Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 2, 1976, 75—76

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И КОММУТИРУЮЩИЕ МАТРИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

И. М. Кричевер

В работе [1] была изложена алгебро-геометрическая конструкция точных решений уравнений Захарова — Шабата, являющихся условно периодическими функциями своих аргументов. *Уравнениями Захарова — Шабата* [2] называются нелинейные дифференциальные уравнения, которые могут быть представлены в виде

$$\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y},\ L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0. \qquad (1)$$

Условие коммутирования двух операторов эквивалентно наличию «достаточно большого» (мы не уточняем здесь этого понятия) набора функций, одновременно обращаемых ими в нуль. В работе [1] рассматривались операторы со скалярными коэффициентами и было доказано, что достаточными наборами для них являются функции $\Psi(x, y, t, P)$, где P — точка неособой комплексной кривой, задаваемые своими аналитическими свойствами на $\mathfrak{R}$ и имеющие определенного вида существенную особенность в некоторой фиксированной точке. В настоящей заметке рассматриваются функции, имеющие существенные особенности в l точках. Это приведет к операторам, коэффициентами которых являются $(l\times l)$-матрицы. Не разбирая физически интересных примеров (см. [2]), мы покажем, что построенные по таким функциям решения соответствующих уравнений могут быть явно вписаны в терминах θ-функций Римана.

1. Пусть $\mathfrak{R}$ — неособая комплексная кривая рода g с омеченными точками $P_1, \ldots, P_l$. Рассмотрим функции $\Psi(x, y, t, P)$, $P\in\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям:

1. $\Psi(x, y, t, P)$ мероморфна на $\mathfrak{R}$ вне точек, P_j, дивизор ее полюсов D не зависит от x, y, t, неспециален и имеет степень $g+l-1$.

2. В окрестности P_j она имеет вид

$$\exp\left(k_jx+Q_j(k_j)\,y+R_j(k_j)\,t\right)\cdot\left(\xi_0^j+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^j(x, y, t)\,z_j^s\right).$$

Здесь $z_j=\dfrac{1}{k_j}$ — локальный параметр в окрестности P_j, $Q_j(k)=c_j^nk^n+\ldots+c_0^j$, $R_j(k)=b_m^jk^m+\ldots+b_0^j$ — полиномы.

Как было замечено в работе [4], при $l=1$ эти условия вместе с нормировкой $\xi_0=1$ однозначно определяют Ψ. Аналогично при $l>0$ нормировка $\xi_0^{ij}=\delta_{ij}$ одно значно определяет функции $\Psi_i(x, y, t, P)$.

Теорема 1. *Существуют и единственны операторы*

$$L_1=\sum_{\alpha=0}^{n}u_\alpha(x, y, t)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\quad и\quad L_2=\sum_{\beta=0}^{m}v_\beta(x, y, t)\frac{d^\beta}{dx^\beta}$$

такие, что $L_1\Phi=\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi$, $L_2\Phi=\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi$, *где* Φ — *вектор, i-я компонента которого есть* $\Psi_i(x, y, t, P)$.

Матрицы $u_\alpha(x, y, t)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{\alpha=s}^{n}u_\alpha\sum_{\beta=s}^{\alpha}C_\alpha^\beta\xi_{\beta-s}^{(\alpha-\beta)}=\sum_{\gamma=s}^{n}\xi_{\gamma-s}c_\gamma.$$

Элемент ξ_s^{ij} матрицы ξ равен коэффициенту при z_j^s разложения $\Psi_i(x, y, t, P)$ в окрестности P_j. Матрица c_γ равна $c_\gamma^j\delta_{ij}$. Аналогично находятся и матрицы $v_\beta(x, y, t, P)$.

Следствие 1. *Операторы L_1 и L_2 удовлетворяют уравнению* (1).

Если на кривой $\mathfrak{R}$ найдется мероморфная функция $E(P)$, имеющая полюсы в точках P_j (кольцо таких функций будем обозначать через $\Lambda(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$), разложение которой в ряд Лорана в P_j имеет главную часть $Q_j(k_j)$, то $\Phi(x, y, t, P)$ может быть представлена в виде $\Phi_0(x, t, P)\exp(E(P)y)$.

Следствие 2. *В сделанных предположениях* $L_1\Phi_0=E\Phi_0$, $L_2\Phi_0=\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_0$ *и, значит*, $[L_2, L_1]=\dfrac{\partial L_1}{\partial t}$.

