений теоремы 3.2 следующим образом связана с нормированной функцией Бейкера–Ахиезера $\psi_\alpha(x,t,P)$:

$$\frac{\Psi_\alpha(x,t,P)}{\Psi_1(0,0,P)} = \sum_\beta \chi_0^{\alpha\beta}\psi_\beta(x,t,P), \tag{4.61}$$

где $\psi(x,t,P)$ – функция Бейкера–Ахиезера, определенная в начале этого параграфа, отвечающая следующим значениям внешних параметров $T=\{t_{i,j;\pm}\}$:

$$t_{1,j;+}=t,\quad t_{i,j,\pm}=0,\quad (i,j,\pm)\neq(1,j,+). \tag{4.62}$$

Равенство (4.61) приводит к следствию.

Следствие 4.5. *Пусть* $a_i(t)$, $b_i(t)$, $x_i(t)$ *являются решениями уравнений движения* (1.21)–(1.23), *тогда*

$$\sum_{i=1}^N a_i(t)b_i^+(t)V\bigl(x-x_i(t)\bigr) = \chi_0 v(x,t)\chi_0^{-1}, \tag{4.63}$$

где $v(x,t)=v(x,t_+=t,t_-=0)$ – *алгебро-геометрический потенциал, соответствующий в силу теоремы* 4.5 *нормированной функции Бейкера–Ахиезера* $\psi(x,t,P)$, *построенной по кривой и отмеченным точкам, отвечающим условиям теоремы* 4.4.

Следствие 4.6. *Соответствие*

$$a_i(t),\ b_i^+(t),\ x_i(t)\mapsto\{\Gamma,[D]\}, \tag{4.64}$$

где $[D]$ – *класс эквивалентности дивизора* D, *является изоморфизмом с точностью до преобразований* (3.50).

Соответствующая кривая Γ не зависит от времени. В то же время $[D]$ зависит от выбора начальной точки $t_0=0$. Из явных формул, которые мы приводим в следующей теореме, следует, что зависимость $[D(t_0)]$ линейна на якобиане.

Теорема 4.8. *Пусть* Γ – *кривая, заданная уравнением вида* (4.28) *и* $D=\gamma_1,\dots,\gamma_{g+l-1}$ – *набор точек общего положения. Тогда формулы*

$$\theta(U^{(0)}x_i(t)+U^{(+)}t+Z_0)=0,\qquad U^{(+)}=\sum_j U^{(1,j,+)}, \tag{4.65}$$

$$a_{i,\alpha}(t)=Q_i^{-1}(t)h_\alpha(q_0)\frac{\theta(U^{(0)}x_i(t)+U^{(+)}t+Z_\alpha)}{\theta(Z_\alpha)}, \tag{4.66}$$

$$b_i^\alpha(t)=Q_i^{-1}(t)h_\alpha^+(q_0)\frac{\theta(U^{(0)}x_i(t)+U^{(+)}t-Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha^+)}, \tag{4.67}$$

где

(4.68)
$$Q_i^2(t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l} h_\alpha^+(q_0)h_\alpha(q_0)\frac{\theta(U^{(0)}x_i(t)+U^{(+)}t-Z_\alpha)\theta(U^{(0)}x_i(t)+U^{(+)}t-Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha)\theta(Z_\alpha^+)},$$

где q_0 *– произвольная точка кривой* Γ, *определяют решения системы* (1.21), (2.23), (2.24). *Любое решение этой системы общего положения может быть получено из решений* (4.65)–(4.67) *с помощью симметрий* (3.50).

Замечание. Если в формулах (4.65)–(4.67) вектор Z_0 заменить на

$$Z_0 \mapsto Z_0 + \sum_A U^{(A)}t_A, \tag{4.69}$$

то зависимость соответствующих величин $x_i(T)$, $a_i(T)$, $b_i(T)$, $T=\{t_A\}$, от переменных t_A соответствует динамике всех коммутирующих потоков системы (1.21)–(1.23). Особо подчеркнем, что точки $P_j^\pm$ играют симметричную роль. Поэтому зависимость $x_i(T)$, $a_i(T)$, $b_i(T)$ от переменной $t_- = l^{-1}\sum_{j=1}^{l} t_{1,j;-}$ описывается теми же уравнениями движения, что и зависимость от переменной $t=t_+$.

5. Разностные аналоги операторов Ламе

Рассмотрим оператор S_0, заданный формулой (1.9) при целых ℓ. Заметим прежде всего, что благодаря очевидной симметрии $-\ell \leftrightarrow \ell-1$ достаточно рассмотреть только положительные значения ℓ. В дальнейшем предполагается, что $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Утверждение о конечнозонности оператора S_0 означает, что блоховские решения уравнения

$$(S_0 f)(x) = \varepsilon f(x) \tag{5.1}$$

параметризуются точками гиперэллиптической кривой рода 2ℓ.

Любое решение $f(x)$ уравнения (5.1) можно представить в виде

$$f(x) = \Psi(x)\big(\theta_1(\eta/2)\big)^{-x/\eta}\prod_{j=1}^{\ell}\theta_1(x-j\eta), \tag{5.2}$$

где $\Psi(x)$ – решение уравнения

$$(\widetilde{S}_0\Psi)(x) \equiv \Psi(x+\eta) + c_\ell(x)\Psi(x-\eta) = \varepsilon\Psi(x), \tag{5.3}$$

$$c_\ell(x) = \theta_1^2(\eta/2)\frac{\theta_1(x+\ell\eta)\theta_1(x-(\ell+1)\eta)}{\theta_1(x)\theta_1(x-\eta)}. \tag{5.4}$$

Преобразование (5.2) переводит блоховские решения первого уравнения в блоховские решения второго уравнения. Для построения блоховских решений уравнения (5.3) мы воспользуемся анзацем, аналогичным тому, который был использован при построении решений линейного уравнения (2.2):

$$\Psi = \sum_{j=1}^{\ell} s_j(z,k,\varepsilon)\Phi_\ell(x-j\eta,z)k^{x/\eta}, \tag{5.5}$$

где

$$\Phi_\ell(x,z) = \frac{\theta_1(z+x+N\eta)}{\theta_1(z+N\eta)\theta_1(x)}\left[\frac{\theta_1(z-\eta)}{\theta_1(z+\eta)}\right]^{x/(2\eta)}, \qquad N = \frac{\ell(\ell+1)}{2} \tag{5.6}$$

(отметим, что Φ_1 совпадает с $\Phi(x,z)$ из (2.6), а $c_1(x)$ совпадает с $c(x-\eta)$ из (2.8) с точностью до постоянного множителя).

Функция $\Phi_\ell(x,z)$ двоякопериодична по z:

$$\Phi_\ell(x,z+2\omega_\alpha) = \Phi_\ell(x,z). \tag{5.7}$$

(В этом и следующем разделах удобно зафиксировать значения периодов: $2\omega_1 = 1$, $2\omega_2 = \tau$.) Для x таких, что $x/(2\eta)$ является полуцелым числом, Φ_ℓ однозначна на римановой поверхности $\widehat{\Gamma}_0$ функции $E(z)$, заданной формулой (2.9). При произвольных значениях x можно выделить однозначную ветвь функции $\Phi_\ell(x,z)$, разрезав эллиптическую кривую Γ_0 между точками $z = \pm\eta$.

Как функция от x, $\Phi_\ell(x,z)$ является дважды-блоховской:

$$\Phi_\ell(x+2\omega_\alpha,z) = T_\alpha^{(\ell)}(z)\Phi_\ell(x,z), \tag{5.8}$$

где

$$T_1^{(\ell)}(z) = \left(\frac{\theta_1(z-\eta)}{\theta_1(z+\eta)}\right)^{1/(2\eta)}, \tag{5.9}$$

$$T_2^{(\ell)}(z) = \exp\bigl(-2\pi i(z+N\eta)\bigr)\left(\frac{\theta_1(z-\eta)}{\theta_1(z+\eta)}\right)^{\tau/(2\eta)}. \tag{5.10}$$

