

# AUGMENTATION DU NIVEAU POUR $U(3)$

JOËL BELLAÏCHE ET PHILLIPE GRAFTIEAUX

**Résumé** : Pour la forme compacte à l'infini du groupe unitaire à trois variables attaché à une extension CM, nous démontrons un résultat d'augmentation du niveau analogue à celui obtenu par Taylor ([Tay]) dans le cas de  $GL_2$ . Nous donnons une application aux représentations automorphes non tempérées.

**Abstract** : For the unitary group in three variables attached to a CM extension which is compact at infinity, we prove a level-raising theorem analogous to Taylor's result ([Tay]) in the case of  $GL_2$ . We give an application to non tempered automorphic forms.

**AMS MSC** : 11FXX

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Notations	5
3. Préliminaires locaux	6
4. Sorites sur les congruences	11
5. Augmentation du niveau	13
6. Représentations automorphes et représentations galoisiennes	27
Références	31

## 1. INTRODUCTION

Soit  $E/F$  une extension CM, et  $G = U(3)$  le groupe unitaire à trois variables sur  $F$  attaché à  $E$  qui est compact à toutes les places à l'infini (cf. 2.2). Pour toute place finie  $v$  de  $F$ , on note  $F_v$  le complété de  $F$  en  $v$  et  $G_v = G(F_v)$ .

Soient  $K = \prod_{v \text{ place finie de } F} K_v$  un sous-groupe compact ouvert de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  (*le niveau*),  $\Sigma$  l'ensemble fini des places  $v$  où  $K_v$  n'est pas un sous-groupe compact maximal hyperspécial,  $J$  une représentation complexe lisse irréductible de  $\prod_{v \in \Sigma} K_v$  (*le type*), et  $\rho$  une représentation complexe continue irréductible de  $G(\mathbb{A}_{F,\infty})$  (*le poids*). Pour tout ensemble fini  $\Sigma'$  de places de  $F$  contenant  $\Sigma$ , soit  $\mathcal{H}^{\Sigma'}$  l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(\prod'_{v \notin \Sigma'} G_v, \prod_{v \notin \Sigma'} K_v)$  des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et à support compact, sur le produit restreint  $\prod'_{v \notin \Sigma'} G_v$ , invariantes à droite et à gauche par  $\prod_{v \notin \Sigma'} K_v$ .

Soient  $v_0 \notin \Sigma$  une place finie de  $F$  **inerte** dans  $E$ ,  $q$  le cardinal du corps résiduel de  $F_{v_0}$ ,  $B_{v_0}$  un sous-groupe d'Iwahori de  $K_{v_0}$ ,  $B = B_{v_0} \prod_{v \neq v_0} K_v$  et  $T_{v_0} \in \mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$  l'opérateur de Hecke standard en  $v_0$ .

Nous notons  $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$  (resp.  $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ ) l'espace vectoriel complexe des formes automorphes pour  $G$  de niveau  $K$  (resp.  $B$ ), type  $J$  et poids  $\rho$ , et  $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$  (resp.  $N_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ ) le sous-espace de  $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$  des formes anciennes (resp. nouvelles) en  $v_0$  (cf. 5.1.2 et 5.3.6).

Ces espaces sont munis d'une action naturelle de  $\mathcal{H}^\Sigma$ . En particulier, on dispose d'une décomposition en sous-espaces propres généralisés (cf. 2.4)

$$(1) \quad S_{K,J,\rho,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\eta} S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\eta),$$

où  $\eta$  décrit un ensemble fini de caractères complexes de  $\mathcal{H}^\Sigma$ , ainsi que d'une décomposition analogue de  $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ .

Il existe un corps de nombres  $L \subset \mathbb{C}$  et un ensemble fini  $S$  de place de  $L$  ( $L$  et  $S$  ne dépendant que de  $(K, J, \rho)$  et pas de  $v_0$ ) tels que pour toute place finie  $\mu$  de  $L$  hors de  $S$ , l'espace  $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$  (resp.  $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ ,  $N_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ ) admette un modèle  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$  (resp.  $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ ,  $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ ) sur  $\mathcal{O}_\mu$ , stable sous l'action de  $\mathcal{H}^{\Sigma_\mu}$ , où  $\Sigma_\mu$  désigne la réunion de  $\Sigma$  et des places finies  $v$  de  $F$  de caractéristique résiduelle distincte de celle de  $\mu$ , et  $\mathcal{O}_\mu$  l'anneau des entiers du complété  $L_\mu$  de  $L$  en  $\mu$ . Les caractères  $\eta$  intervenant en (1) sont alors à valeurs dans  $\mathcal{O}_\mu$  et on a une décomposition  $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\eta} S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\eta)$ .

**Théorème 1.** *Soient  $\psi$  un caractère de  $\mathcal{H}^\Sigma$  tel que  $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\psi)$  est non nul et  $\mu$  une place de  $L$ . Supposons que  $\mu$  est première à  $v_0$  et que  $\lambda := \psi(T_{v_0}) \in \mathcal{O}_\mu$  vérifie  $\lambda \neq q(q^3 + 1)$ . Notons  $c$  le plus petit entier vérifiant*

$$c \geq \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))/2.$$

*Il existe alors une congruence<sup>1</sup> modulo  $\mu^c$  entre  $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$  et  $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$  dans  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ .*

Nous renvoyons le lecteur au théorème 5.5.1 et au paragraphe 5.5.2 pour des compléments à cet énoncé.

Le théorème 1, combiné avec le fameux lemme de Deligne-Serre ([D-S]), implique facilement le résultat suivant (la preuve est donnée partie 6) .

**Corollaire 2.** *Soient  $\pi$  une représentation automorphe pour  $G$ , de dimension infinie et non ramifiée en  $v_0$ , et  $\lambda$  la valeur propre de  $T_{v_0}$  sur  $\pi_{v_0}$ . Il existe un corps de nombres  $L$  et un ensemble fini de place  $S$  de  $L$  (ne dépendant que de  $\pi$ ) tel que si  $\mu \notin S$  est une place finie de  $L$  vérifiant*

$$\lambda \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu},$$

*alors il existe une représentation automorphe  $\pi'$ , de même poids et de même niveau hors  $v_0$  que  $\pi$ , vérifiant  $\pi'_{v_0}{}^{B_{v_0}} \neq 0$  mais  $\pi'_{v_0}{}^{K_{v_0}} = 0$  et qui est congrue<sup>2</sup> à  $\pi$  modulo  $\mu$ . De plus, si  $\pi$  contient une représentation donnée de dimension finie d'un sous groupe compact ouvert de  $G(\mathbb{A}_{F,f}^{v_0})$ , on peut aussi supposer qu'il en va de même pour  $\pi'$ . Enfin, si  $\text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1)) > 2\text{val}_\mu((q+1)(q^3 + 1))$ , on peut supposer que  $\pi'_{v_0}$  est la représentation de Steinberg.*

Ce corollaire généralise [Clo, théorème 2.4], qui traite le cas<sup>3</sup> où  $F = \mathbb{Q}$ , où le poids de  $\pi$  et le type considéré sont triviaux, et qui surtout suppose que  $\mu$  est une place *banale* pour  $G_{v_0}$ , i.e.  $(q-1)(q^3 + 1) \not\equiv 0 \pmod{\mu}$ . Dans [Bel1, Théorème VII.1.4.6], l'hypothèse de banalité de  $\mu$  avait été affaiblie en une hypothèse de *normalité*  $(q^3 + 1) \not\equiv 0 \pmod{\mu}$ .

<sup>1</sup>i.e. il existe  $f \in O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$ ,  $g \in N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ , avec  $f - g \in \mu^c S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ ,  $f \notin \mu S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ .

<sup>2</sup>i.e. les polynômes caractéristiques des matrices de Hecke de  $\pi$  et de  $\pi'$  en toute place non ramifiée sont à coefficients dans  $L$  et congrus modulo  $\mu$

<sup>3</sup>À vrai dire, Clozel énonce son théorème pour la forme quasi-déployée du groupe unitaire  $G$ . Mais c'est bien le théorème analogue pour le groupe compact qui est prouvé, et Clozel en déduit son énoncé pour la forme quasi-déployée par un argument de transfert entre les formes intérieures.

La méthode que nous utilisons pour prouver le théorème n'est pas la même que celle de [Clo] (ou de [Bel1]), basée sur les propriétés du *module universel*. Il semble à l'auteur principal que cette méthode ne peut permettre de lever l'hypothèse de *normalité* de  $\mu$ .

Notre méthode se rapproche au contraire de celle de [Tay], avec quelques différences importantes, dont la principale concerne le fameux "lemme d'Ihara" (cf. [Tay, lemme 4]). Essayons d'expliquer en quoi consiste cette différence. Le "lemme d'Ihara", conjectural dans la plupart des cas, est *grosso modo* l'assertion que le module des formes entières  $\mu$ -adiques anciennes en une place  $v$  (de caractéristique résiduelle différente de celle de  $\mu$ ) est un *facteur direct* dans le module de tous les formes entières  $\mu$ -adiques. Récemment, Taylor a dégagé un énoncé conjectural de théorie des représentations (modulaires), qui devrait être une étape clef dans la preuve du lemme d'Ihara (cf. [Tay2]) : *si une forme modulaire modulo  $\mu$  engendre en une place  $v$  une représentation non ramifiée non générique, alors pour toute place  $v$  où  $f$  est non ramifiée, la représentation engendrée par  $f$  a aussi un quotient non ramifiée non générique*. Le seul cas connu de la conjecture de Taylor est le cas où la représentation engendrée par  $f$  est un caractère non ramifiée (qui est toujours non générique, si le groupe considéré n'est pas anisotrope en  $v$ ) : l'argument dans ce cas, qui remonte à une lettre de Serre à Kazhdan ([Ser]), est essentiellement une application du théorème d'approximation forte.

Dans le cas d'augmentation du niveau que traite Taylor, pour une forme intérieure de  $GL_2$ , les seules représentations non ramifiées non génériques sont les caractères. La conjecture de Taylor est donc connue dans ce cas, et Taylor parvient à en déduire le lemme d'Ihara dont il a besoin.

Pour  $U(3)$ , et  $v$  une place de  $F$  inerte dans  $E$ , il y a un twist près deux représentations non ramifiées non génériques (du moins lorsqu'il s'agit de représentations en caractéristique zéro, ou modulo  $\mu$  avec  $\mu$  normale pour  $v$  – des représentations pathologiques apparaissent en caractéristique non normales, cf. [Bel1, chapitre IV] ) : la représentation triviale, pour laquelle la conjecture de Taylor est connue, et une représentation  $\pi^n$ , de dimension infinie pour laquelle elle ne l'est pas. Nous ne la démontrons pas ici. En caractéristique normale cependant, un argument de séparation des valeurs propres des opérateurs de Hecke, permet, de montrer le lemme d'Ihara à l'aide de la conjecture de Taylor pour la représentation triviale : c'est essentiellement l'argument utilisé dans [Clo] et [Bel1]. En caractéristique non normale, cet argument ne marche pas, car  $\pi^n$  et la représentation triviale ont les mêmes valeurs propres de Hecke.

L'idée principale de cet article consiste en une série d'arguments combinatoires mettant en jeu l'arbre de Bruhat-Tits de  $U(3)$  en  $v_0$ , qui permettent de montrer, en toute caractéristique, une approximation du lemme d'Ihara suffisante pour nos fins. Autrement dit, avec la moitié de la conjecture de Taylor, nous démontrons un demi-lemme d'Ihara. Nous espérons que cette méthode se généralisera en rang supérieur, permettant de contourner la très difficile conjecture de Taylor en caractéristique non banale.

Les autres différences avec la méthode de Taylor, sont le fait que nous traitons des poids quelconques, qui ne sont pas nécessairement auto-duaux au caractère central près comme dans la situation de [Tay], ce qui nécessite quelques arguments supplémentaires, comme l'introduction d'un produit hermitien au lieu d'un simple produit scalaire, y compris dans les situations arithmétiques ; que nous traitons des niveaux quelconques

(Taylor considère uniquement des niveaux  $\Gamma_0(N)$  ce qui simplifie beaucoup les applications du théorème d'approximation forte); et que nous gérons la présence de "types" de Bushnell et Kutzko.

Les auteurs sont conscients que malgré leurs efforts, il ne sont pas parvenus durant la rédaction à empêcher l'idée de base de cet article, relativement simple et naturelle, d'être noyée dans la masse des énoncés techniques, rendus nécessaires par la généralité dans lesquelles ils ont du se placer en vue des applications arithmétiques. Les auteurs espèrent néanmoins cette masse peu digeste d'énoncés techniques resserrera à chaque fois qu'on voudra traiter un résultat d'augmentation du niveau pour un groupe compact à l'infini. En particulier, on devrait avoir l'usage de notre preuve du cas trivial (c'est-à-dire pour un caractère) de la conjecture de Taylor, mais avec des poids et des types quelconques (cf. la proposition 5.4.5).

Nous conseillons au lecteur qui voudrait simplement saisir l'idée combinatoire à la base de cet article de supposer partout  $J = \rho = 1$ , ce qui lui permettra de sauter complètement les parties 5.1 à 5.4, car les espaces de formes automorphes considérés sont simplement des espaces de fonctions sur une ensemble fini dans ce cas (cf. par exemple [Clo]) et de se concentrer sur la partie 3 (en particulier, le lemme 3.5.3) et la partie 5.5.

Notons enfin que le théorème 1 et son corollaire restent valables, avec la même preuve<sup>4</sup>, pour n'importe quel groupe algébrique connexe  $G$  sur  $F$ , de groupe dérivé simplement connexe, compact aux places à l'infini et de rang un en la place  $v_0$  de  $F$ . Il suffit de remplacer dans l'énoncé du théorème et de son corollaire  $q(q^3 + 1)$  par  $q^{d'}(q^d + 1)$ , où  $q^{d'} + 1$  et  $q^d + 1$  sont les valences de l'arbre de Bruhat-Tits<sup>5</sup> de  $G_{v_0}$ , avec  $d' \leq d$ .

Revenons au cas  $G = U(3)$ . À l'aide de la représentation galoisienne attachée par Blasius et Rogawski à une représentation automorphe  $\pi$  de  $G$ , on peut montrer qu'il existe une infinité de places  $v_0$  où l'on peut augmenter le niveau de  $\pi$ . Plus précisément :

**Théorème 3.** *Gardons les notations du théorème 1. Pour tout entier  $n$ , il existe un ensemble de densité non nulle de places  $v$  de  $F$  inertes dans  $E$  telles que  $\psi(T_v) \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu^n}$  et  $q + 1 \equiv 0 \pmod{\mu^n}$ .*

En combinant les théorèmes 1 et 3, on obtient que les réductions modulo  $\mu^n$  du caractère  $\psi$  apparaissent dans des espaces de formes nouvelles pour presque tout  $\mu$  et pour  $n$  arbitrairement grand. À cause de l'hypothèse de banalité, Clozel ne pouvait démontrer un tel résultat (avec  $n = 1$ ) que sous une hypothèse de surjectivité de la représentation galoisienne attachée à  $\psi$  modulo  $\mu$ .