Если теперь существует $H(P) \in \Lambda(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$, эквивалентная $R_j(k_j)$ в P_j, то $\Phi(x, y, t, P) = \Phi_0(x, P) \exp(E(P)y + H(P)t)$.

Следствие 3. *Функция Φ_0 удовлетворяет равенствам $L_1\Phi_0 = E\Phi_0$ и $L_2\Phi_0 = H\Phi_0$, а операторы — уравнению $[L_1, L_2] = 0$.*

Таким образом, каждый дивизор степени $l + g - 1$ задает гомоморфизм λ_D кольца $\Lambda(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ в кольцо линейных дифференциальных операторов с матричными $(l \times l)$ коэффициентами.

Замечание. Обратим внимание на то, что построенные решения уравнений (1), как и λ_D, зависят лишь от класса дивизора D, так как переход к эквивалентному дивизору D' сводится к умножению Φ на постоянную матрицу.

Теорема 2. *Если в коммутативном кольце Λ линейных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами найдутся два оператора с взаимно простыми порядками, у которых старшие коэффициенты невырождены, то найдутся кривая $\mathfrak{R}$, точки $P_1, \ldots, P_l$, дивизор D такие, что λ_D задает изоморфизм между $\Lambda(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ и Λ.*

2. В качестве локального параметра z_j в окрестности P_j выберем функцию $\int_{P_0}^{P} \omega_2$, где P_0 — фиксированная точка, ω_2 — нормированный дифференциал второго рода с полюсами второго порядка в точках $P_1, \ldots, P_l$. Обозначим через $2\pi i U$ вектор его b-периодов (за всеми необходимыми сведениями и недостающими определениями мы отсылаем к работе [5]), а через $2\pi i V$ и $2\pi i W$ — b-периоды дифференциалов $\omega(Q)$ и $\omega(R)$, эквивалентных в P_j $d\left(Q_j\left(\frac{1}{z_j}\right)\right)$ и $d\left(R_j\left(\frac{1}{z_j}\right)\right)$ соответственно. Введем также векторы $2\pi i U^{kj}$, являющиеся b-периодами дифференциалов, имеющих единственную особенность в P_j вида $k! \dfrac{dz_j}{z_j^{k+1}}$.

Рассмотрим функции $\chi_s^{ij}(x, y, t)$, задаваемые формулами

$$\left[\sum \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{(k\alpha_k)!} \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}}{\partial^{\alpha_1}\eta_{1j}\ldots\partial^{\alpha_s}\eta_{sj}} \ln\theta\left(Ux' + Vy + Wt + \sum_{k,j} U^{kj}\eta_{kj} + Z_i\right)\right]\Bigg|_{x'=\eta_{kj}=0}^{x'=x,\ \eta_{kj}=0}.$$

Суммирование ведется по всем наборам $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ таким, что $\sum_{k=1}^{s} k\alpha_k = s$. Векторы Z_i соответствуют при замене Абеля дивизорам $p_1 + \ldots + p_{g-1} + p_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, где $D = \sum_{s=1}^{l+g-1} p_s$.

Явные выражения для матриц $\xi_s(x, y, t)$, через которые выражаются решения уравнений Захарова — Шабата, даются следующей теоремой.

Теорема 3. *Имеет место равенство $\xi_s = \tilde{\xi}_0^{-1}\tilde{\xi}_s$, где элементы матриц $\tilde{\xi}_s$ даются равенством*

$$\sum_{s=0}^{\infty} \tilde{\xi}_s^{ij} z^s = \exp\left(\sum_{s=0}^{\infty} \chi_s^{ij}(x, y, t)\, z^s\right).$$

В частности, для приводимого в [1] уравнения Кадомцева — Петвиашвили, получим, что его решения даются формулой

$$u(x, y, t) = c - 2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x, y, t) = c + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux + Vy + Wt + Z).$$

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию
22 декабря 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кричевер И. М., ДАН СССР **227**, № 2 (1976). 2. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 35—43. 3. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., УМН **XXXI**, вып. 1 (1976), 55—136. 4. Ахиезер Н. И., ДАН СССР **142**, № 2 (1961), 263—266. 5. Зверович Э. И., УМН **XXVI**, вып. 1 (1971), 68—113.