В фундаментальной области решетки функция $\Phi_\ell(x,z)$ имеет единственный полюс в точке $x=0$:

$$\Phi_\ell(x,z) = \frac{1}{\theta_1'(0)x} + O(1). \tag{5.11}$$

Подставляя (5.5) в уравнение (5.3) и приравнивая вычеты правой и левой частей уравнения в точках $z = j\eta$, $j = 0,\dots,\ell$, мы получим $\ell+1$ линейное уравнение

$$\sum_{j=1}^{\ell} L_{i,j}s_j = 0, \qquad i = 0,\dots,\ell, \tag{5.12}$$

для определения ℓ неизвестных $s_j = s_j(z, k, \varepsilon)$. Матричные элементы $L_{i,j}$ этой системы равны:

$$L_{0,1} = k + h\Phi_\ell(-2\eta, z)k^{-1}, \; L_{0,j} = h\Phi_\ell(-(j+1)\eta, z)k^{-1}, \quad j = 2, \ldots, \ell; \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} L_{1,1} = -\varepsilon - h\Phi_\ell(-\eta, z)k^{-1}, \qquad L_{1,2} = k - h\Phi_\ell(-2\eta, z)k^{-1}, \\ L_{1,j} = -h\Phi_\ell(-j\eta, z)k^{-1}, \qquad j > 2; \end{gathered} \tag{5.14}$$

$$L_{i,j} = \delta_{i,j+1}c_i k^{-1} - \varepsilon\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1}k, \qquad i > 1, \tag{5.15}$$

где

$$h = \theta_1'(0) \operatorname*{res}_{x=0} c_\ell(x) = \frac{\theta_1^2(\eta/2)}{\theta_1(\eta)}\theta_1(\ell\eta)\theta_1\big((\ell+1)\eta\big), \tag{5.16}$$

$$c_j = c_\ell(j\eta) = \theta_1^2(\eta/2)\frac{\theta_1((j+\ell)\eta)\theta_1((j-\ell-1)\eta)}{\theta_1(j\eta)\theta_1((j-1)\eta)}\,. \tag{5.17}$$

Для того, чтобы переопределенная система уравнений (5.12) имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг прямоугольной матрицы $L_{i,j}$ был строго меньше ℓ. Обозначим через $L^{(0)}$ и $L^{(1)}$ матрицы размера $\ell \times \ell$, полученные из L вычеркиванием строки с номером $i = 0$ и $i = 1$ соответственно. Тогда множество параметров z, k, ε, для которых уравнение (5.3) имеет решения вида (5.12), определяется системой из двух уравнений

$$\det L^{(i)} \equiv R^{(i)}(z, k, \varepsilon) = 0, \qquad i = 0, 1. \tag{5.18}$$

Раскладывая детерминанты по верхней строке, находим, что $R^{(i)}$ имеет вид:

$$R^{(0)}(z, k, \varepsilon) = r_\ell^{(0)}(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\ell} k^{-j}\Phi_\ell(-j\eta, z)r_{\ell-j}^{(0)}(\varepsilon), \tag{5.19}$$

$$R^{(1)}(z, k, \varepsilon) = k\widetilde{r}_{\ell-1}(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\ell} k^{-j}\Phi_\ell(-(j+1)\eta, z)r_{\ell-j}^{(1)}(\varepsilon). \tag{5.20}$$

Здесь $\widetilde{r}_{\ell-1}$, $r_{\ell-j}^{(0)}, r_{\ell-j}^{(1)}$ – некоторые полиномы от ε степеней $\ell-1$ и $\ell-j$ соответственно.

Эти уравнения задают алгебраическую кривую $\widehat{\Gamma}$, реализованную как $\ell(\ell+1)/2$-листное разветвленное накрытие кривой $\widehat{\Gamma}_0$ рода 2, на которой однозначны функции $\Phi_\ell(-j\eta, z)$. Кривая $\widehat{\Gamma}$ обладает очевидной симметрией

$$(z, k, \varepsilon) \mapsto (z, -k, -\varepsilon), \tag{5.21}$$

что легко видно из следующего общего свойства уравнения (5.3). Пусть $\Psi(x)$ – решение уравнения (5.3) с собственным значением ε, тогда $\Psi(x)\exp(\pi i x/\eta)$ – решение того же уравнения с собственным значением $-\varepsilon$. Это преобразование соответствует изменению знака k.

Отметим, что преобразование $k \to -k$ в (5.5) вместе с одновременной перестановкой листов $E(z)$ не меняет функцию $\Psi(x,z,k)$. Следовательно, $\widehat{\Gamma}$ можно рассматривать как $\ell(\ell+1)$-листное накрытие Γ_0.

Покажем, что кривая $\widehat{\Gamma}$ инвариантна также относительно другой инволюции, а именно,

$$(z,k,\varepsilon) \mapsto (-z, k^{-1}\theta_1^2(\eta/2), \varepsilon). \tag{5.22}$$

Пусть $\Psi(x)$ – решение уравнения (5.3). Тогда функция

$$\widetilde{\Psi}(x) = \Psi(-x)A(x), \tag{5.23}$$

где

$$A(x) = \theta_1(\eta/2)^{2x/\eta} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\theta_1(x+j\eta)}{\theta_1(x-j\eta)}, \tag{5.24}$$

является решением того же уравнения. Легко также видеть, что преобразование (5.23) переводит дважды-блоховские решения в дважды-блоховские, причем если блоховские множители для Ψ параметризуются парой z, k, то блоховские множители для $\widetilde{\Psi}$ соответствуют паре $-z$, $k^{-1}\theta_1^2(\eta/2)$.

Переменная ε, рассматриваемая как функция $\varepsilon(P)$ на кривой ($P \in \widehat{\Gamma}$), мероморфна на $\widehat{\Gamma}$. Она не может принимать никакое значение более чем дважды, поскольку для каждого ε разностное уравнение второго порядка (5.3) имеет не более двух линейно независимых решений. Поскольку инволюция (5.22) не тривиальна, функция ε действительно принимает каждое свое значение максимум дважды. Это значит, что алгебраическая кривая $\widehat{\Gamma}$ является гиперэллиптической кривой конечного рода g. Благодаря симметрии (5.21) она может быть задана уравнением

$$y^2 = \prod_{i=1}^{g+1} (\varepsilon^2 - \varepsilon_i^2). \tag{5.25}$$

Инволюция (5.22) является гиперэллиптической инволюцией, переставляющей листы накрытия (5.25).

Докажем теперь, что $g = 2\ell$. Из (5.25) следует, что гиперэллиптическая инволюция имеет $2g+2$ неподвижных точек. С другой стороны, число неподвижных точек инволюции (5.22) равно числу прообразов точек второго порядка $\omega_a \in \Gamma_0$, $a = 0,\dots,3$ (которые неподвижны относительно инволюции $z \to -z$ на Γ_0), на $\widehat{\Gamma}$ таких, что соответствующие значения k равны $\pm i^{\delta_{a,0}}\theta_1(\eta/2)$. Начиная с этого места, мы будем использовать следующие обозначения[1]:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1+\tau}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\tau}{2}. \tag{5.26}$$

[1] Они отличаются от обозначений, принятых в разделе 2.

Отметим, что различие значений k, отвечающих неподвижным точкам инволюции (5.22), расположенным над $z = 0$ и над другими полупериодами, связано с тем, что точка $z = 0$ при инволюции $z \to -z$ переходит на другой берег разреза между точками $z = \pm\eta$.

В каждой из неподвижных точек гиперэллиптической инволюции имеется только одно блоховское решение; при этом оно имеет определенную четность относительно преобразования (5.23), т.е.

$$\Psi(x) = \nu\Psi(-x)A(x), \qquad \nu = \pm 1. \tag{5.27}$$

Докажем, что $\nu = (-1)^\ell$.

Равенство (5.27) в точке $x = \eta$ дает:

$$s_1 = \nu k^{-1}\Psi(-\eta)(-1)^{\ell-1}\,\frac{\theta_1^2(\eta/2)}{\theta_1(\eta)}\,\theta_1(\ell\eta)\theta_1((\ell+1)\eta). \tag{5.28}$$

Сравнивая с равенством (5.3) (взятым в точке $x = 0$), находим, что если $s_1 \neq 0$, то $\nu = (-1)^\ell$. В противном случае $s_1 = 0$, и $\Psi(-\eta) = 0$.

Из (5.3) следует, что коэффициенты s_1 и s_2 в (5.5) не могут одновременно равняться нулю. В самом деле, пусть j – минимальный индекс, при котором $s_j \neq 0$. Предположим, что $j > 2$; тогда левая часть (5.3) имеет полюс в точке $z = (j-1)\eta$, а правая часть не имеет полюса в этой точке. Следовательно, если $s_1 = 0$, то $s_2 \neq 0$. В этом случае из (5.3) видно, что $\Psi(0) \neq 0$. В то же время из равенства (5.27) (взятого в точке $x = 0$) следует, что

$$\Psi(0) = (-1)^\ell\nu\Psi(0). \tag{5.29}$$

Тем самым мы доказали, что $\nu = (-1)^\ell$.