Comme application arithmétique du théorème 1, on obtient que toute représentation endoscopique non tempérée de  $G$  est congrue en presque toute place à une représentation tempérée (voir le théorème 6.4.2). Les congruences entre formes endoscopiques non tempérées et formes tempérées ont une signification arithmétique importante, en ce qu'elles traduisent et permettent de montrer des cas des conjectures de Bloch-Kato. Dans ce but, une version plus faible du théorème précédent, valable seulement pour un ensemble de densité non nulle de places, était obtenue par une augmentation du niveau en une place décomposée dans [Bell, chapitre VIII], par l'utilisation de familles  $l$ -adiques

<sup>4</sup>Quelques modifications mineures sont cependant nécessaires, si le centre de  $G_{v_0}$  n'est pas compact

<sup>5</sup>Rappelons ([Tit]) que cet arbre est soit homogène, soit bihomogène. On ramène le premier cas au second en introduisant un sommet au milieu de chaque arête, ce qui revient à poser  $d' = 0$ .

de représentations automorphes dans [Bel-Che]. Obtenir ce résultat pour presque toute place était une des motivations initiales de ce travail.

Dans un article en préparation, nous montrons comment on peut utiliser le théorème 1 pour montrer en toute place la compatibilité (à semi-simplification près) de la construction de Blasius-Rogawski ([Bla-Rog]) d'une représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe pour  $G$  avec la correspondance de Langlands locale (compatibilité qui n'est connue jusqu'à présent que pour les places non ramifiées, ou bien en toute place si l'on suppose que la représentation automorphe a son changement de base à  $E$  de carré intégrable en au moins une place finie, d'après les travaux de Harris et Taylor [H-T])

**Remerciements :** Les auteurs remercient chaleureusement Laurent Clozel et Gaëtan Chenevier pour de nombreuses et éclairantes conversations, ainsi que le rapporteur pour sa lecture attentive et ses critiques, qui ont aidé à améliorer la rédaction.

## 2. NOTATIONS

Sauf mention explicite du contraire, tous les anneaux ou algèbres considérés sont commutatifs et unitaires.

**2.1. Corps.** Dans tout l'article,  $E/F$  désigne une extension CM,  $\mathcal{O}_E$  (resp.  $\mathcal{O}_F$ ) l'anneau des entiers de  $E$  (resp.  $F$ ), et  $c$  l'élément non trivial de  $\text{Gal}(E/F)$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{E}$  de  $E$ . Pour toute représentation  $\rho$  de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ , on note  $\rho^c$  la représentation  $g \mapsto \rho(\gamma g \gamma^{-1})$ , où  $\gamma$  est un relevé de  $c$  dans  $\text{Gal}(\bar{E}/F)$ ; la représentation  $\rho^c$  ne dépend du choix de  $\gamma$  qu'à isomorphisme près.

On choisit une fois pour toutes un plongement de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ .

La lettre  $v$  (resp.  $w$ ), éventuellement munie d'indices, désigne une place finie de  $F$  (resp. de  $E$ ); on note  $F_v$  (resp.  $E_w$ ) le complété de  $F$  en  $v$  (resp. de  $E$  en  $w$ ), d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_v$  (resp.  $\mathcal{O}_w$ ). La lettre  $\sigma$  désigne une place archimédienne de  $F$ , que l'on considère comme un plongement  $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ . On note  $\Sigma_\infty$  l'ensemble des places à l'infini de  $F$ .

On note  $\mathbb{A}_F$  (resp.  $\mathbb{A}_{F,f}$ ,  $\mathbb{A}_{F,\infty}$ ) l'anneau des adèles de  $F$  (resp. les sous-anneaux des adèles triviaux à l'infini, resp. triviaux aux places finies). Si  $\Sigma$  est un ensemble de places de  $F$ , on note  $\mathbb{A}_{F,\Sigma}$  le sous-anneau de  $\mathbb{A}_F$  des adèles triviaux en dehors de  $\Sigma$ .

La lettre  $L$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , dont les places sont désignées par la lettre  $\mu$ . On note  $L_0$  le corps  $L \cap \mathbb{R}$  et  $L_\mu$  le complété de  $L$  en  $\mu$ , d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_\mu$ .

**2.2. Groupes unitaires.** On note  $G$  l'unique groupe unitaire à trois variables sur  $F$ , compact à l'infini associé à l'extension  $E/F$ , qu'on peut définir ainsi : pour toute  $F$ -algèbre  $R$ , on pose  $G(R) = \{g \in \text{GL}_3(E \otimes_F R), {}^t c(g)g = 1\}$ . On note  $\mathfrak{G}$  le modèle de  $G$  sur  $\mathcal{O}_F$  obtenu en posant  $\mathfrak{G}(R) = \{g \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_F} R), {}^t c(g)g = 1\}$  pour toute  $\mathcal{O}_F$ -algèbre  $R$ .

Pour toute place finie  $v$  de  $F$ , on note  $G_v$  le groupe  $G(F_v)$  et  $Z_v$  son centre.

On note  $SG$  le groupe dérivé de  $G$ , qui est le groupe spécial unitaire à trois variables. Il peut être défini ainsi : pour toute  $F$  algèbre  $R$ ,  $G(R) = \{g \in \text{GL}_3(E \otimes_F R), {}^t c(g)g = 1, \det g = 1\}$ . On note  $\mathfrak{S}\mathfrak{G}$  son modèle sur  $\mathcal{O}_F$  obtenu en posant  $\mathfrak{S}\mathfrak{G}(R) = \{g \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_F} R), {}^t c(g)g = 1, \det g = 1\}$  pour toute  $\mathcal{O}_F$ -algèbre  $R$

Le groupe  $SG$  satisfait les hypothèses du théorème d'approximation forte.

**2.3. Applications linéaires localement finies.** Soit  $R$  un anneau. Pour tout ensemble  $X$ , on note  $\mathcal{C}(X, R)$  (resp.  $\mathcal{CC}(X, R)$ ) le  $R$ -module des fonctions sur  $X$  à valeurs dans  $R$  (resp. nulles en dehors d'un sous-ensemble fini de  $X$ ). Nous munissons  $R$  de la topologie discrète et  $\mathcal{C}(X, R)$  de la topologie produit, de sorte que  $\mathcal{CC}(X, R)$  est dense dans  $\mathcal{C}(X, R)$ . Pour tout  $x \in X$ , on note  $\delta_x$  la fonction caractéristique de  $\{x\} \subset X$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles, on dit qu'une application linéaire  $U: \mathcal{C}(X, R) \rightarrow \mathcal{C}(Y, R)$  est *localement finie* si elle est continue et prolonge une application linéaire  $\mathcal{CC}(X, R) \rightarrow \mathcal{CC}(Y, R)$ . Ceci équivaut à dire que la famille  $U(\delta_x)_{x \in X}$  est à valeurs dans  $\mathcal{CC}(Y, R)$  et détermine  $U$ .

Si  $U: \mathcal{C}(X, R) \rightarrow \mathcal{C}(Y, R)$  est une application linéaire localement finie, on définit sa transposée  $U^*: \mathcal{C}(Y, R) \rightarrow \mathcal{C}(X, R)$  comme l'application linéaire localement finie définie par  $U^*(\delta_y) = \sum_{x \in X} U(\delta_x)(y)\delta_x$  pour tout  $y \in Y$ . L'application  $U^*$  est l'adjoint de  $U$  pour les produits naturels de  $\mathcal{C}(X, R)$  et  $\mathcal{C}(Y, R)$  et on a l'égalité  $(U^*)^* = U$ .

**2.4. Espaces propres généralisés.** Soit  $R$  un anneau,  $M$  un  $R$ -module et  $\mathcal{H}$  un anneau agissant sur  $M$  par  $R$ -endomorphismes.

Pour tout caractère  $\eta$  de  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $R$ , on définit le *sous-espace propre généralisé*  $M(\eta)$  de  $M$  pour  $\eta$  comme le sous-module des vecteurs  $m$  de  $M$  tels que pour tout  $T \in \mathcal{H}$ , il existe  $n \geq 0$  vérifiant l'égalité  $(T - \eta(T))^n(m) = 0$ . Si  $R$  est un corps et  $M$  est de dimension finie, il existe une extension finie  $R'$  de  $R$  et une décomposition  $M \otimes R' = \bigoplus_{\eta} (M \otimes R')(\eta)$ , où  $\eta$  décrit une famille finie de caractères de  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $R'$ .

### 3. PRÉLIMINAIRES LOCAUX

Dans toute cette partie (sauf en 3.8), on fixe une place finie  $v$  de  $F$  inerte dans  $E$ . On note  $w$  la place de  $E$  au dessus de  $v$  et  $q$  le cardinal résiduel du corps  $F_v$ , complété de  $F$  en  $v$ . Le groupe  $G(F_v)$  est alors l'unique groupe unitaire à trois variables sur  $F_v$  qui se déploie sur  $E_w$ .

Pour ne pas alourdir les notations, et dans cette partie uniquement, on note simplement  $G$  le groupe  $G_v = G(F_v)$ , et  $Z$  le centre de  $G$ , qui est compact.

**3.1. Arbre.** Soit  $\mathcal{X}$  l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$ . D'après [Tit] ou [Cho, 1.4], c'est un arbre, et l'on a une décomposition de l'ensemble de ses sommets en deux parties  $X \amalg X'$ , tout sommet de  $X$  (resp.  $X'$ ) a  $q^3 + 1$  (resp.  $q + 1$ ) voisins qui sont tous dans  $X'$  (resp.  $X$ ). Les points de  $X$  sont les points *hyperspéciaux* au sens de [Tit], ceux de  $X'$  sont les points spéciaux qui ne sont pas hyperspéciaux. On désigne par  $A$  l'ensemble des arêtes (non orientées) de  $\mathcal{X}$ .

L'arbre  $\mathcal{X}$  est muni d'une action par automorphisme de  $G$ , le centre  $Z$  agissant par l'identité. L'action de  $G$  sur  $X$  (resp.  $X'$ ) est transitive et le stabilisateur d'un sommet  $x$  agit encore transitivement sur l'ensemble des sommets de  $\mathcal{X}$  à distance  $n$  de  $x$  ([Cho, 1.4, 1.5]), et donc sur l'ensemble des éléments de  $A$  d'origine  $x$ .

**3.2. Sous-groupes compacts.**

**3.2.1. Compacts maximaux.** D'après [B-T], un sous-groupe compact maximal de  $G$  fixe un sommet de  $\mathcal{X}$  et un seul, ce qui définit une bijection entre l'ensemble des compacts maximaux de  $G$  et  $X \amalg X'$ . Il y a donc deux classes de conjugaisons de sous-groupes

compacts maximaux de  $G$ , ceux qui fixent un sommet de  $X$ , qu'on appelle *hyperspéciaux*, et ceux qui fixent un sommet de  $X'$ , qu'on appelle *spéciaux*.

On suppose désormais donné  $O \in X$  (resp.  $O' \in X'$ ). On note  $K$  (resp.  $K'$ ) le sous-groupe compact maximal de  $G$  qui fixe  $O$  (resp.  $O'$ ), de sorte que l'on a les identifications canoniques  $X = G/K = K \backslash G$  (resp.  $X' = G/K' = K' \backslash G$ ), la seconde étant induite par l'application inverse de  $G$ .

3.2.2. *Sous-groupe d'Iwahori.* On suppose aussi que  $O$  et  $O'$  sont voisins. Le stabilisateur  $B = K \cap K'$  de l'arête  $(O, O')$  est un sous-groupe d'Iwahori de  $G$  et, par 3.1, on a l'identification canonique  $G/B = A$ .

### 3.3. Algèbres de Hecke.

3.3.1. *Algèbre de Hecke sphérique.* On note  $\mathcal{H}$  l'algèbre de convolution (pour la mesure de Haar  $\mu_K$  de volume 1 sur  $K$ ) des fonctions sur  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , à support compact, bi- $K$ -invariantes

$$\mathcal{H} = \mathcal{CC}(K \backslash G / K, \mathbb{Z}).$$

Soit  $T$  la fonction caractéristique dans  $\mathcal{CC}(G/K, \mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(X, \mathbb{Z})$  de l'ensemble des sommets à distance 2 de  $O$ . On a  $T \in \mathcal{H}$  et les propriétés de transitivité de 3.1 impliquent l'égalité  $\mathcal{H} = \mathbb{Z}[T]$ .

3.3.2. *Algèbre de Hecke-Iwahori.* On appelle algèbre de Hecke-Iwahori le  $\mathbb{Z}$ -module muni du produit de convolution

$$\mathcal{H}(G, B) = \mathcal{CC}(B \backslash G / B, \mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(B \backslash A, \mathbb{Z}).$$

Soit  $a \in \mathcal{CC}(B \backslash A, \mathbb{Z})$  (resp.  $a'$ ) la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments de  $A$  d'origine  $O$  (resp.  $O'$ ) et distincts de  $(O, O')$ . On définit  $T_B \in \mathcal{H}(G, B)$  par la formule

$$T_B := -a'a - aa' - (q^3 - 1)a' - (q - 1)a - q^3(q - 1).$$

On vérifie aisément que  $a$  et  $a'$  engendrent la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{H}(G, B) \otimes \mathbb{C}$  et que  $T_B$  est dans le centre de  $\mathcal{H}(G, B)$ .

**Remarque.** En fait,  $T_B$  en est même un générateur (sur  $\mathbb{C}$ ), mais nous n'utiliserons pas ce fait. Ceci, ainsi que le lemme 3.5.3 (vi), est d'ailleurs un petit fragment de la théorie du centre de Bernstein ([Ber]).

### 3.4. Combinatoire des formes anciennes.

3.4.1. Dans  $\mathcal{CC}(X, \mathbb{Z})$ , soit  $U_1$  la fonction caractéristique de  $O$ , et  $U_2$  la fonction caractéristique de l'ensemble des voisins de  $O'$  distincts de  $O$ . Il est clair que  $U_1$  et  $U_2$  sont  $B$ -invariantes, i.e. appartiennent à  $\mathcal{CC}(B \backslash X, \mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(B \backslash G / K, \mathbb{Z})$ , qui est canoniquement muni d'une structure de  $\mathcal{H}$ -module par convolution à droite.

**Proposition 3.4.2.** *Le  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ -module  $\mathcal{CC}(B \backslash X, \mathbb{C})$  est libre de base  $(U_1, U_2)$ .*

*Démonstration* — D'après [Laz, prop. 7.2.4], le module  $\mathcal{CC}(B \backslash X, \mathbb{C})$  est libre de rang 2 sur  $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}$ . Pour conclure que  $(U_1, U_2)$  est une base, il suffit de prouver que cette famille est génératrice, ce qui se vérifie après passage au quotient par tous les idéaux maximaux de  $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}[T]$ . Autrement dit, il suffit de montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(U_1, U_2)$  est une base, c'est-à-dire une famille libre, du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $[\mathcal{CC}(X, \mathbb{C}) / (T - \lambda)\mathcal{CC}(X, \mathbb{C})]^B$  qui est de dimension 2. Or, l'égalité  $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = (T - \lambda)f$ , avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  et  $f \in \mathcal{CC}(X, \mathbb{C})$  implique  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  par un argument de support.  $\square$

**Remarque.** Dans [Bel1, IV.4.8.2], cette proposition est démontrée plus généralement en remplaçant  $\mathbb{C}$  par un anneau quelconque.

**Lemme 3.4.3.** *Si l'on voit  $U_1$  et  $U_2$  comme des fonctions de  $\mathcal{CC}(K \setminus G/B, \mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(K \setminus A, \mathbb{Z})$ , Alors  $U_1$  est la fonction caractéristique de l'ensemble des arêtes passant par  $O$ , et  $U_2$  est l'ensemble des arêtes passant par un voisin de  $O$ , mais pas par  $O$ .*

*Démonstration* — C'est un calcul évident.  $\square$

**3.5. Opérateurs et relations.** Soit  $R$  un anneau commutatif. Les fonctions à support fini  $T \in \mathcal{H}$ ,  $T_B \in \mathcal{H}(G, B)$ ,  $U_1, U_2 \in \mathcal{CC}(K \setminus G/B, \mathbb{Z})$  induisent par convolution à droite des opérateurs localement finis  $G$ -équivariants à gauche entres les espaces  $\mathcal{C}(X, R)$ ,  $\mathcal{C}(X', R)$  et  $\mathcal{C}(X', R)$  que l'on note par les mêmes lettres. Le lemme suivant est une traduction immédiate des définitions.

