

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

И. М. Кричевер

Настоящая работа была стимулирована недавними результатами [1] по построению автомодельных решений модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения \sin -gordon. Такие решения описываются обыкновенными уравнениями типа Пенлеве [2], для которых найдено коммутационное представление [1]. Задача восстановления совместной собственной функции вспомогательных операторов сводится к задаче Римана. Согласно [1] аналогами данных рассеяния являются матрицы перехода на скачках этой функции на «антистоксовских линиях».

Принципиальным отличием предлагаемой схемы является использование пары Лакса для первичных уравнений в частных производных. Это позволяет объединить в единую конструкцию построение автомодельных решений и других известных классов точных решений: многосолитонных и рациональных. Общие решения, получаемые в рамках нашей конструкции, соответствуют «солитонам на фоне автомодельных решений». Не представляет труда перенос всех построений на нетривиальные алгебраические кривые (многосолитонные решения отвечают в алгебро-геометрических конструкциях вырождениям этих кривых до рациональной). Это будет сделано в подробной публикации результатов этой работы.

1. Для определенности ограничимся уравнениями Лакса для операторов со скалярными коэффициентами. Заметим, что при этом, как и при построении конечнозонных решений ранга $l > 1$ (см. [3], [4]), восстановление совместных собственных функций скалярных дифференциальных операторов использует векторную задачу Римана.

Пусть φ_s — угол, задающий на λ -плоскости s -й луч, определяемый равенством

$$\operatorname{Re} \left[\lambda^m \left(\exp \left(\frac{2\pi i}{n} k \right) - \exp \left(\frac{2\pi i}{n} l \right) \right) \right] = 0, \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad (1)$$

Сопоставим каждому лучу постоянную матрицу G_s такую, что $G_s^{kk} = 1$, а элемент G_s^{kl} ($k \neq l$) может быть отличен от нуля лишь для тех индексов, для которых на соответствующем луче выполнено (1) и для которых в окрестности этого луча левая часть (1) убывает при повороте против часовой стрелки. Заметим, что если $G_s^{kl} \neq 0$, то $G_s^{lk} = 0$. Указанный набор лучей инвариантен относительно поворота на $2\pi/n$. Пусть $\sigma(s)$ — соответствующая перестановка индексов. Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$G_{\sigma(s)} = M^{-1} G_s M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Пусть $\nu_{s'}$ и $\mu_{s'}$, $1 \leq s' \leq Nn$, — два набора комплексных чисел, инвариантных относительно поворота на $2\pi/n$, и $\tau(s')$ — соответствующая перестановка индексов. Сопоставим им постоянные вектора $\alpha_{s'} = (\alpha_{s'1}, \dots, \alpha_{s'n})$ и $\beta_{s'} = (\beta_{s'1}, \dots, \beta_{s'n})$ также, что $\alpha_{\tau(s')} = \alpha_{s'} M$, $\beta_{\tau(s')} = (\beta_{s'} M$. Пары $(\nu_{s'}, \alpha_{s'})$, $(\mu_{s'}, \beta_{s'})$ называются «параметрами Тюринга», как и в [3], [4].

Каждому набору перечисленных «данных обратной задачи» отвечает единственная вектор-функция $\psi(x, t, \lambda) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ такая, что

1°. Функция ψ имеет вид $v(x, t, \lambda) \Psi_0$, где $v(x, t, \lambda)$ — кусочно мероморфная на расширенной λ -плоскости вектор-функция, а матрица $\Psi_0 = \exp(\lambda Qx + \lambda^m Q^m t)$, $Q^{kl} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right) \delta_{kl}$.

2°. Вне ∞ ψ кусочно мероморфна, имеет скачки на лучах $r e^{i\varphi_s}$, $r > 0$, причем

$$\psi^{+s}(r) = \psi^{-s}(r) G_s, \quad (3)$$

где $\psi^{\pm s}(r) = \psi(re^{i\varphi_s \pm i0})$.