При $z = \omega_a$, $k = i^{\delta_{a,0}}\theta_1(\eta/2)$ представление дважды-блоховских функций в виде (5.5) эквивалентно следующему:

$$\Psi(x) = \left(\theta_1\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)^{x/\eta}\exp\bigl(\pi i(\delta_{2,a}+\delta_{3,a})x\bigr)\prod_{j=1}^{\ell}\frac{\theta_1(x+x_j)}{\theta_1(x-j\eta)}\,, \tag{5.30}$$

где[2]

$$\sum_{j=1}^{\ell} x_j = \omega_a. \tag{5.31}$$

Лемма 5.1. *Гиперэллиптическая инволюция кривой $\widehat{\Gamma}$ имеет $2d$ неподвижных точек, где d равно сумме размерностей функциональных подпространств, образованных функциями вида (5.30) и удовлетворяющими условию (5.27) при $\nu = (-1)^\ell$.*

[2]Это условие аналогично “правилу сумм” в [35].

Доказательство. Выше было показано, что для любой пары неподвижных точек гиперэллиптической инволюции кривой $\widehat{\Gamma}$, инвариантных относительно инволюции (5.21) (соответствующей изменению знака k), существует единственное решение уравнения (5.3) вида (5.30), удовлетворяющее (5.20) с $\nu = (-1)^{\ell}$. С другой стороны, пространство таких функций инвариантно при действии оператора $\widetilde{S}_0$. Действительно, равенство (5.28) при $\nu = (-1)^{\ell}$ (которое является следствием (5.27)) показывает, что $\widetilde{S}_0\Psi$ не имеет полюса при $z = 0$. В то же время $\widetilde{S}_0$ коммутирует с преобразованием (5.23). Следовательно, число решений уравнения (5.3), имеющих вид (5.30) и удовлетворяющих (5.27), равно числу собственных значений ε_i, $i = 1, \dots, d$, оператора $\widetilde{S}_0$ на этих конечномерных пространствах, т.е. равно сумме их размерностей.

Легко найти размерность пространства, определенного в последней лемме. При $\omega_0 = 0$ она равна $(\ell-1)/2$, если ℓ нечетно, и $\ell/2+1$, если ℓ четно. Для трех оставшихся точек второго порядка соответствующая размерность равна $(\ell+1)/2$ при нечетном ℓ и $\ell/2$ при четном ℓ. Следовательно, число неподвижных точек равно $4\ell + 2$, и мы доказали, что $g = 2\ell$.

Лемма 5.2. *Прямая сумма пространств функций, имеющих вид* (5.30) *и удовлетворяющих условию* (5.27) *с* $\nu = (-1)^{\ell}$, *инвариантна под действием операторов* $\widetilde{S}_a$,

$$(5.32)\qquad (\widetilde{S}_a\Psi)(x) = H_a\left[\frac{\theta_{a+1}(x-\ell\eta)}{\theta_1(x-\ell\eta)}\Psi(x+\eta) - \theta_1^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\frac{\theta_1(x-(\ell+1)\eta)\theta_{a+1}(-x-\ell\eta)}{\theta_1(x)\theta_1(x-\eta)}\Psi(x-\eta)\right],$$

$$(5.33)\qquad H_a = (i)^{\delta_{a,2}}\frac{\theta_{a+1}(\eta/2)}{\theta_1(\eta/2)},$$

которые калибровочно эквивалентны операторам (1.9).

Мы опускаем подробное доказательство, поскольку оно аналогично изложенному выше. Как и выше, из (5.28) следует, что $\widetilde{S}_a\Psi$ не имеет полюса при $x = 0$. В то же время эти операторы коммутируют с преобразованием (5.23) и не меняют блоховские множители, соответствующие функциональным подпространствам вида (5.30). Отметим, что коэффициенты операторов $\widetilde{S}_a$, $a \neq 0$, не являются эллиптическими; поэтому они сохраняют не каждое из этих подпространств по отдельности, а только их прямую сумму.

Замечание. Описанные выше инвариантные подпространства операторов $\widetilde{S}_a$ совпадают (после калибровочного преобразования (5.2)) с пространствами конечномерных представлений алгебры Склянина, найденными в [8]. Дальнейшие сведения об инвариантных функциональных подпространствах для склянинских операторов содержатся в следующем разделе.

Уравнения (5.18) задают k и ε как многозначные функции от z. Изучим теперь аналитические свойства дважды-блоховских решений $\Psi(x, Q)$, $Q = (z, k, \varepsilon) \in \widehat{\Gamma}$, на гиперэллиптической кривой $\widehat{\Gamma}$.

Теорема 5.1. *Блоховское решение* $\psi(x,P)=\Psi(x,P)\Psi^{-1}(0,P)$ *уравнения* (5.3) *является мероморфной функцией на алгебраической кривой* $\widehat{\Gamma}$ *рода* 2ℓ, *заданной уравнением*

$$y^2=\prod_{i=1}^{2l+1}(\varepsilon^2-\varepsilon_i^2) \tag{5.34}$$

(*здесь* ε_i – *собственные значения оператора* $\widetilde{S}_0$ *на конечномерном инвариантном пространстве функций вида* (5.30), (5.31)) *вне разреза, соединяющего точки* $P^{\pm}$ *на бесконечности* (*прообразы* $\varepsilon=\infty$ *на* $\widehat{\Gamma}$). *Вне этого разреза* $\psi(x,P)$ *имеет* 2ℓ *полюсов, не зависящих от* x *и инвариантных относительно инволюции кривой* $\widehat{\Gamma}$, *накрывающей инволюцию* $\varepsilon\to-\varepsilon$ (5.21). *Граничные значения* $\psi^{(\pm)}(x,P)$ *на противоположных берегах разреза связаны соотношением*

$$\psi^{(+)}=\psi^{(-)}e^{2\pi i/\eta}. \tag{5.35}$$

В окрестности точек $P^{\pm}$ *функция* $\psi(x,P)$ *имеет вид*

$$\psi=\varepsilon^{\pm x/\eta}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s^{\pm}(x)\varepsilon^{-s}\right),\qquad \xi_0^{+}\equiv 1. \tag{5.36}$$

Доказательство. Коэффициенты s_j в (5.5) являются решениями системы линейных уравнений (5.12). Нормируем их условием $s_1=1$. Тогда s_j являются мероморфными функциями на $\widehat{\Gamma}$. Следовательно, Ψ (как функция $Q\in\widehat{\Gamma}$) однозначно определена на кривой $\widehat{\Gamma}$ с разрезами между нулями и полюсами функции

$$K=\left(\frac{\theta_1(z-\eta)}{\theta_1(z+\eta)}\right)^{1/2}k(z). \tag{5.37}$$

В краях этих разрезов Ψ имеет особенность вида

$$\Psi\sim K^{x/\eta} \tag{5.38}$$

(с точностью до множителя порядка $O(1)$). Из (5.3) непосредственно вытекает, что функция Ψ с такими особенностями может быть решением этого уравнения только если $\varepsilon=\infty$ в точках сингулярности. С другой стороны, в окрестностях этих точек имеем: $K\sim\varepsilon^{\pm1}$. Это доказывает (5.36). Доказательство того, что число полюсов ψ равно 2ℓ, стандартно. Прежде всего заметим, что полюса ψ не зависят от x (поскольку полюса s_j не зависят от x). Рассмотрим следующую мероморфную функцию переменной ε:

$$F(\varepsilon)=\big(\psi(\eta,P_1(\varepsilon))-\psi(\eta,P_2(\varepsilon))\big)^2, \tag{5.39}$$

где $P_i(\varepsilon)$ – два прообраза ε на $\widehat{\Gamma}$. Функция F не зависит от нумерации этих точек, т.е. является мероморфной функцией от ε. Она имеет двойные полюса в проекциях полюсов функции ψ, полюс второго порядка в бесконечности и простые нули в точках ветвления. Числа нулей и полюсов мероморфной функции совпадают. Отсюда следует, что ψ имеет g полюсов.

Отметим, что эту теорему можно доказать также путем прямого рассмотрения аналитических свойств функции Ψ на кривой $\widehat{\Gamma}$, заданной в виде (5.18). Это альтернативное доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.2. Мы опускаем его и приводим лишь объяснение того, почему многозначная функция K имеет только один полюс и один ноль.