**Lemme 3.5.1.** *Notons  $d$  la distance entre les sommets de  $\mathcal{X}$ . On a*

$$\begin{aligned} T: \mathcal{C}(X, R) &\rightarrow \mathcal{C}(X, R) \\ \delta_x &\mapsto \sum_{d(y,x)=2} \delta_y \\ U_1: \mathcal{C}(X, R) &\rightarrow \mathcal{C}(A, R) & U_2: \mathcal{C}(X, R) &\rightarrow \mathcal{C}(A, R) \\ \delta_x &\mapsto \sum_{d(x,x')=1} \delta_{(x,x')} & \delta_x &\mapsto \sum_{d(x',x)=1, d(y,x)=2} \delta_{(x',y)} \end{aligned}$$

$$\text{et } T_B = -a'a - aa' - (q^3 - 1)a' - (q - 1)a - q^3(q - 1)\text{Id},$$

où  $a, a': \mathcal{C}(X, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, A)$  sont définis par les formules

$$a: \delta_{(x,x')} \mapsto \sum_{d(y',x)=1, y' \neq x'} \delta_{(x,y')} \quad \text{et} \quad a': \delta_{(x,x')} \mapsto \sum_{d(y,x')=1, y \neq x} \delta_{(y,x')}$$

pour toute arête  $(x, x')$  avec  $x \in X$  et  $x' \in X'$ .

**3.5.2. Définition.** On définit les opérateurs finis  $G$ -équivariants

$$\begin{aligned} U: \mathcal{C}(X, R) &\rightarrow \mathcal{C}(X', R) & \text{et} & \quad U': \mathcal{C}(X', R) &\rightarrow \mathcal{C}(X, R) \\ \delta_x &\mapsto \sum_{d(x',x)=1} \delta_{x'} & & \quad \delta_{x'} &\mapsto \sum_{d(x',x)=1} \delta_x. \end{aligned}$$

**Lemme 3.5.3.** (i)  $U'U = T + (q^3 + 1)$ .

(ii) L'opérateur  $T$  est auto-adjoint et  $U$  est l'adjoint de  $U'$ .

(iii) Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X, R)$ . On a  $U_1 f_1 + U_2 f_2 = 0$  si et seulement si il existe une constante  $C \in R$  telle que  $U f_2 = C$  et  $f_1 - f_2 = -C$ .

(iv) Si  $R$  est un corps,  $U_1 f_1 + U_2 f_2 = 0$ , et  $T f_2 = \lambda f_2$ , avec  $\lambda \in R$  et  $f_2 \neq 0$ , on a  $\lambda = q(q^3 + 1)$  ou bien  $\lambda = -(q^3 + 1)$ .

(v) L'opérateur  $U_1$  est injectif.

(vi)  $U_i T = T_B U_i$  pour  $i = 1, 2$ .

*Démonstration* — Les preuves de (i), (ii) et (vi) sont des calculs évidents et laissées au lecteur. Prouvons (iii). Soit  $(x, x')$  une arête de  $A$ ,  $x \in X$ ,  $x' \in X'$ . Le fait que  $(U_1 f_1 + U_2 f_2)(\delta_{x',x}) = 0$  s'écrit aussi

$$f_1(x) + \sum_{y \neq x, y \text{ voisin de } x'} f_2(y) = 0,$$

soit

$$f_1(x) - f_2(x) + (Uf_2)(x') = 0.$$

Ainsi les fonctions  $f_1 - f_2$  sur  $X$  et  $Uf_2$  sur  $X'$  prennent des valeurs opposées sur deux points voisins. Comme  $\mathcal{X}$  est connexe, on en déduit qu'il existe  $C \in R$  tel que  $Uf_2 = C$  sur  $X'$ ,  $f_1 - f_2 = -C$  sur  $X$ .

Prouvons (iv). On a d'après (iii)  $U'Uf_2 = U'(C) = (q^3 + 1)C$  et d'après (i)  $U'Uf_2 = Tf_2 + (q^3 + 1)f_2 = (\lambda + q^3 + 1)f_2$ , d'où

$$(2) \quad (q^3 + 1)C = (\lambda + q^3 + 1)f_2.$$

Si  $\lambda \neq -(q^3 + 1)$ , alors la relation (2) implique que  $f_2$  est constante, d'où  $Tf_2 = q(q^3 + 1)f_2$ , et comme  $f_2$  est non nul et  $R$  un corps, il vient  $\lambda = q(q^3 + 1)$ .

Prouvons (v). Soit  $f_1$  tel que  $U_1f_1 = 0$ . Appliquons (iii) à  $f_1$  et  $f_2 = 0$ ; on obtient une constante  $C \in R$  telle que  $U0 = C$  et  $f_1 = -C$  d'où  $C = 0$  et  $f_1 = 0$ .  $\square$

**Proposition 3.5.4.**

$$\begin{pmatrix} U_1^*U_1 & U_1^*U_2 \\ U_2^*U_1 & U_2^*U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^3 + 1 & T \\ T & q(q^3 + 1) + (q - 1)T \end{pmatrix}$$

*Démonstration* — Pour toute arête  $(x, x')$  de  $A$ , avec  $x \in X$ , l'adjoint  $U_1^*$  (resp.  $U_2^*$ ) de  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) envoie  $\delta_{(x, x')}$  sur  $\delta_x$  (resp. sur  $\sum_{y \neq x, d(y, x')=1} \delta_y$ ). La proposition est alors un calcul évident et laissé au lecteur.  $\square$

**Remarque.** Le déterminant de cette matrice est un polynôme en  $T$  dont les racines sont  $-(q^3 + 1)$  et  $q(q^3 + 1)$ .

**3.6. Représentations non ramifiées.**

3.6.1. *Notations.* Soit  $R$  un anneau commutatif et  $\pi$  une représentation lisse à droite de  $G$  sur  $R$ . Soit  $U$  et  $U'$  deux sous groupes compact ouverts de  $G$ . Pour tout vecteur  $v$  de l'espace de  $\pi$ , invariant par  $U$ , et pour toute double classe  $UgU'$ , on définit

$$v * \mathbf{1}_{UgU'} := \sum \pi(g_i)v,$$

où  $UgU' = \coprod Ug_i$ . On vérifie aisément que  $v * \mathbf{1}_{UgU'}$  ne dépend que de la double classe  $UgU'$  (et non de  $g$  ou des  $g_i$ ) et est  $U'$ -invariant. Pour  $f \in \mathcal{CC}(U \backslash G / U')$ , on définit  $v * f$  par linéarité, en décomposant  $f$  comme combinaison linéaire finie de fonction de la forme  $\mathbf{1}_{UgU'}$ ; pour tout sous-espace vectoriel  $V$  de l'espace de  $\pi$ , on pose  $V * f := \{u * f; u \in V\}$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note encore  $f$  l'opérateur  $u \mapsto u * f$ . Ainsi,  $T$  (resp.  $T_B$ ) désigne l'opérateur  $\bullet * T$  (resp.  $\bullet * T_B$ ) sur l'ensemble  $\pi^K$  (resp.  $\pi^B$ ) des  $K$ -invariants (resp.  $B$ -invariants) de  $\pi$ .

**Proposition 3.6.2.** *Soit  $\pi$  une représentation complexe lisse de  $G$  (éventuellement réductible) d'espace  $V$ ,  $\pi'$  la sous-représentation de  $G$  engendrée par le sous-espace  $\pi^K$  de  $V$ . Alors  $\pi'^B = \pi^K * U_1 + \pi^K * U_2$ .*

*Démonstration* — L'espace de  $\pi'$  est l'image de l'application

$$\pi^K * \mathcal{CC}(K \backslash G, \mathbb{C}) \rightarrow V,$$

et  $\pi'^B$  est donc l'image de l'application  $\pi^K * \mathcal{CC}(K \backslash G / B, \mathbb{C}) \rightarrow V$ . Le résultat découle donc de la proposition 3.4.2.  $\square$

3.6.3. *Tore maximal et sous-groupe de Borel.* On choisit un vecteur non nul  $e_1 \in E_w^3$  isotrope pour la forme hermitienne standard ( $x \mapsto {}^t c(x)x$ ),  $e_2$  tel que  $e_1$  et  $e_2$  engendrent  $(e_1)^\perp$ , et enfin  $e_3$  tel que  $(e_1, e_2, e_3)$  soit une base. Dans toute cette section, on décrit les éléments de  $G$  par leur matrice dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Le tore diagonal

$$D = \{\text{diag}(a, b, c(a)^{-1}) ; a \in E_w^*, b \in E_w^*, bc(b) = 1\}$$

est un tore maximal de  $G$ , qui contient  $Z = \{\text{diag}(b, b, b) ; bc(b) = 1\}$ . Soit  $P$  le stabilisateur dans  $G$  de la droite  $(e_1)$  : il stabilise aussi le plan  $(e_1)^\perp = (e_1, e_2)$  et c'est un sous-groupe de Borel contenant  $D$ .

3.6.4. *Induites non ramifiées.* Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , on définit  $I(\alpha)$  comme la représentation induite unitaire de  $P$  à  $G$  du caractère de  $D$  :

$$\text{diag}(a, b, c(a)^{-1}) \mapsto \alpha^{\text{val}(a)}.$$

Comme ce caractère est trivial sur  $Z$ ,  $I(\alpha)$  est de caractère central trivial.

3.6.5. *Structure des induites non ramifiées.* Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  ; d'après [Key, page 126] ou [Cho, th. 2.4.6 et prop 2.4.7], la représentation  $I(\alpha)$  est indécomposable et vérifie les propriétés suivantes.

- (1) Si  $\alpha \neq q^{\pm 2}$  et  $\alpha \neq -q^{\pm 1}$ , alors  $I(\alpha)$  est irréductible.
- (2) Si  $\alpha = q^{\pm 2}$ , alors  $I(\alpha)$  a deux facteurs de Jordan-Hölder, la représentation de Steinberg  $\text{St}$  et la représentation unité.
- (3) Si  $\alpha = -q^{\pm 1}$ , alors  $I(\alpha)$  a deux facteurs de Jordan-Hölder, l'un non ramifié noté  $\pi^n$  et l'autre ramifié noté  $\pi^2$ . D'après [Rog2, page 396], la représentation  $\pi^n$  est non tempérée et la représentation  $\pi^2$  est de carré intégrable.

3.6.6. *Invariants des induites non ramifiées.*

- (1) Une représentation admissible irréductible possède un vecteur  $B$ -invariant si et seulement si c'est un facteur de Jordan-Hölder de  $I(\alpha)$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  ([Car]).
- (2) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\dim I(\alpha)^K = \dim I(\alpha)^{K'} = 1$  et  $\dim I(\alpha)^B = 2$  ([Car] ou [Bell, IV.4.8.2 et IV.6.2.5]).
- (3)  $\text{St}^K = \text{St}^{K'} = 0$ ,  $\dim(\pi^n)^K = \dim(\pi^2)^{K'} = 1$ ,  $(\pi^n)^{K'} = (\pi^2)^K = 0$  ([Cho, prop. 2.4.7] ou [Bell, IV.4.8.2 et IV.6.2.5]).

3.6.7. *Matrices de Hecke.* Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , définissons la matrice de Hecke  $\text{mat}_\pi$  (à conjugaison près) de l'unique sous-quotient non ramifié  $\pi$  de  $I(\alpha)$  comme

$$\text{mat}_\pi = \text{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1}) \in \text{SL}_3(\mathbb{C}).$$

Ainsi  $\text{mat}_{\pi^n} = \text{diag}(-q, 1, -q^{-1})$ .

Par exception, dans la théorie globale (partie 6), on note  $\text{mat}_{\pi,w}$  pour  $\text{mat}_\pi$  au lieu de  $\text{mat}_{\pi,v}$  : cela tient à ce que, à strictement parler,  $\text{mat}_\pi$  est la matrice de Hecke du changement de base de  $\pi$  à  $E_w$  et non celle de  $\pi$ .

### 3.7. Transformation de Satake.

**Lemme 3.7.1.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  ; l'opérateur  $T$  agit sur la droite  $I(\alpha)^K$  par l'homothétie de rapport*

$$q^2(\alpha + \alpha^{-1}) + q - 1.$$

En particulier, si  $\alpha = q^{\pm 2}$  (resp.  $\alpha = -q^{\pm 1}$ ), alors la valeur propre de  $T$  est  $q(q^3 + 1)$  (resp.  $-(q^3 + 1)$ ).

*Démonstration* — Voir [Cho, prop 3.1.2].  $\square$

**Lemme 3.7.2.** *L'opérateur  $T_B$  agit sur  $\text{St}^B$  (resp.  $(\pi^2)^B$ ) par l'homothétie de rapport  $q(q^3 + 1)$  (resp.  $-(q^3 + 1)$ ).*

*Démonstration* — Comme  $I(\alpha)$  est indécomposable (cf. 3.6.5), il découle de [Bor2] que  $I(\alpha)^B$  est un module indécomposable sur  $H(G, B) \otimes \mathbb{C}$ , donc  $T_B$  y agit par une homothétie. En particulier, par le lemme 3.5.3 (vi), le rapport de  $T_B$  agissant sur  $I(\alpha)^B$  est égal à celui de  $T$  agissant sur  $I(\alpha)^K$ . Le lemme 3.7.2 découle donc du lemme précédent.  $\square$

**3.8. Théorie locale en une place décomposée.** Soit  $v$  une place décomposée de  $F$ . Le choix d'une place  $w$  de  $E$  divisant  $v$  détermine un unique (à automorphisme intérieur près) isomorphisme  $G_v \simeq \text{GL}_3(E_w) = \text{GL}_3(F_v)$ . On fixe un tel isomorphisme.

#### 4. SORITES SUR LES CONGRUENCES

Dans cette section on rappelle pour le confort du lecteur quelques résultats faciles, bien connus et souvent utilisés dans le contexte des congruences entre formes automorphes (voir les travaux de Hida, Ribet, etc.), et on les étend quelque peu.

Dans cette partie,  $\mathcal{O}$  désigne un produit fini d'anneaux de valuation discrète et  $L$  (resp.  $\mu_0$ ) le produit des corps de fractions (resp. des idéaux maximaux) de ces anneaux. On désigne par  $M$  un  $\mathcal{O}$ -module libre de type fini.

**4.1. Sous-modules saturés.** Pour tout sous-module  $N$  de  $M$ , on pose  $N^{\text{sat}} := (N \otimes L) \cap M$  dans  $M \otimes L$ . On a  $N = N^{\text{sat}}$  si et seulement si  $N$  est facteur direct de  $M$ .

