АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И. М. Кричевер

В работе [1] изложена схема интегрирования некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методами алгебраической геометрии. После незначительной модификации ее основные идеи и результаты переносятся на случай разностных уравнений.

1. Пусть

$$L_1^{ij} = \sum_{\alpha=-n_1}^{n_2} u_\alpha(s)\,\delta_{i,\,j-\alpha}, \qquad L_2^{ij} = \sum_{\beta=-m_1}^{m_2} v_\beta(s)\,\delta_{i,\,j-\beta}$$

— разностные операторы с матричными ($l \times l$) коэффициентами. Условимся, что старшие и младшие их коэффициенты являются невырожденными, диагональными матрицами с различными элементами на диагонали.

Рассматриваются уравнения на коэффициенты этих операторов, эквивалентные равенству $[L_1, L_2] = 0$.

Оператор L_2 индуцирует на пространстве решений уравнения $L_1 y = Ey$ конечномерный линейный оператор $L_2(E)$. Его характеристический полином $Q(w, E)$ определяет комплексную кривую $\mathfrak{R}$, а проекция $(w, E) = P \to E$ задает на ней мероморфную функцию.

Теорема 1. *Для любой пары коммутирующих разностных операторов найдется полином от двух переменных такой, что $Q(L_2, L_1) = 0$.*

Если все собственные значения оператора $L_2(E)$ различны, как в случае попарно взаимно простых чисел n_2, m_2 и n_1, m_1, то каждой точке (w, E) кривой $\mathfrak{R}$ соответствует единственный с точностью до пропорциональности его собственный вектор.

Теорема 2. *Если $(n_2, m_2) = 1$, $(n_1, m_1) = 1$, то $E(P)$ имеет l полюсов $(P_1^+, \ldots, P_l^+)$ кратности n_2 и l полюсов $(P_1^-, \ldots, P_l^-)$ кратности n_1. Координаты $\psi_j(i, P)$ собственных вектор-функций операторов L_1 и L_2 принадлежат пространству, ассоциированному с дивизором $\Delta = D + (i-1)D_\infty + P_j^+ - P_j^-$, где D — эффективный дивизор, имеющий для почти всех решений исходных уравнений степень g, равную роду кривой, а $D_\infty = (P_1^+ + \ldots + P_l^+) - (P_1^- + \ldots + P_l^-)$.*

Рассмотрим обратную задачу восстановления операторов по кривой с отмеченными точками $P_j^\pm$ и дивизору D степени g.

Так как $\deg \Delta = g$, то по теореме Римана — Роха $\psi_j(i, P)$ определены условиями теоремы 2 однозначно с точностью до нормировки. Зафиксируем ее. Тогда справедлива

Теорема 3. *Для любой функции $E(P)$, имеющей полюсы на $\mathfrak{R}$ лишь в точках $P_j^\pm$, существует единственный оператор L такой, что $L\psi(i, P) = E(P)\psi(i, P)$.*

2. В этом пункте мы построим точные решения для некоторых нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Пусть задан набор полиномов $Q_j^\pm(k)$ и $R_j^\pm(k)$.

Теорема 4. *Для каждого эффективного дивизора D на кривой $\mathfrak{R}$ рода g ($\deg D = g$) с фиксированными локальными координатами $k_{j\pm}^{-1}(P)$ в окрестностях точек $P_j^\pm$ существует единственная с точностью до пропорциональности функция $\varphi_{j_1}(i, y, t, P)$, мероморфная вне $P_j^\pm$, с дивизором полюсов D. В окрестности $P_j^\pm$ функция*

$$\varphi_{j_1}(i, y, t, P)\exp\{Q_j^\pm(k_{j\pm}(P))\,y + R_j^\pm(k_{j\pm}(P))\,t\}$$

имеет полюс (нуль) кратности i, если $j = j_1$, и $i - 1$, если $j \neq j_1$.

Задавая произвольно нормировку $\varphi_j(i, y, t, P)$, получим вектор-функцию $\psi(i, y, t, P)$.