При $\ell > 1$ функция $\Phi_\ell(-j\eta, z)$ имеет полюс и ноль порядка j в точках $z = \pm\eta$ соответственно. Следовательно, k имеет на $\widehat{\Gamma}$ нули и полюса во всех прообразах точки $z = -\eta$ (соответственно, $z = \eta$). Отсюда видно, что K регулярна во всех этих точках. Функция Φ_ℓ имеет простой полюс в точке $z = -N\eta$. Оказывается, что в одном из прообразов этой точки функция ε (а также k) имеет полюс. Соответствующая точка – это одна из бесконечно удаленных точек кривой $\widehat{\Gamma}$ (представленной в виде (5.18)). Другая бесконечно удаленная точка является одним из прообразов точки $z = N\eta$.

Замечание. Формулы (1.9) задают одну из серий конечномерных представлений алгебры Склянина, найденных в работе [8] (названную там серией a)). В этой серии конечнозонным свойством обладает оператор S_0. Следует отметить, что в каждой из остальных серий один из операторов также обладает свойством конечнозонности. Три другие оператора в каждой из серий, вообще говоря, не обладают этим свойством. Тригонометрические вырождения разностных операторов (1.9) рассматривались в работе [32]. В этом случае S_0 соответствует солитонным решениям цепочки Тода.

6. Представления алгебры Склянина

В этом разделе мы покажем, каким образом можно строить представления алгебры Склянина из вакуумных векторов L-оператора (1.4). Понятия вакуумного вектора и вакуумной кривой L-оператора были введены в работе одного из авторов [33] в результате анализа решений уравнения Янга–Бакстера методами алгебраической геометрии. Напомним основные определения.

Рассмотрим сначала *произвольный* L-оператор $\mathscr{L}$ с двумерным вспомогательным пространством $\mathbb{C}^2$, т.е. произвольную матрицу размера $2n \times 2n$, представленную как блочную (2×2), с блоками $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \mathscr{C} & \mathscr{D} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Операторы $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ действуют в линейном пространстве $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^n$, называемом *квантовым пространством* L-оператора. Подчеркнем, что пока мы не накладываем на $\mathscr{L}$ никаких ограничений, в частности, не требуем соотношения (1.5) и не предполагаем никакой специальной параметризации матричных элементов.

Рассмотрим вектор $X \otimes U \in \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}^2$ $(X \in \mathscr{H}, U \in \mathbb{C}^2)$ такой, что

$$\mathscr{L}(X \otimes U) = Y \otimes V, \tag{6.2}$$

где $Y \in \mathscr{H}$, $V \in \mathbb{C}^2$ – некоторые векторы. Соотношение (6.2) означает, что неразложимый тензор $X \otimes U$ под действием $\mathscr{L}$ переходит опять в неразложимый тензор. В компонентной записи это равенство имеет вид

$$\mathscr{L}^{i\alpha}_{j\beta} X_j U_\beta = Y_i V_\alpha, \tag{6.3}$$

где индексы α, β (соответственно, i, j) нумеруют базисные векторы в $\mathbb{C}^2$ (соответственно, в $\mathscr{H}$) и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пусть (6.2) выполнено; тогда вектор X называется *вакуумным вектором* L-оператора $\mathscr{L}$. Умножив (6.2) слева на ковектор $\widetilde{V} = (V_2, -V_1)$, ортогональный V, будем иметь:

$$(\widetilde{V}\mathscr{L}U)X = 0. \tag{6.4}$$

Здесь $\widetilde{V}\mathscr{L}U$ – оператор в $\mathscr{H}$ с матричными элементами $\widetilde{V}_\alpha \mathscr{L}^{i\alpha}_{j\beta} U_\beta$. Обратно, из (6.4) следует (6.2) с некоторым $Y \in \mathscr{H}$, который однозначно восстанавливается по U, V и X.

Отметим, что соотношение (6.2) (в частном случае $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^2$) было отправной точкой для Бакстера в его решении восьмивершинной модели [14]. В работах по интегрируемым моделям статистической физики на решетке оно получило условное название "прохождение пары векторов через вершину". В контексте квантового метода обратной задачи [2] более привычным является эквивалентное ему соотношение (6.4). Оно интерпретируется как условие существования "локального вакуума" у калибровочно-преобразованного L-оператора, чем и обусловлена введенная выше терминология. В общем виде соотношение (6.2) впервые появилось в работе [33].

Из (6.4) видно, что необходимым и достаточным условием существования вакуумного вектора является

$$\det(\widetilde{V}\mathscr{L}U) = 0. \tag{6.5}$$

Положив для простоты $U_2 = V_2 = 1$ и воспользовавшись (6.1), можно представить (6.5) в более явном виде:

$$\det(U_1\mathscr{A} + \mathscr{B} - U_1V_1\mathscr{C} - V_1\mathscr{D}) = 0, \qquad U_2 = V_2 = 1. \tag{6.6}$$

Это уравнение задает в $\mathbb{C}^2$ алгебраическую кривую, которая называется *вакуумной кривой* L-оператора $\mathscr{L}$. Таким образом, семейство вакуумных векторов параметризуется точками вакуумной кривой (т.е. парами (U_1, V_1), удовлетворяющими (6.6)). В общем положении каждой точке вакуумной кривой отвечает единственный (с точностью до умножения на число) вакуумный вектор X.

Предположим теперь, что $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^2$ и $\mathscr{L}$ удовлетворяет уравнению (1.5) с некоторой матрицей R. В этом случае вакуумная кривая имеет род 1, т.е. является эллиптической кривой $\mathscr{E}_0$. Она параметризуется точками z одномерного комплексного тора с периодами 1 и τ.

Выбрав подходящую нормировку (например, положив вторые компоненты всех векторов равными 1), можно считать, что компоненты векторов $U(z)$, $V(z)$, $X(z)$, $Y(z)$

являются мероморфными функциями на $\mathscr{E}_0$ с не более чем двумя простыми полюсами. При такой нормировке правую часть (6.2) надо домножить на некоторую скалярную мероморфную функцию $h(z)$. Из уравнения Янга–Бакстера следует [33], что

$$Y(z) = X\Big(z + \frac{\eta}{2}\Big), \qquad V(z) = U\Big(z - \frac{\eta'}{2}\Big), \tag{6.7}$$

где η и η' – некоторые константы. Таким образом, основное соотношение (6.2) можно записать в виде [33]

$$\mathscr{L}\big(X(z) \otimes U(z)\big) = h(z)Y(z) \otimes V(z) = h(z)X\Big(z + \frac{\eta}{2}\Big) \otimes U\Big(z - \frac{\eta'}{2}\Big). \tag{6.8}$$

Пусть D_X (соответственно, D_U) – дивизор полюсов мероморфного вектора $X(z)$ (соответственно, $U(z)$). С каждым эффективным дивизором D ассоциировано линейное пространство $\mathscr{M}(D)$ функций, имеющих полюса в точках D кратности не выше той, с которой соответствующая точка входит в D. Для дивизоров степени 2 на эллиптической кривой это пространство в общем положении двумерно, так что $\dim \mathscr{M}(D_X) = \dim \mathscr{M}(D_U) = 2$, и базисы в этих пространствах образуют компоненты векторов X и U соответственно. Базис в пространстве функций, ассоциированных с дивизором $D_X + D_U$, образуют функции $X_i(z)U_\alpha(z)$, $i, \alpha = 1, 2$. Равенство (6.8) утверждает, что другим базисом в этом же пространстве являются функции $h(z)X_i(z + \eta/2)U_\alpha(z - \eta'/2)$, и матрица $\mathscr{L}$ связывает между собой два этих базиса. Дивизоры полюсов правой и левой частей равенства (6.8) должны быть эквивалентны, т.е. равны по модулю сдвига на вектор решетки. Поскольку при сдвиге на $\eta'/2$ дивизор полюсов функции, имеющей два полюса, меняется на η', это означает, что

$$\eta' - \eta = M + N\tau, \qquad M, N \in \mathbb{Z}. \tag{6.9}$$

В силу двоякопериодичности компонент векторов $X(z)$, $U(z)$ имеются всего 4 различных случая:

$$\eta' = \eta + 2\omega_a, \tag{6.10}$$

где $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = (\tau + 1)/2$, $\omega_3 = \tau/2$ (ср. с (5.6)).

На соотношении (6.8) основана бакстеровская параметризация матричных элементов L-оператора. Действительно, классы эквивалентности дивизоров полюсов у векторов $X(z)$ и $U(z)$ могут отличаться только сдвигом на $\mathscr{E}_0$. Величина этого сдвига отождествляется со спектральным параметром L-оператора. С помощью калибровочного преобразования можно представить $\mathscr{L}$ в виде (1.4). Эта параметризация позволяет записать (6.8) в терминах θ-функций.

При этом удобно воспользоваться другой нормировкой, в которой компоненты векторов – целые функции от z (в этом случае они представляют собой сечения линейных расслоений на $\mathscr{E}_0$).