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $u: N \rightarrow M$  un morphisme injectif de  $\mathcal{O}$ -module libre de rang fini. Pour tout entier  $\alpha$  assez grand,  $u(N)^{\text{sat}}/u(N)$  et  $\text{Ker}(u \otimes (\mathcal{O}/\mu_0^\alpha))$  sont isomorphes en tant que  $\mathcal{O}$ -modules.*

*Démonstration* — On se ramène aisément au cas où  $\mathcal{O}$  est un anneau de valuation discrète. Il existe un sous-module (nécessairement libre)  $M'$  de  $M$  tel que  $M = M' \oplus U(N)^{\text{sat}}$ . On a donc  $M/u(N) = M' \oplus (u(N)^{\text{sat}}/u(N))$ . Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{u} M \rightarrow M' \oplus (u(N)^{\text{sat}}/u(N)) \rightarrow 0;$$

elle donne lieu au morceau de suite exacte longue

$$\text{Tor}(M, R) \rightarrow \text{Tor}(M', R) \oplus \text{Tor}(u(N)^{\text{sat}}/u(N), R) \rightarrow N \otimes R \xrightarrow{u \otimes R} M \otimes R,$$

où l'on a posé  $R = \mathcal{O}/\mu_0^\alpha$ . Comme  $M$  et  $M'$  sont plats, on voit que

$$\text{Tor}(u(N)^{\text{sat}}/u(N), R) \simeq \text{Ker}(u \otimes R).$$

Comme  $u(N)^{\text{sat}}/u(N)$  est un module de type fini et de torsion, c'est une somme directe finie de modules de la forme  $\mathcal{O}/\mu_0^{\alpha_i}$ . En prenant  $\alpha$  plus grand que tous les  $\alpha_i$ , on voit que  $\text{Tor}(u(N)^{\text{sat}}/u(N), R) \simeq u(N)^{\text{sat}}/u(N)$  ce qui conclut.  $\square$

**4.2. Congruences.** Jusqu'à la fin de cette partie,  $A$  et  $B$  désignent des sous modules de  $M$  vérifiant  $A = A^{\text{sat}}$ ,  $B = B^{\text{sat}}$  et  $A \cap B = 0$ ,  $\mu$  désigne un idéal maximal de  $\mathcal{O}$  et  $c \geq 1$  un entier.

4.2.1. On dit qu'il existe une *congruence modulo  $\mu^c$*  entre  $A$  et  $B$  dans  $M$ , s'il existe  $f \in A \setminus \mu A$ ,  $g \in B \setminus \mu B$ , avec  $f - g \in \mu^c M$ . On appelle *module de congruence* entre  $A$  et  $B$  (dans  $M$ ) le  $\mathcal{O}$ -module  $(A \oplus B)^{\text{sat}} / (A \oplus B)$ . Ce module tient son nom du lemme suivant.

**Lemme 4.2.2.** *Il existe des congruences modulo  $\mu^c$  entre  $A$  et  $B$  dans  $M$  si et seulement si le module de congruence contient un sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}/\mu^c$ .*

*Démonstration* — Soit  $\pi$  un générateur de  $\mu$ . Si le module de congruence contient un sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}/\mu^c$  alors il existe  $h \in (A \oplus B)^{\text{sat}}$ , avec  $\pi^c h \in A \oplus B$  mais  $\pi^{c-1} h \notin A \oplus B$ . On a alors  $\pi^c h = f + g$  avec  $f \in A$  et  $g \in B$ , et puisque  $B = B^{\text{sat}}$ , on a  $f \in \pi A$  si et seulement si  $g \in \pi B$ , ce qui n'est pas car  $\pi^{c-1} h \notin A + B$ . On a donc une congruence modulo  $\pi^c$  entre  $f$  et  $g$ .

Réciproquement, si  $f$  et  $g$  sont en congruences modulo  $\pi^c$ , alors l'élément  $h := (f - g)/\pi^c \in (A \oplus B)^{\text{sat}}$  est tel que  $\pi^{c-1} h \notin (A \oplus B)$ .  $\square$

**4.3. Produit hermitien et congruences.** Soit  $\gamma: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  un automorphisme involutif d'anneaux. Pour tout module  $N$  libre de type fini sur  $\mathcal{O}$ , on note  $N^{\bar{\cdot}}$  le  $\mathcal{O}$  module des formes  $\gamma$ -linéaires (i.e. telles que  $f(an) = \gamma(a)f(n)$  pour  $a \in \mathcal{O}$ ,  $n \in N$ ) sur  $N$  et on appelle *produit hermitien* sur  $N$  tout morphisme  $\mathcal{O}$ -linéaire  $p_N: N \rightarrow N^{\bar{\cdot}}$  tel que  $p_N(x)(y) = \gamma(p_N(y)(x))$  pour tout  $x, y \in N$ ; on note également  $\langle x, y \rangle$  pour  $p_N(x)(y)$ . On dit que  $p_N$  est *non dégénéré* s'il est bijectif.

Pour toute partie  $P$  de  $N$ , on note alors  $P^\perp$  l'ensemble des  $y \in N$  tel que  $\langle x, y \rangle$  pour tout  $x \in P$ ; c'est un sous-module facteur direct de  $N$  et l'on a, si  $P$  est un sous-module,  $(P^\perp)^\perp = P^{\text{sat}}$ . Si  $P$  est un sous-module de  $N$ , on note  $p_P: P \rightarrow P^{\bar{\cdot}}$  la restriction de  $p_N$  à  $P$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on désigne par  $p_M$  un produit hermitien non dégénéré sur  $M$  tel que  $B \subset A^\perp$ .

**Lemme 4.3.1.** *On suppose que  $(A+B)^\perp \oplus A$  est facteur direct dans  $M$ . Alors le module de congruence entre  $A$  et  $B$  dans  $M$  est isomorphe à  $A^{\bar{\cdot}}/p_A(A)$ .*

*Démonstration* — Soit  $x \in (A \oplus B)^{\text{sat}}$ ; la forme  $\gamma$ -linéaire  $p_M(x)$  définit par restriction une forme  $\gamma$ -linéaire sur  $A$ , que nous noterons  $\phi(x) \in A^{\bar{\cdot}}$ . Par définition,  $\phi(x) \in p_A(A) \subset A^{\bar{\cdot}}$  si et seulement si il existe  $a \in A$  tel que  $\langle x, y \rangle = \langle a, y \rangle$  pour tout  $y \in A$ , i.e. si et seulement si  $x - a \in A^\perp$ , ce qui équivaut à  $x - a \in B^{\text{sat}} = B$  puisque  $x - a \in (A \oplus B)^{\text{sat}}$ . Autrement dit,  $\phi(x) \in p_A(A)$  si et seulement si  $x \in A \oplus B$ , et  $\phi$  définit une application linéaire injective  $(A \oplus B)^{\text{sat}} \hookrightarrow A^{\bar{\cdot}}/p_A(A)$ . Montrons qu'elle est surjective : soit  $l$  une forme  $\gamma$ -linéaire sur  $A$ , on la prolonge à  $A \oplus (A \oplus B)^\perp$  en lui donnant la valeur 0 sur  $(A \oplus B)^\perp$ , puis en une forme  $\gamma$ -linéaire sur  $M$  en utilisant l'hypothèse que  $A \oplus (A \oplus B)^\perp$  est facteur direct dans  $M$ . Comme  $p_M$  est non dégénéré, cette forme  $\gamma$  linéaire est de la forme  $p_M(x)$ , avec  $x \in M$  et en fait  $x \in ((A \oplus B)^\perp)^\perp = (A \oplus B)^{\text{sat}}$ . Or  $\phi(x) = l$ , ce qui prouve la surjectivité de  $\phi$ . Le morphisme  $\phi$  induit donc un isomorphisme

$$(A \oplus B)^{\text{sat}} / (A \oplus B) \simeq A^{\bar{\cdot}} / p_A(A).$$

□

Si  $u : N \rightarrow M$  est un morphisme injectif de modules libres munis de produit scalaires  $p_N$  et  $p_M$  non dégénérés, on note  ${}^t u : M^{\bar{*}} \rightarrow N^{\bar{*}}$  la transposée de  $u$  et on appelle *adjoint* de  $u$  le morphisme  $u^* = p_N^{-1} \circ {}^t u \circ p_M$ .

**Lemme 4.3.2.** *Pour tout entier  $\alpha$  assez grand et tout idéal maximal  $\mu$  de  $\mathcal{O}$ , on a*

$$\text{long}\left(\text{Ker}\left(u \otimes (\mathcal{O}/\mu^\alpha)\right)\right) \leq \frac{1}{2} \text{val}_\mu(\det(u^*u)).$$

*Démonstration* — Soit  $P = u(N)^{\text{sat}}$ . Par le lemme 4.1.1, la longueur à calculer est égale à la  $\mu$ -valuation du déterminant de  $u_P : N \rightarrow P$  dans deux bases quelconques de  $N$  et  $P$ . Or, puisque  $p_N$  est non dégénéré,  $u_P^* : P \rightarrow N$  est bien défini et  $u^*u = u_P^*u_P$ . Puisque  $\det(u_P)$  divise  $\det(u_P^*)$  dans  $\mathcal{O}$ , le lemme est prouvé. □

## 5. AUGMENTATION DU NIVEAU

Dans cette partie, nous prouvons le théorème principal de cet article (théorème 1).

Les deux premiers numéros sont consacrés à la construction des espaces de formes automorphes avec lesquels nous travaillons, d'abord sur  $\mathbb{C}$ , puis sur un corps de nombres  $L$  (ou plus généralement sur une  $L$ -algèbre), enfin, une place finie  $\mu$  de  $L$  étant fixée, sur le complété  $\mathcal{O}_\mu$  en  $\mu$  de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$  de  $L$  (ou plus généralement sur une  $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre). Nous pourrions donner directement la construction des espaces de formes automorphes dans ce dernier cas, sur une  $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre, mais la première construction, sur  $\mathbb{C}$ , est indispensable pour relier nos résultats à la théorie usuelle des représentations automorphes, et la seconde, sur  $L$ , nous est nécessaire pour établir qu'un certain nombre de propriétés simples des espaces de formes automorphes sont vraies *pour presque toute place  $\mu$* .

Dans le numéro 5.3, une place inerte  $v_0$  de  $F$  est fixée, et les espaces de formes automorphes sur une  $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre construits auparavant sont interprétés comme espaces de fonctions sur une réunion disjointe finie de copies de l'arbre de Burhat-Tits attaché à  $G(F_{v_0})$ . Ceci nous permet d'utiliser nos résultats combinatoires de la partie 3.

Le numéro 5.4 est consacré à la preuve d'un cas très simple de la conjecture de Taylor (celui des caractères, voir introduction) essentiellement déjà connue, mais qui n'a jamais été rédigée dans le cas général de poids non triviaux (d'ailleurs la conjecture de Taylor de [Tay2] elle-même n'est formulée qu'en poids trivial).

Enfin le numéro 5.5 donne la preuve du théorème, et quelques compléments.

### 5.1. Espaces de formes automorphes.

5.1.1. *Niveau, type et poids.* On fixe un sous-groupe compact ouvert  $K = \prod_v K_v$  de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  (le *niveau*). On note  $\Sigma$  l'ensemble fini ([Tit]) des places  $v$  où  $K_v$  n'est pas un compact maximal hyperspécial et pour toute place  $\mu$  d'un corps de nombres  $L$ , on désigne par  $\Sigma_\mu$  la réunion de  $\Sigma$  et des places finies  $v$  de  $F$  de même caractéristique résiduelle que  $\mu$ . Pour tout ensemble  $\Sigma'$  de places de  $F$  contenant  $\Sigma$  on définit l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}^{\Sigma'} := \mathcal{H}\left(\prod'_{v \notin \Sigma'} G_v, \prod_{v \notin S} K_v\right)$$

qui est aussi le produit tensoriel restreint des  $\mathcal{H}(G_v, K_v)$  pour  $v \notin \Sigma'$ . Cette algèbre contient l'opérateur de Hecke  $T_v$  défini en 3.3, pour toute place  $v \notin \Sigma'$  inerte dans  $E$ .

On fixe aussi une représentation complexe lisse irréductible  $(J, V)$  de  $\prod_{v \in \Sigma} K_v$  (le type), que l'on voit indifféremment comme une représentation de  $K$ .

Enfin, on fixe une représentation complexe continue irréductible  $(\rho, W)$  de  $G(\mathbb{A}_{F, \infty})$  (le poids). On note  $\rho^*$  (resp.  $J^*$ ) la représentation duale de  $\rho$  (resp.  $J$ ).

5.1.2. *Espaces de formes automorphes complexes.* On appelle espace des formes automorphes complexes de niveau  $K$ , de type  $J$  et de poids  $\rho$  l'espace vectoriel

$$S_{K, J, \rho, \mathbb{C}} := \text{Hom}_{K \times G(\mathbb{A}_{F, \infty})}(J \otimes \rho, \mathcal{B}),$$

où  $\mathcal{B}$  désigne l'espace des fonctions complexes lisses (i.e. invariantes par translation par un sous-groupe ouvert de  $G(\mathbb{A}_{F, f})$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $G(\mathbb{A}_{F, \infty})$ ) sur  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$ . De manière trivialement équivalente, on peut voir  $S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}$  comme l'espace des fonctions complexes lisses  $f'$  sur  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$  à valeur dans  $V^* \otimes W^*$  et vérifiant

$$(3) \quad f'(gku_\infty) = (J^*(k)^{-1} \otimes \rho^*(u_\infty)^{-1})f'(g) \text{ pour } g \in G(\mathbb{A}_F), k \in K, u_\infty \in G(\mathbb{A}_{F, \infty}).$$

On peut ainsi voir  $S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}$  comme le sous-espace des  $\prod_{v \notin \Sigma} K_v$ -invariants d'un espace de fonctions complexes sur  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$  sur lequel  $G(\mathbb{A}_F)$  agit à gauche par translation à droite, de sorte que  $S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}$  est muni d'une structure de  $\mathcal{H}^\Sigma$ -module à gauche.

Si  $f'$  vérifie l'équation fonctionnelle (3), la restriction  $f$  de  $f'$  à  $G(\mathbb{A}_{F, f})$  vérifie

$$(4) \quad f(ugk) = (J^*(k)^{-1} \otimes \rho^*(u_\infty))f(g) \text{ pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F, f}), u \in G(F), k \in K.$$

et détermine  $f'$ .

5.1.3. *Modèle sur un corps de nombres.* La représentation  $(J, V)$  de  $K$  se factorise par un quotient fini. Il existe donc un corps de nombres  $L \subset \mathbb{C}$  et un  $L$ -modèle  $(J_L, V_L)$  de  $(J, V)$ . Quitte à grossir  $L$ , on peut supposer qu'il est stable par la conjugaison complexe, ce qui donne un sens à la notion de produit hermitien sur  $V_L$ . Utilisant que  $J_L(K)$  est fini, nous choisissons un produit hermitien sur  $V_L$  stable par  $J_L$ .

Soit  $\rho_{\mathbb{C}}$  le prolongement de la représentation  $\rho$  du groupe algébrique réel  $G(\mathbb{A}_{F, \infty}) = G(\mathbb{R})^{\Sigma_\infty}$  sur  $W$  en une représentation de  $G(\mathbb{C})^{\Sigma_\infty}$  sur le même espace  $W$ . Comme  $\rho_{\mathbb{C}}$  est algébrique, elle admet un modèle sur un corps de nombres contenant  $F$ . Quitte à grossir  $L$ , on peut supposer qu'il existe un tel  $L$ -modèle  $(\rho_L, W_L)$ , i.e. que  $F \subset L$  et que  $\rho_L$  est une représentation algébrique de  $G(L)^{\Sigma_\infty}$  sur  $W_L$  (c'est-à-dire est définie par un morphisme de schéma en groupes sur  $L : G^{\Sigma_\infty} \times_F L \rightarrow \mathbf{GL}(W_L)$ ), qui sur  $\mathbb{C}$  donne  $\rho_{\mathbb{C}}$ .