Теорема 5. *Существуют единственные разностные операторы, коэффициенты которых зависят от y и t, такие, что*

$$\left(L_1 - \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(s, y, t, P) = 0 \quad \text{и} \quad \left(L_2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(s, y, t, P) = 0.$$

Следствие. *Эти операторы удовлетворяют уравнению*

$$[L_1, L_2] = \frac{\partial L_2}{\partial y} - \frac{\partial L_1}{\partial t}. \tag{1}$$

3. Пример. Рассмотрим уравнения цепочки Тода:

$$\dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \qquad \dot{c}_n = c_n (v_n - v_{n-1}).$$

По теореме 4 существует единственная функция $\psi(n, t, P)$ с полюсами в точках $d_1, \ldots, d_g$ кривой $\mathfrak{R}$, заданной уравнением $w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (E - E_i)$, и с асимптотикой в прообразах $E = \infty(P^\pm)$:

$$\psi^\pm (n, t, E) = i^n \lambda_n^{\pm 1} E^{\pm n} (1 + \xi_1^\pm (n, t) E^{-1} + \ldots) \exp\left(\mp \frac{1}{2} tE\right).$$

Согласно теореме 5 для операторов

$$L^{nm} = i\sqrt{c_n}\, \delta_{n, m+1} + v_n \delta_{n, n} - i\sqrt{c_{n+1}}\, \delta_{n, m-1},$$

$$A^{nm} = \frac{i}{2}\sqrt{c_n}\, \delta_{n, m+1} + w_n \delta_{n, n} + \frac{i}{2}\sqrt{c_{n+1}}\, \delta_{n, m-1}$$

выполняются равенства $L\psi = E\psi$, $A\psi = \frac{\partial}{\partial t}\psi$. Здесь $\sqrt{c_n} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$, $v_n = \xi_1^+(n+1, t) - \xi_1^+(n, t)$, $w_n = \frac{1}{2} v_n + \frac{\dot{\lambda}_n}{\lambda_n}$.

Уравнения (1) эквивалентны системе $\dot{v}_n = c_{n+1} - c_n$,

$$\frac{\dot{c}_n}{c_n} = (v_n - v_{n-1}) - (w_n - w_{n-1}) = \frac{1}{2}(v_n - v_{n-1}) - \frac{1}{2}\frac{\dot{c}_n}{c_n},$$

совпадающей с уравнениями цепочки Тода.

Необходимо отметить, что это представление уравнений отлично от коммутационного представления, использованного в предшествующих работах (библиографию см. в [2]).

Выражая $\psi(n, t, P)$ через θ-функции Римана аналогично формулам Итса [3], а также § 3 работы [1], обозначений которой мы придерживаемся, получим следующие формулы:

$$\ln c_n = \frac{d}{dn} \ln \frac{\theta(\omega^+ + \mathbf{W})\, \theta((n-1)\mathbf{U} + t\mathbf{V} + \mathbf{W} + \omega^-)}{\theta(\omega^- + \mathbf{W})\, \theta((n-1)\mathbf{U} + t\mathbf{V} + \mathbf{W} + \omega^+)} + \mathrm{const},$$

$$v_n = \frac{d}{dn}\frac{d}{dt} \ln \frac{\theta(n\mathbf{U} + t\mathbf{V} + \omega^+ + \mathbf{W})}{\theta(t\mathbf{V} + \omega^+ + \mathbf{W})} + \mathrm{const},$$

векторы ω^+, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ и константы зависят лишь от кривой $\mathfrak{R}$, а $\frac{d}{dn}$ обозначает разностную производную. Впервые формула для переменных v_n, аналогичная нашей, была получена С. П. Новиковым [2]. В 1977 г. автору стала известна аналогичная работа Мамфорда.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Кричевер, Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ. 11:1 (1977), 15—31.
[2] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН 31:1 (1975), 55—136.
[3] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Об одном классе решений уравнения КдФ, в сб. «Проблемы математической физики», № 8, ЛГУ, 1976.

Поступило в Правление общества 12 октября 1976 г.