Введем вектор

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} \theta_4\Big(z \mid \dfrac{\tau}{2}\Big) \\ \theta_3\Big(z \mid \dfrac{\tau}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Его компоненты образуют базис в пространстве θ-функций $\theta(z)$ второго порядка со свойствами монодромии $\theta(z+1)=\theta(z)$, $\theta(z+\tau)=\exp(-2\pi i\tau-4\pi iz)\theta(z)$. Они имеют по два нуля в фундаментальной области решетки с периодами $1,\tau$. Тогда, положив

$$X(z)=\Theta(z), \tag{6.12}$$

$$U(z)=U^{\pm}(z)=\Theta\Big(z\pm\frac{1}{2}\Big(u+\frac{\eta}{2}\Big)\Big) \tag{6.13}$$

(для каждого из знаков), можно переписать (6.2) в виде [14], [2]:

$$L^{(a)}(u)\Theta(z)\otimes\Theta\Big(z\pm\frac{1}{2}\Big(u+\frac{\eta}{2}\Big)\Big) \\ =2g_a^{\pm}\,\frac{\theta_1(u+\frac{\eta}{2}\mid\tau)}{\theta_1(\eta\mid\tau)}\Theta\Big(z+\frac{\eta}{2}\Big)\otimes\Theta\Big(z\pm\frac{1}{2}\Big(u-\frac{\eta}{2}\Big)\pm\omega_a\Big), \tag{6.14}$$

где

$$g_0^{\pm}=g_1^{\pm}=1,\qquad -ig_2^{\pm}=g_3^{\pm}=-\exp\Big(\pm2\pi iz+\pi i\Big(u+\frac{\tau-\eta}{2}\Big)\Big), \tag{6.15}$$

$$L^{(a)}(u)=\sum_{b=0}^{3}\frac{\theta_{b+1}(u\mid\tau)}{\theta_{b+1}(\frac{\eta}{2}\mid\tau)}\sigma_b\otimes(\sigma_a\sigma_b) \tag{6.16}$$

(см. (1.4) и (1.7)). Отметим, что $L^{(a)}(u)=\sigma_a L(u)$ ($L(u)$ дается формулой (1.4) при $S_a=\sigma_a$; матричное произведение берется во вспомогательном пространстве) удовлетворяет соотношению “$RLL=LLR$” (1.5) с *той же самой* R-матрицей (1.7) для любого $a=0,\dots,3$. Скалярный фактор в правой части (6.14) определяется из условия, что $L(\eta/2)$ пропорционален оператору перестановки в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$. Можно проверить (6.14) и прямым вычислением, пользуясь тождествами на θ-функции, собранными в приложении к этому разделу.

Замечание. На эллиптической кривой всегда можно считать, что вектор $X(z)$ является четной функцией: $X(-z)=X(z)$. Поэтому мы с самого начала выбрали параметризацию (6.11), в которой $X(z)$ – четная функция. При этом равенство, отвечающее выбору знака “$-$” в (6.14), является следствием аналогичного равенства со знаком “$+$” (достаточно сделать замену $z\to -z$). Тем не менее, как видно из работ Бакстера, оказывается полезным работать с обоими соотношениями.

Обратимся теперь к общему случаю L-оператора вида (1.4):

$$L(u)=\begin{pmatrix} W_0(u)S_0+W_3(u)S_3 & W_1(u)S_1-iW_2(u)S_2\\ W_1(u)S_1+iW_2(u)S_2 & W_0(u)S_0-W_3(u)S_3\end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

где

$$W_a(u)=\frac{\theta_{a+1}(u\mid\tau)}{\theta_{a+1}(\frac{\eta}{2}\mid\tau)}\,, \tag{6.18}$$

а S_a – генераторы некоторой алгебры (мы пока не предполагаем, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1), (1.2)). Из простого обобщения формулы (6.8) мы вскоре получим их функциональную реализацию.

Прежде чем сформулировать основное утверждение этого раздела, сделаем несколько предварительных замечаний.

Поскольку нас интересует общий вид представлений в терминах разностных операторов, начиная с этого места будем считать, что квантовым пространством L-оператора (6.17) является *пространство мероморфных функций одной комплексной переменной* z. Генераторы S_a действуют на элементах этого пространства (т.е. функциях $X(z)$):

$$S_a \colon X(z) \mapsto (S_a X)(z). \tag{6.19}$$

В качестве обобщения равенств (6.8) и (6.14) рассмотрим следующие соотношения:

$$U^{\pm}(z)^T \big(\sigma_a L(u)\big) X(z) = g_a(u) U^{\pm}(z \mp \ell\eta \mp \omega_a)^T X\Big(z \pm \frac{\eta}{2}\Big), \qquad a = 0, \dots, 3. \tag{6.20}$$

Здесь $z \in \mathscr{E}_0$, $U^T = (U_1, U_2)$, ℓ – параметр, $g_a(u)$ – скалярные функции, не зависящие от z,

$$U^{\pm}(z) = \Theta\bigg(z \pm \frac{u + \ell\eta}{2}\bigg) \tag{6.21}$$

(при $\ell = 1/2$ $U^{\pm}$ совпадает с (6.13)). Как и ранее, $L(u)$ действует на $U^{\pm}$ как $(2{\times}2)$-матрица, а каждый матричный элемент $L(u)$ действует на $X(z)$ согласно (6.19). Использование транспонированного вектора в (6.20) связано с тем, что действие оператора (6.19) на функцию *слева* эквивалентно *правому* действию матрицы этого оператора в некотором базисе на вектор-строку, состоящую из коэффициентов разложения функции $X(z)$ по этому базису. Поэтому, как будет ясно из дальнейшего, при $\ell = 1/2$ соотношение (6.20) совпадает с *транспонированным* равенством (6.14).

К сожалению, в настоящее время мы не можем предложить сколько-нибудь явного описания вакуумной кривой L-оператора (6.17) и не располагаем непосредственным доказательством эквивалентности равенства (6.20) "сплетающему" соотношению (1.5) для $L(u)$ (вместе с уравнением Янга–Бакстера для $R(u)$). Из теоремы 6.1 (см. ниже) будет следовать, что из (6.20) вытекают коммутационные соотношения алгебры Склянина на S_a, а значит, $L(u)$ должен удовлетворять (1.5). Подчеркнем еще раз, что ход наших рассуждений в каком-то смысле обратен логике работы Склянина (см. также [34], [35], где были получены некоторые формулы для вакуумных векторов в XYZ-модели с произвольным спином): в основу кладется соотношение (6.20), причем на S_a никаких условий заранее не накладывается. Оказывается, что отсюда следует алгебра Склянина на S_a вместе с ее явной функциональной реализацией.

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 6.1. *Пусть $L(u)$ задан формулой* (6.17), *в которой S_a – некоторые операторы, действующие в пространстве мероморфных функций $X(z)$ комплексной переменной z. Предположим, что выполнены соотношения* (6.20) *при $a = 0$, т.е.*

$$U^{\pm}(z)^T L(u) X(z) = g_0(u) U^{\pm}(z \mp \ell\eta)^T X\Big(z \pm \frac{\eta}{2}\Big), \tag{6.22}$$

где $U^{\pm}(z)$ дается формулой (6.21), *ℓ – параметр, и $g_0(u)$ – некоторая скалярная функция, не зависящая от z. Тогда S_a являются разностными операторами следующего вида*:

$$\begin{aligned}(S_a X)(z) = \lambda \frac{(i)^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\frac{\eta}{2} \mid \tau)}{\theta_1(2z \mid \tau)} \\ \times \Big(\theta_{a+1}(2z - \ell\eta \mid \tau) X\Big(z + \frac{\eta}{2}\Big) - \theta_{a+1}(-2z - \ell\eta \mid \tau) X\Big(z - \frac{\eta}{2}\Big)\Big),\end{aligned} \tag{6.23}$$

где λ – произвольная константа. Обратно, если S_a заданы формулами (6.23), *то выполнено* (6.22), *причем*

$$g_0(u) = 2\lambda \theta_1(u + \ell\eta \mid \tau). \tag{6.24}$$

Замечание. а) Из закона преобразования вектора $\Theta(z)$ при сдвигах на полупериоды вытекает, что соотношения (6.20) при $a \neq 0$ следуют из (6.22); б) Если $X(z)$ – четная функция, то равенства (6.22) эквивалентны.