Quitte à grossir encore  $L$ , nous supposons également que l'extension  $L/\mathbb{Q}$  est galoisienne. Ainsi, pour tout  $\sigma \in \Sigma_\infty$ , on a  $\sigma(F) \subset L$ . Plongeons  $G(F)$  dans  $G(L)^{\Sigma_\infty}$  par  $r : u \mapsto (\sigma(u))_{\sigma \in \Sigma_\infty}$ . On a alors par définition, pour tout  $u \in G(F)$

$$(5) \quad \rho_L(r(u)) \otimes 1 = \rho(u_\infty) \in \mathbf{GL}(W)$$

Pour toute  $L$ -algèbre (commutative unitaire)  $R$ , on note  $V_R = V_L \otimes R$ ,  $W_R = W_L \otimes R$ , et  $J_R, \rho_R$  les représentations correspondantes.

**Définition.** Soit  $R$  une  $L$ -algèbre (commutative unitaire) On définit  $S_{K, J, \rho, R}$  comme le  $R$ -modules des fonctions lisses  $f$  de  $G(\mathbb{A}_{F, f})$  dans  $V_R^* \otimes W_R^*$  vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$(6) \quad f(ugk) = (J_R^*(k)^{-1} \otimes \rho_R^*(r(u)))f(g) \text{ pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F, f}), u \in G(F), k \in K.$$

Par définition,  $\mathcal{H}^\Sigma$  agit sur  $S_{K, J, \rho, R}$ . Lorsque  $R = \mathbb{C}$ , l'équation fonctionnelle (6) est la même que (4) d'après (5), et les deux définitions de  $S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}$  coïncident donc.

5.1.4. *Produit hermitien sur  $S_{K,J,\rho,L}$ .* Quitte à grossir encore  $L$ , on peut supposer que  $L$  n'est pas inclus dans  $\mathbb{R}$  (et est toujours galoisien). Cela n'est pas strictement nécessaire pour la suite, mais évite de traiter deux cas selon que  $L$  est réel ou non.

Notons  $L_0$  le sous-corps  $L \cap \mathbb{R}$  de  $L$ , de sorte que  $[L : L_0] = 2$ . Comme  $G(\mathbb{A}_{F,\infty})$  est compact,  $\rho$  laisse stable un produit hermitien sur  $W$ , et il en va donc de même de la restriction de  $\rho_L$  à  $G(L_0)^{\Sigma_\infty}$ . Nous munissons  $W_L$  d'une telle structure hermitienne.

Pour tout  $u \in G(F)$ , et tout plongement  $\sigma$  de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ , on a  $\sigma(u) \in L_0$  puisque  $F$  est totalement réel; il s'ensuit que pour  $u \in G(F)$  l'élément  $\rho_L(r(u))$  est en fait un élément unitaire de  $\mathrm{GL}(W_L)$ .

Par ailleurs, [Bor, 5.1] assure que  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$  est compact, et donc est muni d'une unique mesure de probabilité invariante à droite.

Ce qui précède permet de munir  $S_{K,J,\rho,L}$  du produit hermitien obtenu en intégrant celui de  $V_L^* \otimes W_L^*$  sur  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$ .

5.1.5. Donnons maintenant une description plus explicite de  $S_{K,J,\rho,R}$  et du produit hermitien.

Puisque  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$  est compact, il existe des éléments  $x_1, \dots, x_h$  de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  tels que

$$G(\mathbb{A}_{F,f}) = \prod_{i=1}^h G(F)x_iK.$$

Pour tout  $i = 1, \dots, h$ , le groupe  $\Delta_i = (x_i^{-1}G(F)x_i) \cap K$  est fini car compact et discret, et on a un isomorphisme

$$(7) \quad \begin{aligned} S_{K,J,\rho,R} &\rightarrow \bigoplus_{i=1}^h (V_R^* \otimes W_R^*)^{\Delta_i} \\ f &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_h)). \end{aligned}$$

D'autre part, le produit hermitien sur  $S_{K,J,\rho,L}$  est à une constante rationnelle près la somme sur  $i = 1, \dots, h$  de ceux des espaces  $(V_L^* \otimes W_L^*)^{\Delta_i}$ , pondérée par les inverses des cardinaux des sous-groupes  $\Delta_i$ .

Il est alors clair que la formation de  $S_{K,J,\rho,R}$  commute à tout changement de base  $R \rightarrow R'$ . En particulier,  $S_{K,J,\rho,L} \otimes_L \mathbb{C} = S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$  comme  $\mathcal{H}^\Sigma$ -module.

Il est clair également que le produit hermitien sur  $S_{K,J,\rho,L}$  est non dégénéré. Comme l'adjoint de l'action d'un élément de  $\mathcal{H}^\Sigma$  sur  $S_{K,J,\rho,L}$  est encore l'action d'un élément de  $\mathcal{H}^\Sigma$ , et que  $\mathcal{H}^\Sigma$  est commutative, les éléments de  $\mathcal{H}^\Sigma$  agissent comme des opérateurs normaux, et  $S_{K,J,\rho,L}$  est donc un  $\mathcal{H}^\Sigma \otimes L$ -module semi-simple.

5.1.6. *Décomposition de  $S_{K,J,\rho,L}$ .* Appliquant 2.4 au  $\mathcal{H}^\Sigma \otimes L$ -module  $S_{K,J,\rho,L}$ , on peut supposer, quitte à remplacer  $L$  par une extension finie, qu'il existe un ensemble fini  $E_{K,J,\rho,L}$  de caractères de  $\mathcal{H}^\Sigma$  à valeurs dans  $L$  et une décomposition

$$S_{K,J,\rho,L} = \bigoplus_{\eta} S_{K,J,\rho,L}(\eta)$$

(en fait, puisque  $S_{K,J,\rho,L}$  est un  $\mathcal{H}^\Sigma \otimes L$ -module semi-simple, les sous-espaces propres généralisés  $S_{K,J,\rho,L}(\eta)$  sont de simples sous-espaces propres pour l'action de  $\mathcal{H}^\Sigma$ ).

Rappelons qu'on dit que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $L$  sont congrus modulo  $\mu$  si  $x - y \in \mu\mathcal{O}_L$ , où  $\mathcal{O}_L$  désigne l'anneau des entiers de  $L$ .

**Lemme 5.1.7.** *Il existe un ensemble fini  $S_1$  de nombres premiers (ne dépendant que de  $(K, J, \rho)$ ) tel que pour toute place  $\mu$  de  $L$  ne divisant aucun élément de  $S_1$  et tout couple de caractères  $\eta, \eta'$  de  $E_{K,J,\rho,L}$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- les restrictions de  $\eta$  et  $\eta'$  à  $\mathcal{H}(G_v, K_v)$  sont congrues modulo  $\mu$  ;
- on a  $\eta = \eta'$ .

*Démonstration* — Cela résulte, puisque l'ensemble  $E_{K,J,\rho,L}$  est fini, de l'existence des représentations galoisiennes de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$  attachées à  $\eta$  et à  $\eta'$  (cf. 6.3.1) et du théorème de Čebotarev.  $\square$

**5.2. Modèles entiers.** Nous n'allons pas définir de structures entières "globales", i.e. des modèles sur  $\mathcal{O}_L$  des espaces  $S_{K,J,\rho,L}$ , mais seulement des structures entières locales, i.e. sur le complété  $\mathcal{O}_\mu$  de  $\mathcal{O}_L$  en une place finie  $\mu$  de  $L$ , et ceci pour presque toute place  $\mu$ .

En fait, pour garder trace du produit *hermitien* sur  $L$ , on est obligé de travailler avec la place *conjuguée*  $\bar{\mu}$  de  $\mu$  en même temps que  $\mu$ .

Soit donc  $\mu$  une place finie de  $L$ , et soit  $\mu_0$  la place finie de  $L_0 = L \cap \mathbb{R}$  divisant  $\mu$ . Notons  $(L_0)_{\mu_0}$  le complété de  $L_0$  en  $\mu_0$ ,  $L_{\mu_0} = L \otimes_{L_0} (L_0)_{\mu_0}$  et  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  l'anneau d'entiers de  $L_{\mu_0}$ .

L'anneau  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  est égal à  $\mathcal{O}_\mu$  si  $\mu_0$  est inerte ou ramifiée dans  $L$ , et à  $\mathcal{O}_\mu \times \mathcal{O}_{\bar{\mu}}$  si  $\mu_0$  est décomposée dans  $L$  (où  $\mu$  et  $\bar{\mu}$  sont les deux places de  $L$  au-dessus de  $\mu_0$ ). Dans tous les cas  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  est muni d'une involution prolongeant celle de  $\mathcal{O}_L$ .

Notons  $\mathbb{F}_\mu$  (resp.  $\mathbb{F}_{\bar{\mu}}$ ) le corps résiduel de  $\mathcal{O}_\mu$  (resp de  $\mathcal{O}_{\bar{\mu}}$ ) et posons  $\mathbb{F}_{\mu_0} = \mathcal{O}_{\mu_0}/\mu_0$ , c'est-à-dire  $\mathbb{F}_\mu$  si  $\mu_0$  est inerte ou ramifiée, et  $\mathbb{F}_\mu \times \mathbb{F}_{\bar{\mu}}$  si  $\mu_0$  est décomposée. Les corps finis  $\mathbb{F}_\mu$  et  $\mathbb{F}_{\bar{\mu}}$  sont isomorphes.

Enfin, notons  $\Sigma_{\mu_0}$  l'ensemble des places de  $F$  de même caractéristique résiduelle que  $\mu_0$ .

**5.2.1. Définition de  $\rho_{\mu_0}$ .** Soit  $\sigma \in \Sigma_\infty$ . Comme en 5.1.4,  $\sigma$  est un plongement de  $F$  dans  $L_0$ . Notons  $\sigma^{-1}(\mu_0) \in \Sigma_{\mu_0}$  la place de  $F$  en-dessous de  $\mu_0$  relativement à ce plongement  $F \hookrightarrow L_0$ . Le plongement  $\sigma$  se prolonge par continuité en un plongement  $\sigma : F_{\sigma^{-1}(\mu_0)} \hookrightarrow L_{\mu_0}$ . On a donc un morphisme

$$r_\sigma : G(F_{\sigma^{-1}(\mu_0)}) \hookrightarrow G(L_{\mu_0})$$

pour tout  $\sigma \in \Sigma_\infty$ . Considérons le produit  $r_{L_{\mu_0}}$  de tous les  $r_\sigma$  :

$$r_{L_{\mu_0}} : G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_{\mu_0}}) \rightarrow G(L_{\mu_0})^{\Sigma_\infty}$$

(Cf. 2.1 pour la notation  $\mathbb{A}_{F,\Sigma}$ ). Ce morphisme envoie un élément  $(x_v)_{v \in \Sigma_{\mu_0}}$  sur  $(r_{\sigma^{-1}(\mu_0)}(x_{\sigma^{-1}(\mu_0)}))_{\sigma \in \Sigma_\infty}$ .

Finalement, posons

$$\tilde{\rho}_{L_{\mu_0}} := \rho_{L_{\mu_0}} \circ r_{L_{\mu_0}} \circ p_{G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_{\mu_0}})},$$

où  $p_{G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_{\mu_0}})}$  est la projection naturelle de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  sur  $G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_{\mu_0}})$ . On a ainsi défini une représentation

$$\tilde{\rho}_{L_{\mu_0}} : G(\mathbb{A}_{F,f}) \rightarrow \text{GL}(W_{L_{\mu_0}}),$$

qui vérifie par construction la propriété suivante : pour tout  $u \in G(F)$  l'élément  $\rho_{\mu_0}(u)$  de  $\text{GL}(W_{L_{\mu_0}})$  est en fait dans  $\text{GL}(W_L)$  et on a l'égalité

$$(8) \quad \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}(u) = \rho_L(r(u)) = \rho(u_\infty).$$

5.2.2. *Définition des modèles entiers.* On fixe arbitrairement un  $\mathcal{O}_L$ -réseau  $V_{\mathcal{O}_L}$  (resp.  $W_{\mathcal{O}_L}$ ) de  $V_L$  (resp.  $W_L$ ). On pose  $V_{\mathcal{O}_{\mu_0}} := V_{\mathcal{O}_L} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mu_0}$  (resp.  $W_{\mathcal{O}_{\mu_0}} := W_{\mathcal{O}_L} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mu_0}$ )

**Définition.** Soit  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  le sous- $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -module de  $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$  constitué des fonctions  $f$  telles que

$$\tilde{f}(g) := \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(g)^{-1} f(g) \in V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \text{ pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F,f}).$$

Par définition,  $\tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}$  se factorise par  $G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_m u_z})$ , de sorte que l'on peut voir  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  comme l'ensemble des  $\prod_{v \notin \Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}} K_v$ -invariants d'un espace de fonctions sur  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  sur lequel  $\prod'_{v \notin \Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}} G_v$  agit par translation à droite. On en déduit que l'action de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  (où  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  est l'algèbre de Hecke hors  $\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}$ , cf. 5.1.1) sur  $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$  laisse stable  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ .

Cependant il n'est pas clair à ce stade que  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes L_{\mu_0} = S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$  ni même que  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  est non nul. Nous verrons bientôt (cf. 5.2.7) que c'est le cas pour presque toute place  $\mu$ .

5.2.3. *Définition de  $S_2$ .* Il existe un entier  $N$  tel que le morphisme de  $L$ -schémas en groupes

$$G^{\Sigma_{\infty}} \times_{\text{Spec } F} \text{Spec } L \rightarrow \mathbf{GL}(W_L)$$

induisant  $\rho_L$  (cf. 5.1.3) se prolonge (puisque les schémas de départ et d'arrivée sont de type finis) en un morphisme

$$\mathfrak{G}^{\Sigma_{\infty}} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_F} \text{Spec } \mathcal{O}_L[1/N] \rightarrow \mathbf{GL}(W_{\mathcal{O}_L[1/N]})$$

au dessus d'un ouvert  $\text{Spec } \mathcal{O}_L[1/N]$  de  $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ , d'où l'existence d'un ensemble fini  $S_2$  de nombres premiers (les facteurs premiers de  $N$ ), ne dépendant que de  $\rho$ , tel que pour toute place finie  $\mu_0$  de  $L_0$  ne divisant aucun élément de  $S_2$ , il existe un morphisme algébrique

$$\rho_{\mathcal{O}_{\mu_0}} : \mathfrak{G}^{\sigma \in \Sigma_{\infty}} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_F} \text{Spec } \mathcal{O}_{\mu_0} \rightarrow \mathbf{GL}(W_{\mathcal{O}_{\mu_0}})$$

qui est un modèle sur  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  de  $\rho_{L_{\mu_0}}$ . En particulier le réseau  $W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$  de  $W_{L_{\mu_0}}$  est stable sous la restriction de  $\rho_{L_{\mu_0}}$  au sous-groupe  $\mathfrak{G}^{\Sigma_{\infty}}(\mathcal{O}_{\mu_0})$  de  $G^{\Sigma_{\infty}}(L_{\mu_0})$ .

Par définition de la topologie adélique, quitte à grossir encore  $S_2$ , on peut aussi supposer que pour toute place finie  $v$  de  $F$  ne divisant aucun élément de  $S_2$ , on a  $K_v = \mathfrak{G}(\mathcal{O}_v)$ . Pour tout  $\mu_0$  ne divisant pas un élément de  $S_2$ , il est alors clair que le morphisme  $r_{L_{\mu_0}} \circ p_{G(\mathbb{A}_{F,\Sigma_{\mu_0}})}$  défini en 5.2.1 envoie  $K$  dans  $\mathfrak{G}^{\Sigma_{\infty}}(\mathcal{O}_{\mu_0})$ , et donc que la restriction de  $\tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}$  à  $K$  laisse stable le réseau  $W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$  de  $W_{L_{\mu_0}}$ . Ceci permet de définir<sup>6</sup>, pour toute  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -algèbre  $R$  la représentation  $\tilde{\rho}_R$  du groupe  $K$  sur  $W_R = W_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R$ . En particulier, on dispose d'une représentation  $\tilde{\rho}_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  de  $K$  sur  $W_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$ .