3°. Полюса ψ лежат в точках $\nu_{s'}$, для вычетов ее компонент выполняется соотношение

$$\alpha_{s'l} \operatorname{res}_{\nu_{s'}} \psi_l = \alpha_{s'k} \operatorname{res}_{\nu_{s'}} \psi_k, \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad (4)$$

Кроме того, пусть

$$\sum_{l=1}^n \beta_s \gamma_l \psi_l(x, t, \mu_s) = 0. \quad (5)$$

$$4^\circ. \quad \psi\left(x, t, \lambda \exp \frac{2\pi i}{n}\right) = \psi(x, t, \lambda) M. \quad (6)$$

Л е м м а 1. Существует единственная вектор-функция ψ , удовлетворяющая перечисленным требованиям и нормированная условием $v(x, t, \lambda) \rightarrow (1, \dots, 1)$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Задача восстановления ψ эквивалентна задаче Римана о восстановлении $v(x, t, \lambda)$. Условие 2° при этом трансформируется в

$$v^{+s}(r) = v^{-s}(r) \tilde{G}_s(r), \quad (3')$$

где $\tilde{G}_s(r) = \Psi_0 (re^{i\varphi_s}) G_s \Psi_0^{-1} (re^{i\varphi_s})$. Ограничения на вид G_s достаточны для существования решения задачи Римана. Действительно, рассмотрим кусочно постоянную функцию G , равную G_s в секторах $\varphi_s \leq \varphi \leq \varphi_s + \delta\varphi$, 1 — вне их. Тогда $\psi_1 = \psi G^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на ψ , с единственными отличиями: она имеет скачки на лучах $\varphi_s + \delta\varphi$. При малом $\delta\varphi > 0$ из ограничений на вид G_s следует, что функция скачка $G_s(r)$ для $\varphi_s + \delta\varphi$ экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$. Число линейно независимых решений задачи (3), (4), (5) равно n . Условие (6) выделяет единственную с точностью до пропорциональности вектор-функцию ψ .

Операторы ∂_x, ∂_t и оператор умножения на λ^n переводит ψ в функцию, подчиненную тем же ограничениям, что и ψ , но $v(x, t, \lambda)$, фигурирующая в условии 1° , может иметь полюса при $\lambda = \infty$. Стандартным образом из сравнения сингулярных частей следует

Т е о р е м а 1. Существуют единственные операторы

$$L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x, t) \partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^m v_i(x, t) \partial_x^i$$

со скалярными коэффициентами такие, что

$$[L_n \psi = \lambda^n \psi, \quad (\partial_t - L_m) \psi = 0.$$

С л е д с т в и е 1. Операторы L_n и L_m удовлетворяют уравнению

$$[L_n, \partial_t - L_m] = 0.$$

С л е д с т в и е 2. Пусть в данных обратной задачи отсутствуют параметры Тюринга, т. е. $N = 0$, тогда указанная конструкция приводит к автомодельным решениям уравнений Лакса.

Утверждение следствия вытекает из того, что при $N = 0$ данные инвариантны относительно масштабной группы, и, значит, $\psi(x, t, \lambda) = \psi(\beta x, \beta^m t, \beta^{-1} \lambda)$. Простой подсчет показывает, что число параметров равно $m(n-1)$, т. е. для взаимно простых n и m оно равно размерности пространства автомодельных решений.

Если все $G_s = 1$, то указанная конструкция дает солитонные решения.

З а м е ч а н и е. Изменение условий (5) на систему условий, аналогичных [5], включает в эту схему и построение рациональных решений.

II. Двумерные системы типа КдФ. Пусть $\psi(x, y, t, \lambda)$ определена условиями $1^\circ - 4^\circ$ с единственным изменением в условии 1° :

$$\Psi_0(x, y, t, \lambda) = \exp(\lambda Qx + \lambda^{m_1} Q^{m_1} y + \lambda^m Q^m t).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $m_1 < m$. При этом $\psi(x, y, t, \lambda)$ существует и единственна.

Т е о р е м а 2. Существуют и единственные скалярные операторы L_m и L_{m_1} , коэффициенты которых зависят от x, y, t , такие, что

$$(\partial_y - L_{m_1}) \psi = (\partial_t - L_m) \psi = 0.$$

С л е д с т в и е 1. $[\partial_y - L_{m_1}, \partial_t - L_m] = 0$.

С л е д с т в и е 2. При $N = 0$ полученные решения уравнений являются автомодельными.

При $m_1 = 2, m = 3$ получим автомодельные решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
17 декабря 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Flaschka H., Newell A., Preprint Univ. Arizona, Tucson, 1979.
2. Ablowitz M., Preprint, Potsdam, 1978.
3. Кричевер И. М., Функциональный анализ 12, вып. 3 (1978), 20—31.
4. Кричевер И. М., Новиков С. П., Функциональный анализ 12, вып. 4 (1978), 41—52.
5. Кричевер И. М., Функциональный анализ 12, вып. 1 (1978), 76—78.