Доказательство. Равенства (6.22) представляют собой систему четырех линейных уравнений на четыре неизвестных функции $(S_a X)(z)$, входящих в левую часть. В более подробной записи имеем:

$$U_1^{\pm}(z)\big(L_{11}(u)X\big)(z) + U_2^{\pm}(z)\big(L_{21}(u)X\big)(z) = g_0(u) U_1^{\pm}(z \mp \ell\eta) X\Big(z \pm \frac{\eta}{2}\Big), \tag{6.25}$$

$$U_1^{\pm}(z)\big(L_{12}(u)X\big)(z) + U_2^{\pm}(z)\big(L_{22}(u)X\big)(z) = g_0(u) U_2^{\pm}(z \mp \ell\eta) X\Big(z \pm \frac{\eta}{2}\Big), \tag{6.26}$$

где $\big(L_{\alpha\beta}(u)X\big)(z)$ выражается через $(S_a X)(z)$ согласно (6.17). Зафиксируем $g_0(u)$ как в (6.24). Решая эту систему, получаем формулы (6.23) (все необходимые для этого тождества на θ-функции собраны в приложении к этому разделу). Тем самым (6.23) эквивалентно (6.22), (6.24).

Следствие 6.1. *Пусть для некоторого $L(u)$ вида* (6.17) *выполнено равенство* (6.22). *Тогда $L(u)$ удовлетворяет "сплетающему" соотношению* (1.5) *с R-матрицей* (1.7).

Доказательство заключается в отождествлении формул (6.23) с формулами (1.9) для представлений алгебры Склянина разностными операторами путем замены $2z \equiv x$, $X(x/2) \equiv f(x)$. Константа λ несущественна в силу однородности коммутационных соотношений (1.1), (1.2).

Замечание. Решение системы (6.22) требует гораздо меньших вычислений, чем непосредственная подстановка формул (6.23) в коммутационные соотношения. Объем вычислений в первом случае примерно совпадает с тем, который необходим при прямой подстановке, если следить только за коэффициентами при $f(x \pm 2\eta)$.

Рассмотрим теперь равенство (6.20) при $a = 1, 2, 3$.

Лемма 6.1. *Определим преобразование генераторов $S_b \mapsto \mathscr{Y}_a(S_b)$, $a, b = 0, \dots, 3$, с помощью формулы*

$$\sigma_a L(u + \omega_a) = h_a(u) \sum_{b=0}^{3} \frac{\theta_{b+1}(u \mid \tau)}{\theta_{b+1}(\frac{\eta}{2} \mid \tau)} \mathscr{Y}_a(S_b) \otimes \sigma_b, \tag{6.27}$$

где $h_0(u) = h_1(u) = 1$, $h_2(u) = -ih_3(u) = \exp(-\frac{1}{4}i\pi\tau - i\pi u)$. Тогда $\mathscr{Y}_a$, $a = 0, \dots, 3$, является автоморфизмом алгебры, порожденной генераторами S_b.

Утверждение леммы следует из того, что $\sigma_a L(u + \omega_a)$, $a = 0, \dots, 3$, удовлетворяет "сплетающему" соотношению (1.5) с R-матрицей (1.7). Это, в свою очередь, вытекает из того, что матрицы σ_a также являются (c-числовыми) решениями уравнения (1.5). Сравнивая левую часть равенства (6.27) с правой, находим явный вид $\mathscr{Y}_a$ (здесь $\theta_a(\frac{\eta}{2}) \equiv \theta_a(\frac{\eta}{2} \mid \tau)$):

$$\mathscr{Y}_1\colon (S_0, S_1, S_2, S_3) \mapsto \left(-\frac{\theta_1(\frac{\eta}{2})}{\theta_2(\frac{\eta}{2})} S_1, \frac{\theta_2(\frac{\eta}{2})}{\theta_1(\frac{\eta}{2})} S_0, -\frac{i\theta_3(\frac{\eta}{2})}{\theta_4(\frac{\eta}{2})} S_3, \frac{i\theta_4(\frac{\eta}{2})}{\theta_3(\frac{\eta}{2})} S_2\right), \tag{6.28}$$

$$\mathscr{Y}_2\colon (S_0, S_1, S_2, S_3) \mapsto \left(\frac{\theta_1(\frac{\eta}{2})}{\theta_3(\frac{\eta}{2})} S_2, \frac{i\theta_2(\frac{\eta}{2})}{\theta_4(\frac{\eta}{2})} S_3, \frac{\theta_3(\frac{\eta}{2})}{\theta_1(\frac{\eta}{2})} S_0, -\frac{\theta_4(\frac{\eta}{2})}{\theta_2(\frac{\eta}{2})} S_1\right), \tag{6.29}$$

$$\mathscr{Y}_3\colon (S_0, S_1, S_2, S_3) \mapsto \left(\frac{\theta_1(\frac{\eta}{2})}{\theta_4(\frac{\eta}{2})} S_3, -\frac{\theta_2(\frac{\eta}{2})}{\theta_3(\frac{\eta}{2})} S_2, \frac{\theta_3(\frac{\eta}{2})}{\theta_2(\frac{\eta}{2})} S_1, \frac{\theta_4(\frac{\eta}{2})}{\theta_1(\frac{\eta}{2})} S_0\right), \tag{6.30}$$

и $\mathscr{Y}_0$ – тождественное преобразование. Эти автоморфизмы рассматривались Скляниным в [8].

Сделав сдвиг $u \to u + \omega_a$ в (6.20) и применив эти автоморфизмы к (6.23), получим для $b = 0, \dots, 3$ следующие формулы:

$$\begin{aligned}(S_a X)(z) = {}& \frac{(i)^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\frac{\eta}{2})}{\theta_1(2z)} \\ & \times \left(\theta_{a+1}(2z - \ell\eta - \omega_b) X\left(z + \frac{\eta}{2}\right) - \theta_{a+1}(-2z - \ell\eta - \omega_b) X\left(z - \frac{\eta}{2}\right)\right).\end{aligned} \tag{6.31}$$

Если считать ℓ произвольным комплексным параметром, то (6.31) сводится к (6.23) формальной заменой $\ell \to \ell + \omega_b/\eta$. Однако вскоре мы увидим, что после выделения инвариантных подпространств формулы (6.31) дают различные серии конечномерных представлений алгебры Склянина.

Пусть теперь $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$; тогда функцию $X(z)$ можно отождествить с сечением некоторого линейного расслоения на исходной эллиптической кривой $\mathscr{E}_0$. Повторяя аргументы, приведенные после формулы (6.8), можно показать, что степень этого расслоения равна 4ℓ. Из теоремы Римана–Роха для эллиптической кривой следует, что в общем положении пространство голоморфных сечений этого расслоения 4ℓ-мерно. Удобно отождествить эти сечения с θ-функциями порядка 4ℓ. Рассмотрим пространство $\mathscr{T}_{4\ell}^{+}$ *четных* θ-функций порядка 4ℓ, т.е. пространство целых функций $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$, таких, что $F(-z) = F(z)$ и

$$\begin{aligned} F(z+1) &= F(z), \\ F(z+\tau) &= \exp(-4\ell\pi i\tau - 8\ell\pi i z)F(z). \end{aligned} \tag{6.32}$$

Точно так же, как в работе [8], можно показать, что пространство $\mathscr{T}_{4\ell}^{+}$ инвариантно под действием операторов (6.31) при $b = 0$ и $b = 1$, а при $b = 2$ и $b = 3$ инвариантно пространство $\exp(-\pi i z^2/\eta)\mathscr{T}_{4\ell}^{+}$. Известно, что $\dim \mathscr{T}_{4\ell}^{+} = 2\ell + 1$ (при условии, что $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{+}$). Ограничивая разностные операторы (6.31) на эти инвариантные подпространства, мы получаем 4 серии конечномерных представлений.