**Lemme 5.2.4.** *Quitte à grossir encore l'ensemble fini  $S_2$ , pour tout  $\mu_0$  ne divisant aucun élément de  $S_2$ , et pour tout sous-groupe  $H$  de  $K$  dont l'image par réduction dans  $\prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{G}(\mathbb{F}_v)$  (où  $\mathbb{F}_v$  désigne le corps résiduel de  $F$  en  $v$ ) contient  $\prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{G}(\mathbb{F}_v)$ , la restriction de  $\tilde{\rho}_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  à  $H$  est absolument irréductible*

*Démonstration* — Le plongement  $r : G(F) \rightarrow G(L)^{\Sigma_{\infty}}$  défini en 5.1.3 est la réalisation sur les  $\mathbb{Q}$ -points d'un morphisme de groupes algébriques sur  $\mathbb{Q}$  :  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}} G \rightarrow \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} G^{\Sigma_{\infty}}$ .

<sup>6</sup>Il y a une toute petite ambiguïté de notations dans cette définition :  $\rho_{L_{\mu_0}}$  désigne à la fois une représentation de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  sur  $W_{L_{\mu_0}}$  et sa restriction à  $K$ . Cette ambiguïté n'est pas gênante

Il existe un modèle de ce morphisme sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$  pour un entier  $N$  convenable. Pour tout nombre premier  $l$  ne divisant pas  $N$ , on a donc un morphisme

$$r_{\mathbb{Z}_l} : \prod_{v \text{ place de } F \text{ divisant } l} \mathfrak{G}(\mathcal{O}_{F_v}) \rightarrow \prod_{\nu_0 \text{ place de } L_0 \text{ divisant } l} \mathfrak{G}^{\Sigma^\infty}(\mathcal{O}_{\nu_0})$$

et des morphismes analogues  $r_{\mathbb{Q}_l}$  et  $r_{\mathbb{F}_l}$  avec  $\mathcal{O}_{F_v}$  remplacée par  $F_v, \mathbb{F}_v$  respectivement, et  $\mathcal{O}_{\nu_0}$  remplacé par  $L_{\nu_0}, \mathbb{F}_{\mu_0}$ .

Supposons que  $\mu_0$  est de caractéristique résiduelle  $l$ , avec  $l$  comme ci-dessus. L'ensemble des places de  $F$  divisant  $l$  n'est autre que  $\Sigma_{\mu_0}$ . Le morphisme  $r_{L_{\mu_0}}$  défini en 5.2.1 n'est autre que  $r_l$  composé à gauche avec la projection de  $\prod_{\nu_0 \text{ place de } L_0 \text{ divisant } l} \mathfrak{G}^{\Sigma^\infty}(L_{\nu_0})$  sur son facteur  $\mathfrak{G}^{\Sigma^\infty}(L_{\mu_0})$

Le morphisme de  $\mathbb{Q}$ -groupe algébriques

$$\text{Res}_{F/\mathbb{Q}} G \rightarrow \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} G^{\Sigma^\infty} \xrightarrow{\text{Res}_{L/\mathbb{Q}} \rho_L} \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} \mathbf{GL}(W_L)$$

est absolument irréductible (puisque  $G(F)$  est Zariski dense dans  $G(\mathbb{C})^{\Sigma^\infty}$ ), et ceci même en remplaçant  $G$  par  $SG$  (puisque  $G(\mathbb{C}) = SG(\mathbb{C})Z(\mathbb{C})$ , où  $Z$  est le centre). Il en va donc de même, pour presque tout  $l$ , et tout  $\mu_0$  au-dessus de  $l$ , du morphisme  $\psi_{\mu_0}$

$$\prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{G}(\mathbb{F}_v) \xrightarrow{r_{\mathbb{F}_l}} \prod_{\nu_0 \text{ place de } L_0 \text{ divisant } l} \mathfrak{G}^{\Sigma^\infty}(\mathbb{F}_{\nu_0}) \xrightarrow{\text{projection}} \mathfrak{G}^{\Sigma^\infty}(\mathbb{F}_{\mu_0}) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{F}_{\mu_0}}} \mathbf{GL}(W_{\mathbb{F}_{\mu_0}}),$$

et ceci même en remplaçant  $\mathfrak{G}$  par  $\mathfrak{S}\mathfrak{G}$  dans le groupe de départ.

Finalement, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} K_v & \xrightarrow{\tilde{\rho}_{\mathcal{O}_{\mu_0}}} & \mathbf{GL}(W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}) \\ \text{reduction} \downarrow & \searrow \tilde{\rho}_{\mathbb{F}_{\mu_0}} & \downarrow \text{reduction} \\ \prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{G}(\mathbb{F}_v) & \xrightarrow{\psi_{\mu_0}} & \mathbf{GL}(W_{\mathbb{F}_{\mu_0}}) \end{array}$$

est commutatif, puisque le carré est clairement commutatif, ainsi que le triangle supérieur par définition de  $\tilde{\rho}_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$

Le lemme découle de la commutativité du triangle inférieur de ce diagramme et de l'irréductibilité de  $\psi_{\mu_0}$ .  $\square$

**5.2.5. Définition de  $S_3$ .** Comme  $J(K)$  est fini, il existe un ensemble fini  $S_3$  de nombres premiers tel que pour  $\mu_0$  ne divisant pas un élément de  $S_3$ , le réseau  $V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$  est stable par  $J(K)$ , et la représentation  $J$  de  $K$  sur  $V_{\mu_0}/\mu_0 V_{\mathcal{O}_{\mu_0}} = V_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  est absolument irréductible.

Notons que  $S_3$  ne dépend que de  $(K, J)$  et même que de  $(\prod_{v \in \Sigma} K_v, J)$ .

**5.2.6. Définition de  $S_4$ .** Comme en 5.1.5, considérons une famille  $x_1, \dots, x_h$  de représentants de  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f}) / K$  et, pour  $i = 1, \dots, h$ , posons

$$\Delta_i = (x_i^{-1} G(F) x_i) \cap K.$$

Le sous- $\mathcal{O}_L$ -module  $(V_{\mathcal{O}_L}^* \otimes W_{\mathcal{O}_L}^*)^{\Delta_i}$  du  $L$ -espace vectoriel  $(V_L^* \otimes W_L^*)^{\Delta_i}$  en est un réseau. De plus, il existe un ensemble fini de nombres premiers  $S_4$ , tel que pour toute place  $\mu_0$  de  $L \cap \mathbb{R}$  ne divisant aucun élément de  $S_4$  et pour tout  $i = 1, \dots, h$ , la restriction du produit scalaire de  $V_{L_{\mu_0}}^* \otimes W_{L_{\mu_0}}^*$  à  $(V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*)^{\Delta_i}$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  et non-dégénérée. Quitte à remplacer  $S_4$  par un ensemble le contenant, on suppose de plus que  $S_4$  ne contient aucun des diviseurs des cardinaux des groupes finis  $\Delta_1, \dots, \Delta_h$ .

Notons que  $S_4$  ne dépend que de  $(K, J, \rho)$ . De plus, si  $K$  est changé en un sous-groupe, on peut garder le même ensemble  $S_4$ .

**Lemme 5.2.7.** *Soit  $\mu_0$  une place finie de  $L_0$  ne divisant aucun élément de  $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ , alors  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes L_{\mu_0} = S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$  comme  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}} \otimes L_{\mu_0}$ -module et le produit hermitien sur  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  est non dégénéré.*

*Démonstration* — Montrons que  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  est un réseau de  $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$ . Pour tout  $f \in S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ ,  $g \in G(\mathbb{A}_{F,f})$ ,  $u \in G(F)$  et  $k \in K$ , on a par (6) et (8)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(ugk) = \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(ugk)^{-1} f(ugk) &= (J^*(k)^{-1} \otimes \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(k)^{-1} \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(g)^{-1} \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(u)^{-1} \rho_L(u)) f(g) \\ &= (J^*(k)^{-1} \otimes \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(k)^{-1}) (\tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(g)^{-1} f(g)) \\ &= (J^*(k)^{-1} \otimes \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(k)^{-1}) \tilde{f}(g). \end{aligned}$$

Sous les notations de 5.2.6, le calcul précédent et 5.2.5 impliquent que  $f \in S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  si et seulement si  $\tilde{f}(x_i) = \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}}^*(x_i)^{-1} f(x_i) \in V_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$  pour  $i = 1, \dots, h$ , et donc l'isomorphisme (7), avec  $R = L_{\mu_0}$ , induit un isomorphisme

$$S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \simeq \bigoplus_{i=1}^h \left( \tilde{\rho}_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*(x_i) (V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*) \right)^{\Delta_i}.$$

Or, pour  $i = 1, \dots, h$ , le  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -module  $\left( \tilde{\rho}_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*(x_i) (V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*) \right)^{\Delta_i}$  est un réseau du  $L_{\mu_0}$ -espace vectoriel  $(V_{L_{\mu_0}}^* \otimes W_{L_{\mu_0}}^*)^{\Delta_i}$ .

Il reste à prouver que la restriction du produit hermitien sur  $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$  à  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  et non dégénérée, ce qui découle de 5.2.6 puisque ce produit hermitien est une somme directe, pondérée par des éléments inversibles de  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ , de produits hermitiens à valeurs dans  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  et non dégénérés.  $\square$

**5.2.8. Définition des espaces de formes modulaires.** Soit  $\mu_0$  une place finie de  $L_0$  ne divisant aucun élément de  $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . Soit  $R$  une  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  algèbre commutative unitaire. On pose  $V_R = V_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes R$ ,  $J_R = J_{\mu_0} \otimes R$ . On a déjà défini, de façon analogue,  $W_R$  et  $\tilde{\rho}_R$ . Enfin on définit  $S_{K,J,\rho,R}$  comme l'ensemble des fonctions lisses  $\tilde{f}$  de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  dans  $V_R^* \otimes W_R^*$  qui vérifient

$$(9) \quad \tilde{f}(ugk) = (J_R^*(k))^{-1} \otimes \tilde{\rho}_R^*(k)^{-1} \tilde{f}(g), \quad \text{pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F,f}), u \in G(F), k \in K.$$

La preuve du lemme 5.2.7 rend clair le fait que la formation de  $S_{K,J,\rho,R}$  (avec son action naturelle de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$ ) commute à tout changement de base. Quand  $R = \mathcal{O}_{\mu_0}$ ,  $S_{K,J,\rho,R}$  s'identifie avec le module  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  déjà défini, en associant à toute fonction  $f$  de ce dernier la fonction  $\tilde{f}(g) = \tilde{\rho}_{L_{\mu_0}(g)}^{-1}(g) f(g)$ . On en déduit grâce au lemme 5.2.7 qu'il n'y a pas d'ambiguïté de notation avec les  $S_{K,J,\rho,R}$  déjà définis quand  $R$  est une  $L_0$ -algèbre.

**Remarque.** Le lemme 5.2.7 montre en particulier que la restriction à  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  des caractères de  $\mathcal{H}^{\Sigma}$  définis en 5.1.6 est à valeurs dans l'anneau localisé en  $\mu$  de  $\mathcal{O}_L$  pour presque toute place finie  $\mu$  de  $L$ .

### 5.3. Formes anciennes et nouvelles en $v_0$ . Interprétations des formes en termes de fonctions sur des arbres.

5.3.1. *Notations.* Dans ce paragraphe, on conserve toutes les notations de 5.1.1, et on choisit un corps de nombres  $L \subset \mathbb{C}$  comme en 5.1.3 et 5.1.6.

On fixe dorénavant une place *inerte*  $v_0 \notin \Sigma$ , de caractéristique résiduelle  $p$ , un sous-groupe compact maximal spécial  $K'_{v_0}$  de  $G_{v_0}$  tel que les points de l'arbre  $\mathcal{X}_{v_0}$  fixés par  $K_{v_0}$  et  $K'_{v_0}$  soient voisins. Nous notons  $B_{v_0}$  le sous-groupe d'Iwahori  $K_{v_0} \cap K'_{v_0}$ . Nous reprenons les notations  $X = G_{v_0}/K_{v_0}$ ,  $X' = G_{v_0}/K'_{v_0}$  et  $A = G_{v_0}/B_{v_0}$  du paragraphe 3 pour la place  $v_0$ .

Nous posons enfin  $K' := \prod_{v \neq v_0} K_v \times K'_{v_0}$  et  $B := \prod_{v \neq v_0} K_v \times B_{v_0}$ . Puisque  $v_0 \notin \Sigma$ , la représentation  $J$  de  $K$  induit une représentation de  $K'$  et  $B$  que l'on désigne par la même lettre.

**Lemme 5.3.2.** *Il existe un ensemble fini  $S_5$  de nombres premiers, ne dépendant que de  $(K, J, \rho)$ , mais pas de  $v_0$ , tel que pour  $U = K$ ,  $U = K'$ , et  $U = B$ , et pour toute place  $\mu_0$  de  $L_0$  de caractéristique résiduelle n'appartenant pas à  $S_5 \cup \{p\}$ , et pour tout morphisme de  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -algèbre  $R \rightarrow R'$ , on ait l'égalité  $S_{U, J, \rho, R} \otimes R' = S_{U, J, \rho, R'}$  comme  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}} \otimes R'$ -module et que le produit hermitien sur  $S_{U, J, \rho, R'}$  soit non dégénéré*

*Démonstration* — Choisissons  $S_2, S_3$  et  $S_4$  comme en 5.1.7, 5.2.3, 5.2.5 et 5.2.6. Il est clair *loc. cit.* que  $S_2 \cup \{p\}$ ,  $S_3$ , et  $S_4$  satisfont les propriétés de 5.2.3, 5.2.5 et 5.2.6, respectivement, avec  $K$  remplacé par  $K'$  ou  $U$ . Le lemme, avec  $S_5 = S_2 \cup S_3 \cup S_4$  résulte donc du lemme 5.2.7 et de 5.2.8.  $\square$

On fixe une place  $\mu_0$  comme dans le lemme précédent, et on désigne par  $R$  une  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -algèbre.

5.3.3. *Interprétation locale en termes d'arbre.* Comme

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f}) / (G_{v_0} \prod_{v \neq v_0} K_v)$$

est un quotient de l'ensemble fini  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_{F,f}) / K$ , on peut écrire, quitte à renuméroter les  $x_i$  (cf 5.1.5)

$$(10) \quad G(\mathbb{A}_{F,f}) = \prod_{i=1}^{h'} G(F) x_i (G_{v_0} \prod_{v \neq v_0} K_v),$$

avec  $h' \leq h$ .