То, что эти представления, вообще говоря, не эквивалентны, устанавливается из анализа значений центральных элементов алгебры:

$$\boldsymbol{K}_0 = \sum_{a=0}^{3} S_a^2, \qquad \boldsymbol{K}_2 = \sum_{i=1}^{3} J_i S_i^2 \tag{6.33}$$

(константы J_i определены в (1.3) и (1.10). Их значения для представлений (6.31) при $b = 0, \ldots, 3$ даются формулами:

$$\boldsymbol{K}_0 = 4\theta_1^2\Big(\Big(\ell + \frac{1}{2}\Big)\eta + \omega_b \mid \tau\Big), \tag{6.34}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = 4\theta_1\big((\ell+1)\eta + \omega_b \mid \tau\big)\theta_1(\ell\eta + \omega_b \mid \tau). \tag{6.35}$$

Приведенные выше аргументы позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Алгебра Склянина* (1.1), (1.2) *имеет* 4 *различные серии конечномерных представлений, которые нумеруются индексом* $b = 0, 1, 2, 3$. *Представления каждой из серий параметризуются дискретным индексом* $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{+}$ *("спином"). Они получаются ограничением операторов* (6.31) *на инвариантные* $(2\ell + 1)$*-мерные функциональные подпространства* $\mathscr{T}_{4\ell}^{+}$ *для* $b = 0, 1$ *и* $\exp(-\pi i z^2/\eta)\mathscr{T}_{4\ell}^{+}$ *для* $b = 2, 3$. *При общих значениях параметров эти представления попарно не эквивалентны.*

Сравним полученные представления с теми, которые были найдены Склянином в [8]. При $b = 0$ и $b = 3$ воспроизводятся серии a) и c) соответственно. Эти представления являются самосопряженными по отношению к вещественной форме алгебры, рассмотренной в [8]. Две другие серии (соответствующие $b = 1$ и $b = 2$), вообще говоря, не являются самосопряженными. Рассмотрим сначала случай $b = 1$. Для рациональных значений η, $\eta = p/q$, и специальных значений ℓ, $\ell = (q-1)/2 \bmod q$, эти представления самосопряжены и эквивалентны некоторому подмножеству представлений серии b).[3] Серия, отвечающая $b = 2$, по-видимому, не упоминалась в литературе (хотя неявно она содержится в работе Склянина). Отметим, что наш подход устанавливает естественное соответствие между сериями представлений алгебры Склянина и точками второго порядка на эллиптической кривой.

Естественно предположить, что представления двух последних серий становятся самосопряженными по отношению к другим вещественным формам алгебры. Вещественная форма определяется заданием анти-инволюции ($*$-операции) на алгебре. Классификация неэквивалентных вещественных форм алгебры Склянина и ее обобщений представляет собой интересную нерешенную задачу.

В заключение этого раздела отметим, что переменная z в (6.20) и (6.31) (т.е. та переменная, на функциях от которой строятся представления), будучи подходящим образом дискретизована, совпадает со статистической переменной в решеточных моделях IRF-типа ("Interaction Round a Face") [36]. Это видно из хорошо известного соответствия между вершинными моделями и моделями IRF-типа если вспомнить, что преобразование, связывающее эти модели, строится в терминах вакуумных векторов (явный вид этого преобразования для моделей произвольного спина см. в [35]).

Наконец, представляется крайне интересным провести детальный анализ тригонометрического и рационального пределов конструкции этого раздела. Некоторые относящиеся сюда вопросы уже обсуждались в литературе. В недавней работе [37] были построены вакуумные векторы для спиновых цепочек XXZ-типа с произвольным спином. Вакуумные кривые тригонометрических L-операторов изучались в [38]. В простейших случаях они представляют собой набор рациональных кривых, пересекающихся в двух точках. Тригонометрические вырождения алгебры Склянина, которые в некотором смысле являются "промежуточными" между исходной алгеброй и стандартной квантовой деформацией алгебры gl_2, обсуждаются в [32].

Приложение к разделу 6

Мы пользуемся следующим определением θ-функций:

$$\theta_1(z \mid \tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(\pi i\tau\Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2 + 2\pi i\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\Big), \tag{6.36}$$

$$\theta_2(z \mid \tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(\pi i\tau\Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2 + 2\pi i z\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\Big), \tag{6.37}$$

$$\theta_3(z \mid \tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\big(\pi i\tau k^2 + 2\pi i z k\big), \tag{6.38}$$

$$\theta_4(z \mid \tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(\pi i\tau k^2 + 2\pi i\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big). \tag{6.39}$$

[3] Полное семейство представлений серии b), найденных в [8], имеет 3 непрерывных параметра. Эти представления самосопряжены и существуют лишь при $\eta = p/q$. В этом случае все они имеют размерность q. Они получаются ограничением оператора (6.31) на конечную однородную решетку.

Для удобства читателя мы приведем также определение σ-функции, использовавшейся в разделах 2–4:

$$\sigma(z \mid \omega, \omega') = \frac{2\omega}{\theta_1'(0)} \exp\left(\frac{\zeta(\omega) z^2}{2\omega}\right) \theta_1\left(\frac{z}{2\omega} \,\Big|\, \frac{\omega'}{\omega}\right). \tag{6.40}$$

Ниже приводится список тождеств, которые необходимы при вычислениях.

Первая группа тождеств (теоремы сложения):

$$\theta_4(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) = \theta_4(x+y \mid 2\tau)\theta_4(x-y \mid 2\tau) + \theta_1(x+y \mid 2\tau)\theta_1(x-y \mid 2\tau), \tag{6.41}$$

$$\theta_4(x \mid \tau)\theta_4(y \mid \tau) = \theta_3(x+y \mid 2\tau)\theta_3(x-y \mid 2\tau) - \theta_2(x+y \mid 2\tau)\theta_2(x-y \mid 2\tau), \tag{6.42}$$

$$\theta_3(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) = \theta_3(x+y \mid 2\tau)\theta_3(x-y \mid 2\tau) + \theta_2(x+y \mid 2\tau)\theta_2(x-y \mid 2\tau), \tag{6.43}$$

$$\theta_2(x \mid \tau)\theta_2(y \mid \tau) = \theta_3(x+y \mid 2\tau)\theta_2(x-y \mid 2\tau) + \theta_2(x+y \mid 2\tau)\theta_3(x-y \mid 2\tau), \tag{6.44}$$

$$\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau) = \theta_3(x+y \mid 2\tau)\theta_2(x-y \mid 2\tau) - \theta_2(x+y \mid 2\tau)\theta_3(x-y \mid 2\tau). \tag{6.45}$$

Удобно отдельно выписать следующие их тривиальные следствия:

$$\theta_4(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) + \theta_4(y \mid \tau)\theta_3(x \mid \tau) = 2\theta_4(x+y \mid 2\tau)\theta_4(x-y \mid 2\tau), \tag{6.46}$$

$$\theta_4(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) - \theta_4(y \mid \tau)\theta_3(x \mid \tau) = 2\theta_1(x+y \mid 2\tau)\theta_1(x-y \mid 2\tau), \tag{6.47}$$

$$\theta_3(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) + \theta_4(y \mid \tau)\theta_4(x \mid \tau) = 2\theta_3(x+y \mid 2\tau)\theta_3(x-y \mid 2\tau), \tag{6.48}$$

$$\theta_3(x \mid \tau)\theta_3(y \mid \tau) - \theta_4(y \mid \tau)\theta_4(x \mid \tau) = 2\theta_2(x+y \mid 2\tau)\theta_2(x-y \mid 2\tau). \tag{6.49}$$

Вторая группа тождеств:

$$2\theta_1(x \mid 2\tau)\theta_4(y \mid 2\tau) = \theta_1\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_2\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big) + \theta_2\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_1\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big), \tag{6.50}$$

$$2\theta_3(x \mid 2\tau)\theta_2(y \mid 2\tau) = \theta_1\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_1\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big) + \theta_2\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_2\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big), \tag{6.51}$$

$$2\theta_3(x \mid 2\tau)\theta_3(y \mid 2\tau) = \theta_3\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_3\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big) + \theta_4\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_4\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big), \tag{6.52}$$

$$2\theta_2(x \mid 2\tau)\theta_2(y \mid 2\tau) = \theta_3\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_3\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big) - \theta_4\Big(\frac{x+y}{2} \mid \tau\Big)\theta_4\Big(\frac{x-y}{2} \mid \tau\Big). \tag{6.53}$$

Их частные случаи:

$$2\theta_1(z \mid \tau)\theta_4(z \mid \tau) = \theta_2\Big(0 \mid \frac{\tau}{2}\Big)\theta_1\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big), \tag{6.54}$$

$$2\theta_2(z \mid \tau)\theta_3(z \mid \tau) = \theta_2\Big(0 \mid \frac{\tau}{2}\Big)\theta_2\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big). \tag{6.55}$$

Еще два тождества:

$$\theta_1\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big)\theta_2\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big) = \theta_4(0 \mid \tau)\theta_1(2z \mid \tau), \tag{6.56}$$

$$\theta_4\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big)\theta_3\Big(z \mid \frac{\tau}{2}\Big) = \theta_4(0 \mid \tau)\theta_4(2z \mid \tau). \tag{6.57}$$

7. Заключительные замечания

В данной работе обсуждаются следующие три основные темы:

I) Динамика полюсов эллиптических решений двумеризованной неабелевой цепочки Тода;
II) Разностные аналоги операторов Ламе;
III) Представления алгебры Склянина разностными операторами в некотором функциональном пространстве.

Еще раз перечислим полученные результаты:

- Динамика полюсов описывается уравнениями движения спиновых обобщений многочастичных систем Рейсенарса–Шнайдера, для которых построены переменные типа действие-угол в терминах некоторых алгебро-геометрических данных;
- Один из генераторов алгебры Склянина, представленный как разностный оператор второго порядка с эллиптическими коэффициентами, обладает свойством конечнозонности, чем и объясняется аналогия с операторами Ламе;
- На основе понятия вакуумных векторов L-оператора предложена общая схема построения функциональных реализаций алгебры Склянина.

Здесь нам хотелось бы объяснить, почему эти три вопроса должны быть связаны между собой более тесно, чем это, возможно, представляется на первый взгляд.

С каждой из задач I)–III) были ассоциированы некоторые классы алгебраических кривых. В случае I) это спектральные кривые Γ L-операторов систем типа Рейсенарса–Шнайдера; в случае II) это спектральные кривые Γ' разностного оператора Ламе S_0 (генератора алгебры Склянина); в случае III) это вакуумные кривые $\mathscr{E}$ эллиптических L-операторов с произвольным спином (1.4). Было показано, что Γ и Γ' являются разветвленными накрытиями исходной эллиптической кривой. Характеристическое свойство (6.20) вакуумных векторов позволяет предположить, что $\mathscr{E}$ тоже представляет собой разветвленное накрытие исходной эллиптической кривой $\mathscr{E}_0$ (т.е. вакуумной кривой L-оператора для спина $1/2$).

Связь между I) и II) аналогична взаимоотношению между эллиптическими решениями уравнений КП и КдФ. Более точно, эллиптические решения абелевой двумеризованной цепочки Тода, *стационарные относительно потока* $t_+ + t_-$, соответствуют *изоспектральным деформациям* разностного оператора Ламе S_0 (который является оператором Лакса для одномерной цепочки Тода). Другими словами, гиперэллиптические кривые Γ' образуют некоторый подкласс в семействе кривых Γ. Аналогичная редукция в неабелевом случае приводит к спиновым обобщениям разностных операторов Ламе. Их свойства, а также возможная связь с квадратичными алгебрами типа Склянина, пока совершенно не изучены.

Помимо очевидного замечания, что конструкция раздела 6 служит естественным источником разностных операторов типа Ламе, нам представляется, что должна существовать более глубокая связь между II) и III). Именно, вакуумные кривые $\mathscr{E}$ очень близки к спектральным кривым Γ'. Возможно, они могут даже совпадать (по крайней мере в некоторых частных случаях). Мы оставляем этот интересный вопрос в качестве задачи на будущее.

Наконец, хотелось бы отметить явную аналогию между основным анзацем (2.26) настоящей работы и функциональным анзацем Бете [39]. Действительно, во втором случае волновая функция (в разделенных переменных) ищется в виде "эллиптического полинома" $\prod \sigma(z - z_j)$, причем корни z_j должны удовлетворять системе уравнений Бете. Аналогичным образом, в первом случае решение порождающей линейной задачи ищется в виде *отношения* двух "эллиптических полиномов" (см., например, (5.30)). Разница заключается только в том, что мы параметризуем эту функцию вычетами в полюсах, а не нулями числителя, как в анзаце Бете. Это указывает на возможную нетривиальную взаимосвязь[4] между моделями типа Мозера–Калоджеро (и системами Хитчина более общего вида) и квантовыми интегрируемыми моделями, которые решаются с помощью анзаца Бете.

Авторы благодарны А. Горскому и Т. Такебе за обсуждения. И. К. очень признателен Technion University at Haifa, Rome1 University, Scoula Normale at Pisa и Berlin Technishe University за гостеприимство во время выполнения данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. №4. С. 27–34.

[2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // УМН. 1979. Т. 34. №5. С. 13–63.

[3] Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments // Lect. Notes in Phys. V. 151, 1982. P. 61–119.

[4] Изергин А. Г., Корепин В. Е. Квантовый метод обратной задачи // Физика элем. частиц и ат. ядра. 1982. Т. 13. №3. С. 501–541.

[5] Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. №4. С. 18–26.

[6] Одесский А. В., Фейгин Б. Л. Эллиптические алгебры Склянина // Функц. анализ и прилож. 1989. Т. 23. №3. С. 45–54.

[7] Artin M., Tate J., Van den Bergh M. Modules over regular algebras of dimension 3 // Invent. Math. 1991. V. 106. P. 335–388; Some algebras related to automorphisms of elliptic curves // Grothendieck Festschrift. V. 1. Basel: Birkhäuser, 1990. P. 33–85.

[8] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. №4. С. 34–48.

[9] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136.

[4] Формальное сходство уравнений Бете и уравнений движения систем типа Мозера–Калоджеро с дискретным временем, недавно отмеченное в работе [40], возможно, является одним из проявлений этой связи.

[10] Кричевер И. М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216.

[11] Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 23. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 79–136.

[12] Date E., Tanaka S. Exact solutions of the periodic Toda lattice // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 5. P. 457–465.

[13] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

[14] Baxter R. Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. I. Some fundamental eigenvectors // Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 1–24.

[15] Airault H., McKean H., Moser J. Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem // Comm. Pure and Appl. Math. 1977. V. 30. P. 95–125.

[16] Кричевер И. М. О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. №1. С. 76–78.

[17] Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Pole expansions of non-linear partial differential equations // Nuovo Cimento. 1977. V. 40B. P. 339–350.

[18] Кричевер И. М. Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. №4. С. 45–54.

[19] Krichever I., Babelon O., Billey E., Talon M. Spin generalization of the Calogero–Moser system and the Matrix KP equation // Preprint LPTHE 94/42.

[20] Ruijsenaars S. N. M., Schneider H. A new class of integrable systems and its relation to solitons // Ann. Phys. (NY). 1986. V. 170. P. 370–405.

[21] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebrs // Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313–400.

[22] Kazhdan D., Kostant B., Sternberg S. Gamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. P. 481–507.

[23] Gorsky A., Nekrasov N. Hamiltonian systems of Calogero type and two-dimensional Yang–Mills theory // Nucl. Phys. 1994. V. B414. P. 213–238.

[24] Gorsky A., Nekrasov N. Elliptic Calogero–Moser system from two-dimensional current algebra // Preprint ITEP-NG/1-94, hep-th/9401021.

[25] Hitchin N. Stable bundles and integrable systems // Duke Math. 1987. V. 54. №1. P. 91–114.

[26] Nekrasov N. Holomorphic bundles and many-body systems // Preprint PUPT-1534 (1995), hep-th/9503157.

[27] Годен М. Волновая функция Бете. М.: Мир, 1987.

[28] Enriquez B., Rubtsov V. Hitchin systems, higher Gaudin operators and r-matrices // Preprint, alg-geom/9503010.

[29] Ruijsenaars S. N. M. Complete integrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic functions identities // Comm. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191–213.

[30] Bruschi M., Calogero F. The Lax representation for an integrable class of relativistic dynamical sustems // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. P. 481–492.

[31] Кричевер И. М. Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумерное обобщение // УМН. 1981. Т. 36. №2. С. 72–77.

[32] Gorsky A., Zabrodin A. Degenerations of Sklyanin algebra and Askey–Wilson polynomials // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26. P. L635–L639.

[33] Кричевер И. М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. №2. С. 22–35.

[34] Takebe T. Generalized Bethe ansatz with the general spin representation of the Sklyanin algebra // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. 1071–1083.

[35] Takebe T. Bethe ansatz for higher spin eight vertex models // Univ. of Tokyo preprint 95-25, q-alg/950427 (April 1995).

[36] Andrews G., Baxter R., Forrester P. Eight-vertex SOS model and Rogers–Ramanujan-type identities // J. Stat. Phys. 1984. V. 35. P. 193–266.

[37] Yung C. M., Batchelor M. T. Exact solution for the spin-s XXZ quantum chain with non-diagonal twists // Preprint MRR 014-95 (January 1995), hep-th/9502041.

[38] Корепанов И. Г. Вакуумные кривые L-операторов, связанных с шестивершинной моделью // Алгебра и Анализ. 1994. Т. 6. С. 176–194.

[39] Склянин Е. К. Волчок Горячева–Чаплыгина и метод обратной задачи рассеяния // Зап. Научн. Семин. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 236–257.

[40] Nijhof F., Ragnisco O., Kuznetsov V. Integrable time-discretization of the Ruijsenaars–Schneider model // Univ. of Amsterdam preprint 94-27, hep-th/9412170 (1994).

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН;
Институт химической физики РАН

Поступила в редакцию
29.05.1995