Pour  $i = 1, \dots, h'$ , et  $\tilde{f} \in S_{K, J, \rho, R}$  notons  $\tilde{f}_i$  la fonction sur  $G_{v_0}$  définie par  $\tilde{f}_i(g) = \tilde{f}(x_i g)$ . Cette fonction est invariante à droite par  $K_{v_0}$  puisque la restriction de la représentation  $J$  à  $K_{v_0}$  est triviale, donc est une fonction sur l'ensemble  $X$  des sommets de l'arbre attaché à  $G_{v_0}$  (cf. 3.1). Soit

$$\Gamma_i := x_i^{-1} G(F) x_i \cap \prod_{v \neq v_0} K_v, \quad \text{l'intersection étant prise dans } G(\mathbb{A}_{F,f}^{v_0}).$$

On peut voir  $\Gamma_i$  comme un sous-groupe de  $G(F)$  par le plongement  $\gamma \mapsto x_i \gamma x_i^{-1}$ , donc de  $G_{v_0}$  (puisque  $G(F) \subset G_{v_0}$ ), et donc  $\Gamma_i$  agit sur  $X$ . Par ailleurs, on peut restreindre la représentation  $J_R$  (resp.  $\tilde{\rho}_R$ ) à  $\Gamma_i$  puisque c'est un sous-groupe de  $\prod_{v \neq v_0} K_v$  (resp. en plongeant  $\Gamma_i$  dans  $G(F)$  par  $\gamma \mapsto x_i \gamma x_i^{-1}$ ). Par définition,  $\tilde{f}_i$  est alors une fonction sur l'arbre  $X$ , à valeurs dans  $V_R^* \otimes W_R^*$ , *covariante par*  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_i$  agissant par  $(J_R^*) \otimes (\tilde{\rho}_R^*)$ . Les  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, h'$  déterminent évidemment  $\tilde{f}$ . Inversement, toute famille de fonctions  $\tilde{f}_i$ ,

$i = 1, \dots, h$ , déterminent par les formules évidentes un  $\tilde{f}$  sur  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  qui appartient à  $S_{K,J,\rho,R}$  :

$$S_{K,J,\rho,R} = \bigoplus_{i=1}^{h'} \text{Hom}_{\Gamma_i}(J_R \otimes \rho_R, \mathcal{C}(X, R)).$$

Lorsque  $R$  est muni d'une involution prolongeant celle de  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ , cette décomposition en somme directe est orthogonale et le produit hermitien sur chacun des facteurs de  $S_{K,J,\rho,R}$  est l'intégrale sur  $\Gamma \backslash X$  du produit tensoriel du produit  $\mathcal{C}(X, \mathbb{Z}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{Z})$  par le produit hermitien de  $(V_R^* \otimes W_R^*)$ .

De la même façon, on a

$$\begin{aligned} S_{K',J,\rho,R} &= \bigoplus_{i=1}^{h'} \text{Hom}_{\Gamma_i}(J_L \otimes \rho_L, \mathcal{C}(X', R)), \\ S_{B,J,\rho,R} &= \bigoplus_{i=1}^{h'} \text{Hom}_{\Gamma_i}(J_L \otimes \rho_L, \mathcal{C}(A, R)). \end{aligned}$$

**5.3.4. Opérateurs entre espaces de formes automorphes.** Les  $R$ -morphisms  $T, U_1, U_2, U, U'$  et  $T_B$  définis en 3.5 entres les modules  $\mathcal{C}(X, R), \mathcal{C}(X', R)$  et  $\mathcal{C}(A, R)$  commutent à l'action de  $G_{v_0}$ , donc de  $\Gamma$ , sur  $X, X', A'$  respectivement. Les morphismes qu'ils induisent par tensorisation par  $V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^* \otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}^*$  définissent donc des  $R$ -morphisms entre  $S_{K,J,\rho,R}, S_{K',J,\rho,R}$  et  $S_{B,J,\rho,R}$  que nous notons par les mêmes lettres. Ainsi, l'opérateur  $T : S_{K,J,\rho,R} \rightarrow S_{K,J,\rho,R}$  est simplement l'opérateur de Hecke  $T_{v_0} \in \mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0} Z_{v_0})$  défini en 3.3 et 5.1.1.

Notons que  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  (resp.  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0} \cup \{v_0\}}$ ) agit sur  $S_{K,J,\rho,R}$  (resp.  $S_{K',J,\rho,R}$  et  $S_{B,J,\rho,R}$ ). On fait de  $S_{B,J,\rho,R}$  un  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$ -module en faisant agir  $T$  par  $T_B$ .

**Lemme 5.3.5.** *Les  $R$ -morphisms  $T, T_B, U_1, U_2, U, U'$  satisfont les assertions du lemme 3.5.3. De plus,  $U_1$  et  $U_2$  (resp.  $U$  et  $U'$ ) sont des morphismes de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$ -modules (resp.  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0} \cup \{v_0\}}$ ).*

*Démonstration* — La première assertion du lemme résulte de 5.3.3. La deuxième résulte de ce que les éléments de  $G_v$  et  $G_{v_0}$  commutent dans  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  pour tout  $v \neq v_0$ .  $\square$

**5.3.6. Formes anciennes et formes nouvelles.** Nous définissons l'espace  $O_{B,J,\rho,R}$  des formes anciennes et l'espace  $N_{B,J,\rho,R}$  des formes nouvelles à valeurs dans  $R$ .

On pose tout d'abord

$$\begin{aligned} O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} &:= (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}^2)^{\text{sat}} \subset S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}, \\ N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} &:= O_{B,J,K,\mathcal{O}_{\mu_0}}^\perp \subset S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}. \end{aligned}$$

Puis, pour toute  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -algèbre  $R$ ,

$$\begin{aligned} O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} &:= O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R \subset S_{B,J,\rho,R}, \\ N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} &:= N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R \subset S_{B,J,\rho,R}, \end{aligned}$$

Si  $R$  est une  $L_{\mu_0}$ -algèbre, alors on a l'égalité  $O_{B,J,\rho,R} := (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,R}^2)$  et, puisque le produit hermitien sur  $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$  est défini positif, la décomposition  $S_{B,J,\rho,R} = O_{B,J,\rho,R} \oplus N_{B,J,\rho,R}$ . Ces assertions ne sont plus vraies *a priori* si  $R = \mathcal{O}_{\mu_0}$ , par exemple.

**5.4. Le cas trivial de la conjecture de Taylor.** La conjecture de Taylor dont il s'agit est l'extension évidente de [Tay2, conjecture 5.3], aux cas de poids non triviaux et aux places de  $F$  non nécessairement décomposées dans  $E$ .

5.4.1. *Caractères eisensteiniens.* Soit  $\eta$  un caractère de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}^{\Sigma'}$ , (où  $\Sigma'$  est une ensemble fini de places de  $F$  contenant  $\Sigma$ ) à valeurs dans un corps  $R$ . Nous dirons que  $\eta$  est *eisensteinien* s'il existe un caractère localement constant  $\alpha$  du groupe  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  à valeurs dans  $R^*$ , invariant par  $\prod_{v \notin \Sigma'} K_v$  et par  $G(F)$ , qui est propre de caractère propre  $\eta$  pour l'action de  $\mathcal{H}^{\Sigma'}$  (sur l'espace des fonctions localement constantes sur  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  invariantes à droites par  $\prod_{v \notin \Sigma'} K_v$  à valeurs dans  $R$ ).

5.4.2. *Propriétés des caractères eisensteiniens.* Si  $\eta$  est eisensteinien, et  $R$  est de caractéristique zéro, le caractère  $\alpha$  de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  intervenant dans la définition de  $\eta$  est uniquement déterminé par  $\eta$ . Il est clair en effet que la restriction de  $\alpha$  aux groupes  $G(F_v)$  pour  $v \notin \Sigma$  est déterminée par  $\eta$ , et on en déduit que  $\alpha$  est déterminé par  $\eta$  d'après le théorème d'approximation faible appliqué à  $G$  (cf. [P-R, prop. 7.4]).

On montre de même que  $\eta$  est un caractère eisensteinien si et seulement si pour tout ensemble fini  $\Sigma''$  de places finies de  $F$  contenant  $\Sigma'$ ,  $\eta$  restreint à  $\mathcal{H}^{\Sigma''}$  est eisensteinien (il l'est alors pour le même  $\alpha$ ).

Par ailleurs, on peut voir que notre définition de "eisensteinien" est équivalente à celle de Clozel ([Clo, déf 2.3]), dont nous tirons cette terminologie.

5.4.3. Supposons dans ce numéro que  $\rho$  est de dimension 1, donc triviale sur  $SG(\mathbb{C})$ , et de même que  $J$  est de dimension 1. Nous désignons par  $U$  soit  $K$  soit  $K'$  (cf 5.3.1) Soit  $R$  une  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -algèbre.

Dans  $S_{U,J,\rho,R}$  certaines fonctions  $\tilde{f}$  sont invariantes (à gauche où à droite, c'est la même chose) par  $SG(\mathbb{A}_{F,f})$ . Nous appelons  $S_{U,J,\rho,R}^{ab}$  le sous-espace constitué de ses fonctions ; il est stable sous  $\mathcal{H}^{\Sigma}$ .

Rappelons que si  $C$  désigne le groupe algébrique commutatif  $G/SG$ , on a  $C(F) = G(F)/SG(F)$  et  $C(\mathbb{A}_{F,f}) = G(\mathbb{A}_{F,f})/SG(\mathbb{A}_{F,f})$  (cf. [Clo, p. 1278-1279]). L'espace  $S_{U,1,\rho,L}^{ab}$  s'interprète donc comme l'espace des fonctions sur  $C(\mathbb{A}_{F,f})$ , covariantes sous  $J_R \otimes \rho_R$  par l'image  $U_C = \det(U)$  de  $U$  dans  $C(\mathbb{A}_{F,f})$ . On voit facilement que  $U_C$  est identique, que  $U$  soit  $K$  ou  $K'$ , car le déterminant à même image sur les deux classes de conjugaisons  $K_{v_0}$  et  $K'_{v_0}$  de sous-groupes compact maximaux de  $G_{v_0}$ . Ainsi  $S_{K,J,\rho,R}^{ab}$  et  $S_{K',J,\rho,R}^{ab}$  sont isomorphes comme  $\mathcal{H}^{\Sigma}$ -algèbres, et nous supposerons  $U = K$  dans la suite de ce numéro

Comme  $C(F) \backslash C(\mathbb{A}_{F,f})/K_C$  est fini, on en déduit comme en 5.2.7 que la formation de  $S_{K,J,\rho,R}^{ab}$  commute à tout changement de base  $R \rightarrow R'$ .

Supposons que  $R$  est un corps (assez gros) de caractéristique zéro. Comme

$$C(F) \backslash C(\mathbb{A}_{F,f})/K_C$$

est un *groupe abélien* fini, l'espace  $S_{K,J,\rho,R}^{ab}$  possède une base constituée de caractères de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$ . Il est clair que chacun de ces caractères est propre pour l'action de l'algèbre de Hecke. Il en découle que tout caractère de l'algèbre de Hecke apparaissant dans cet espace est Eisensteinien.

5.4.4. Soit  $\eta$  l'un des caractères de  $\mathcal{H}^{\Sigma}$  apparaissant dans la décomposition 5.1.6. D'après le lemme 5.2, nous savons que pour tout les  $\mu_0$  ne divisant aucun élément de l'ensemble fini  $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ , la restriction de  $\eta$  à  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ . Nous notons  $\bar{\eta}$  la réduction modulo  $\mu_0$  de la restriction de  $\eta$  à  $\mathcal{H}^{\Sigma}$ .

**Proposition 5.4.5.** *Soit  $U = K$ ,  $U = K'$ , ou  $U = B$  ; soit  $\mu_0$  une place finie de  $L_0$  de caractéristique résiduelle n'appartenant pas à  $S_1 \cup S_5 \cup \{p\}$  ; si  $\tilde{f} \in S_{K,J,\rho,\mathbb{F}_{\mu_0}}(\bar{\eta})$  est telle*

que chaque fonction  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, h'$  est constante, on a soit  $\tilde{f} = 0$ , soit  $\rho$  et  $J$  sont de dimension 1 et  $\eta$  eisensteinien.

La preuve distingue deux cas.

5.4.6. *Premier cas :  $\rho$  et  $J$  sont de dimension 1.* L'hypothèse que les  $\tilde{f}_i$  sont constantes implique que les  $\tilde{f}_i$  sont invariantes à droite (où à gauche, c'est la même chose) par  $SG(\mathbb{A}_{F,f})$ . Prouvons le.

Comme  $\rho$  est de dimension 1,  $\tilde{\rho}_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  est triviale sur  $U \cap SG(\mathbb{A}_{F,f})$ . Par ailleurs, puisque  $J$  est triviale sur un sous-groupe ouvert de  $U$ , elle est aussi triviale sur un sous-groupe ouvert  $V$  de  $U \cap SG(\mathbb{A}_{F,f})$ . Il en résulte que  $\tilde{f}$  est invariante à droite par  $V$ . Enfin, remarquons que l'hypothèse que les fonctions  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{h'}$  sont constante équivaut au fait que  $\tilde{f}$  est invariante à droite par  $G_v$ , et rappelons aussi que  $\tilde{f}$  est invariante à gauche par  $G(F)$ .

Soit maintenant  $g$  un élément de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$ . Puisque  $gVg^{-1}$  est aussi un ouvert de  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  le théorème d'approximation forte appliqué à  $SG$  donne l'égalité  $SG(\mathbb{A}_{F,f}) = SG(F)SG_v gVg^{-1}$ , dont on déduit, en utilisant que  $SG_v$  est distingué dans  $G(\mathbb{A}_{F,f})$  :

$$\tilde{f}(SG(\mathbb{A}_{F,f})g) = \tilde{f}(SG(F)SG_v gV) = \tilde{f}(SG_v g) = \tilde{f}(gSG_v) = \tilde{f}(g).$$

Ceci signifie que  $\tilde{f}$  est  $SG(\mathbb{A}_{F,f})$ -invariante, c'est-à-dire que c'est un élément de  $S_{U,J,\rho,\mathbb{F}_{\mu_0}}^{ab}$ .

Le lemme de Deligne-Serre appliqué à  $S_{U,J,\rho,\mathbb{F}_{\mu_0}}^{ab}$  implique alors qu'il existe un caractère  $\eta'$  de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  apparaissant dans la décomposition de  $S_{U,J,\rho,L_{\mu_0}}^{ab}$  donc dans la décomposition de  $S_{K,J,\rho,L}$  (cf. 5.4.3) relevant  $\bar{\eta}$  (il n'est pas nécessaire de grossir  $L$  vu 5.1.3). Un tel caractère est eisensteinien d'après 5.4.3. Comme la restriction de  $\eta$  à  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  est congru modulo  $\mu$  à  $\eta'$ , on a  $\eta = \eta'$  d'après le lemme 5.1.7, et donc la restriction de  $\eta$  à  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma_{\mu_0}}$  est un caractère eisensteinien. D'après 5.4.2,  $\eta$  est donc eisensteinien.

5.4.7. *Second cas :  $\rho$ , ou  $J$ , est de dimension au moins 2.* Soit  $i$  entre 1 et  $h'$ . Si  $\tilde{f}_i$  est non nulle, il définit une droite stable pour la représentation de  $\Gamma_i$  sur  $V_{\mathbb{F}_{\mu_0}} \otimes W_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$ .

Notons  $ST_i = \Gamma_i \cap SG(\mathbb{A}_{F,f})$ . Considerons le morphisme de réduction  $ST_i \rightarrow U \rightarrow \prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{G}(\mathbb{F}_v)$ . L'image de ce morphisme contient  $\prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} \mathfrak{S}\mathfrak{G}(\mathbb{F}_v)$  par le théorème d'approximation forte. La représentation  $\rho_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  de  $\Gamma_i$  est donc irréductible d'après le lemme 5.2.4. Comme cette représentation se factorise par le quotient  $\prod_{v \in \Sigma_{\mu_0}} K_v$  de  $U$  tandis qu'au contraire  $J_{\mathbb{F}_{\mu_0}}$  se factorise par  $\prod_{v \in \Sigma} K_v$ , et que  $\Sigma$  et  $\Sigma_{\mu_0}$  sont disjoints, la représentation  $J_{\mathbb{F}_v} \otimes \rho_{\mathbb{F}_v}$  est irréductible. C'est une contradiction, car cette représentation est de dimension au moins 2.

Ceci prouve la proposition 5.4.5.

## 5.5. Le théorème.

**Théorème 5.5.1.** *Soit  $(K, J, \rho)$  un niveau, un type, et un poids comme dans 5.1.1, et  $L$  un corps de nombres comme dans 5.1.3. soit  $\mu$  une place de  $L$ , choisie hors d'un ensemble fini  $S$  ne dépendant que de  $(K, J, \rho)$  de places de  $L$ .*

*Soit  $\Sigma$  l'ensemble des places  $v$  de  $F$  où  $K_v$  n'est pas hyperspécial et soit  $\psi$  un caractère de  $\mathcal{H}^{\Sigma}$  à valeurs dans  $L$ , non eisensteinien, tel que  $S_{K,J,\rho,L}(\psi)$  soit non nul. Soit enfin  $v_0$  une place de  $F$  inerte dans  $E$ , hors de  $\Sigma$  et de caractéristique résiduelle distincte de*

celle de  $\mu$ , posons  $\lambda = \psi(T_{v_0}) \in \mathcal{O}_\mu$ , et  $q$  le cardinal résiduel de  $F_{v_0}$ . Si  $\lambda \neq -(q^3 + 1)$ , notons  $c$  le plus petit entier vérifiant

$$c \geq \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))/2,$$

et si  $\lambda = -(q^3 + 1)$ , soit

$$c = \text{val}_\mu(q^3 + 1);$$

alors il existe une congruence modulo  $\mu^c$  entre  $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$  et  $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$  dans  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ .

### 5.5.2. Remarques.

- (1) Si  $\lambda = -(q^3 + 1)$ , alors  $\text{val}_\mu(q^3 + 1)^2 \geq \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))$ , de sorte que l'on peut toujours prendre pour  $c$  la partie entière supérieure de  $\text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))/2$ , ce qui donne bien le théorème 1 de l'introduction. Ce cas correspond aux représentations endoscopiques non tempérées (cf. 6.4.1).
- (2) Si  $q^3 + 1$  n'est pas nul modulo  $\mu$ , i.e. si l'on est en caractéristique normale, alors le théorème reste vrai en prenant  $c = \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))$  (voir 5.5.10).
- (3) Soit  $\mathcal{H}$  un anneau commutatif contenant  $\mathcal{H}^\Sigma$  et agissant sur  $S_{K,J,\rho,L}$  et  $S_{B,J,\rho,L}$  de manière compatible aux structures entières et aux opérateurs  $U_1$  et  $U_2$  définis en 5.3.4. Dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer le caractère  $\psi$  par un caractère de  $\mathcal{H}$  tel que le sous-espace propre généralisé  $S_{K,J,\rho,L}(\psi)$  (cf. 2.4) est non nul. On obtient ainsi des formes nouvelles sur lesquelles on connaît l'action modulo  $\mu^c$  de l'algèbre  $\mathcal{H}$  tout entière. Cette précision peut être utile dans les applications, en particulier si on prend pour  $\mathcal{H}$  le produit tensoriel de  $\mathcal{H}^\Sigma$ , avec un ou plusieurs anneaux  $\mathcal{Z}_v$ ,  $v \in \Sigma$ , où  $\mathcal{Z}_v$  est le centre de l'algèbre de Hecke du type  $(K_v, J_v)$  (voir 5.5.11).
- (4) On peut vraisemblablement étendre le théorème à toutes les places  $\mu$  de  $L$  à condition de prendre pour  $c$  le plus petit entier plus grand que  $\text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))/2 - n_\mu$ , où  $n_\mu$  est un entier dépendant de  $\mu \in S$  (et de  $(K, J, \rho)$ ) mais pas de  $v_0$ . Les détails sont laissés au lecteur intéressé.

Le reste de cette partie est consacrée à la preuve du théorème précédent. On prend pour  $S$  la réunion de  $S_1$  de lemme 5.1.7 et de l'ensemble  $S_5$  lemme 5.3.2. La conclusion de ces lemmes s'applique donc et en particulier, pour  $U = K$ ,  $K'$  ou  $B$ , les modules  $S_{U,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  sont munis de produit hermitiens non dégénérés et sont des réseaux dans  $S_{U,J,\rho,L_{\mu_0}}$ .

Notons que puisque le caractère  $\psi$  n'est pas eisensteinien,  $\psi(T_v) \neq q(q^3 + 1)$ .

### 5.5.3. Notations. On pose

$$\begin{aligned} m &:= \text{val}_\mu(\lambda + (q^3 + 1)), \\ n &:= \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1)) \\ d &:= \dim_L S_{K,J,\rho,L}(\psi) \end{aligned}$$

On note  $\mu_0$  la trace de  $\mu$  sur  $L_0 = L \cap \mathbb{R}$  et  $\mathcal{O}_{\mu_0}$  le complété de  $\mathcal{O}_L$  en  $\mu_0$ , et on pose

$$M_0 := (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)^2) \subset O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$$

et

$$M := (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)^2) = M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu \subset O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}.$$

Par la définition 5.3.6, on a  $M_0^{\text{sat}} = O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)$  et  $M^{\text{sat}} = O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi) = M_0^{\text{sat}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu$ .

Comme en (4.3), on note  $M_0^{\bar{*}}$  (resp.  $(M_0^{\text{sat}})^{\bar{*}}$ ) l'ensemble des formes  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -antilinéaires sur  $M_0$  (resp.  $M_0^{\text{sat}}$ ) et  $p_{M_0}: M_0 \rightarrow M_0^{\bar{*}}$  (resp.  $p_{M_0^{\text{sat}}}$ ) la restriction du produit hermitien de  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$  à  $M_0$  (resp.  $M_0^{\text{sat}}$ ).

**Lemme 5.5.4.**

(i) Si  $\lambda \neq q(q^3 + 1), -(q^3 + 1)$ , alors le morphisme de  $L$ -espaces vectoriels  $U_1 \oplus U_2 : S_{K,J,\rho,L}(\psi)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{B,J,\rho,L}$  est injectif. En d'autres termes, les  $\mathcal{O}_\mu$ -réseaux  $M$  et  $M^{\text{sat}}$  de  $\mathcal{O}_{K,J,\rho,L_\mu}(\eta)$  sont de rang  $2d$ .

(ii) Si  $\lambda = -(q^3 + 1)$ , alors l'image de  $U_1 \oplus U_2 : S_{K,J,\rho,L}(\psi)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{B,J,\rho,L}$  est celle du morphisme injectif  $U_1$  et les deux réseaux  $M$  et  $M^{\text{sat}}$  de rang  $d$  sont égaux.

*Démonstration* — Soient  $(f_1, f_2) \in \text{Ker}(U_1 \oplus U_2) \cap S_{K,J,\rho,L}(\psi)$  et  $u \in V_L \otimes W_L$ . Alors  $f_1(u)$  et  $f_2(u)$  appartiennent à  $\mathcal{C}(X, L)$  et vérifient  $U_1 f_1(u) + U_2 f_2(u) = 0$  et  $T f_i(u) = \lambda f_i(u)$  pour  $i = 1, 2$ .

Dans le cas (i), le lemme 3.5.3 (iv), appliqué à  $R = L$ , implique que  $f_1(u)$  et  $f_2(u)$  sont nulles. Comme ceci vaut pour tout  $u \in V_L \otimes W_L$ , c'est que  $f_1$  et  $f_2$  sont nulles d'où la première partie du lemme.

Dans le cas (ii), alors le lemme 3.5.3, (i), implique l'égalité  $U' U f_i(u) = 0$  pour  $i = 1, 2$ . Par l'assertion (ii) du même lemme, et puisque le produit hermitien sur  $S_{K',J,\rho,L}$  est défini positif, on a donc  $U f_1(u) = U f_2(u) = 0$ . Enfin, l'assertion (iii) montre que  $f_1(u) = f_2(u)$ , ce qui prouve que  $M$  est l'image de  $U_1$ . Comme le lemme 3.5.3, (v), montre que  $U_1$  est injectif sur  $S_{K,J,\rho,R}$  pour toute  $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre  $R$ , le lemme 4.1.1 donne enfin l'égalité  $M = M^{\text{sat}}$ .  $\square$

La généralisation naïve du lemme d'Ihara serait l'assertion que  $M = M^{\text{sat}}$ . Nous ne pensons pas que celle-ci soit vrai dans ce contexte. Le lemme qui suit est notre version du "lemme d'Ihara".

**Lemme 5.5.5.** Si  $\lambda \neq q(q^3 + 1), -(q^3 + 1)$ , alors  $\text{long}_{\mathcal{O}_\mu}(M^{\text{sat}}/M) \leq dm/2$ .

*Démonstration* — Le lemme 4.1.1 implique que pour tout entier  $\alpha$  assez grand, le  $\mathcal{O}_\mu$ -module  $M^{\text{sat}}/M$  est isomorphe au noyau de  $(U_1 \oplus U_2)|_{S_{K,J,\rho,R}(\psi)^2}$  avec  $R = \mathcal{O}/\mu^\alpha$ . D'après le lemme 3.5.3, (iii), ce module est encore isomorphe à

$$\{f \in S_{K,J,\rho,R}(\psi), (Uf)_i \text{ est constante sur } X' \text{ pour } i = 1, \dots, h'\}$$

En fait, si les  $(Uf)_i$  sont constants sur  $X'$ , alors ils sont nuls. En effet, si  $\beta$  est le plus grand entier  $\leq \alpha$  tel que les  $(Uf)_i$  sont nuls modulo  $\mu^\beta$ , on peut appliquer la proposition 5.4.5 aux  $U(f_i/\mu^\beta)$ , qui montre que ceux-ci sont nuls, puisque  $\psi$  n'est pas eisensteinien, d'où  $\beta = \alpha$ .

On a donc prouvé que le  $\mathcal{O}_\mu$ -module  $M^{\text{sat}}/M$  est isomorphe à  $\text{Ker } U|_{S_{K,J,\rho,R}(\psi)}$ . Or, le lemme 3.5.3, (i) et (ii), implique l'identité  $U^* U = T + (q^3 + 1) = \lambda + (q^3 + 1)$ . Puisque  $\text{val}_\mu(\lambda + (q^3 + 1)) = m$ , on a  $\text{val}_\mu(\det U^* U) = md$ , et le lemme découle du lemme 4.3.2.  $\square$

**Lemme 5.5.6.** (i) Si  $\lambda \neq q(q^3 + 1), -(q^3 + 1)$ , alors

$$\text{long}_{\mathcal{O}_\mu}((M_0^{\bar{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu) = d(m + n).$$

(ii) Si  $\lambda = -(q^3 + 1)$ , alors  $\text{long}_{\mathcal{O}_\mu}((M_0^{\bar{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu) = d \text{val}_\mu(q^3 + 1)$ .

*Démonstration* — (i) Par le lemme 4.1.1,  $\text{long}_{\mathcal{O}_\mu}(M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0))$  est la  $\mu$ -valuation du déterminant de  $p_{M_0}$ . Soit  $e_1, \dots, e_d$  est une base orthonormée de  $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)$ . Par le lemme 5.5.4, la famille  $U_1(e_1), U_2(e_1), \dots, U_1(e_d), U_2(e_d)$  de vecteurs de  $M_0$  en est une base sur laquelle la matrice de  $p_{M_0}$  est, d'après la proposition 3.5.4, la matrice  $(2d, 2d)$  diagonale en des blocs  $(2, 2)$  tous égaux à

$$\begin{pmatrix} q^3 + 1 & \lambda \\ \lambda & q(q^3 + 1) + (q - 1)\lambda \end{pmatrix}.$$

Le point (i) résulte donc du fait que le déterminant de la matrice  $(2, 2)$  ci-dessus a pour  $\mu$ -valuation  $n + m$  (voir la remarque suivant la proposition 3.5.4).

Pour prouver (ii), remarquons que, par le lemme 5.5.4 et la proposition 3.5.4, la matrice de  $p_{M_0}$  est  $q^3 + 1$  fois la matrice identité de dimension  $d$ .  $\square$

**Proposition 5.5.7.** *Le module  $(M_0^{\text{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\text{sat}}}(M_0^{\text{sat}})$  contient un sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}_\mu/\mu^c$ .*

*Démonstration* — Notant  $i$  l'injection canonique de  $M_0$  dans  $M_0^{\text{sat}}$ , et  $i^*$  son adjoint pour  $p_{M_0}$  et  $p_{M_0^{\text{sat}}}$ , on a la suite d'injections

$$M_0 \xrightarrow{i} M_0^{\text{sat}} \xrightarrow{p_{M_0^{\text{sat}}}} (M_0^{\text{sat}})^{\overline{*}} \xrightarrow{i^*} M_0^{\overline{*}},$$

dont la composée est  $p_{M_0}$ . Puisque le produit tensoriel (par  $\mathcal{O}_\mu$  sur  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ ) est exact à droite, on a  $(M_0^{\text{sat}}/M_0) \otimes \mathcal{O}_\mu = M^{\text{sat}}/M$ .

Si  $\lambda \neq q(q^3 + 1)$ , les lemmes 5.5.6 (i) et 5.5.5 impliquent

$$\begin{aligned} \text{long}_{\mathcal{O}_\mu} \left( (M_0^{\text{sat}}/p_{M_0^{\text{sat}}}(M_0^{\text{sat}})) \otimes \mathcal{O}_\mu \right) &= \text{long}_{\mathcal{O}_\mu} \left( (M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes \mathcal{O}_\mu \right) - 2 \text{long}_{\mathcal{O}_\mu} (M^{\text{sat}}/M) \\ &\geq d(n + m) - 2(dm/2) \\ &= dn. \end{aligned}$$

Comme  $(M_0^{\text{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\text{sat}}}(M_0^{\text{sat}})$  est engendré par  $2d$  éléments comme  $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -module, la proposition en découle.

Si  $\lambda = -(q^3 + 1)$ , alors le lemme 5.5.4 montre que  $(M_0^{\text{sat}}/M_0) \otimes \mathcal{O}_\mu = 0$ , et la proposition découle donc du lemme 5.5.6 (ii) et du fait que  $(M_0^{\text{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\text{sat}}}(M_0^{\text{sat}})$  est engendré par  $d$  éléments.  $\square$

**Lemme 5.5.8.** *On a la décomposition orthogonale :*

$$O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} = \bigoplus_{\eta} O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\eta)$$

*Démonstration* — L'inclusion  $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \supset \bigoplus_{\eta} O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\eta)$  et l'orthogonalité proviennent de la décomposition du paragraphe 5.1.6 et du lemme 5.3.5. Le lemme 5.1.7 montre de plus que les caractères  $\eta$  qui interviennent sont deux-à-deux distincts modulo toutes les places divisant  $\mu_0$ . Le lemme de Nakayama permet alors d'en déduire l'autre inclusion.  $\square$

5.5.9. *Preuve du théorème 5.5.1.* Posons  $A = S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi) = M_0^{\text{sat}}$  et  $B = N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ . Par le lemme 5.5.8, on a

$$(A \oplus B)^\perp \oplus A = \mathcal{O}_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.3.1 aux sous- $\mathcal{O}_{\mu_0}$ -modules  $A$  et  $B$  de  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ , dont on déduit que  $(A \oplus B)^{\text{sat}}/A \oplus B$  est isomorphe à  $A^{\overline{\cdot}}/p_A(A)$ . Or, par la proposition 5.5.7,  $A^{\overline{\cdot}}/p_A(A) \otimes \mathcal{O}_{\mu_0}$  contient un sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}_\mu/\mu^c$ . Le lemme 4.2.2 appliqué aux sous- $\mathcal{O}_\mu$ -modules  $A \otimes \mathcal{O}_\mu$  et  $B \otimes \mathcal{O}_\mu$  de  $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$  achève la preuve.

5.5.10. *Preuve de la remarque 5.5.2 (2).* Si  $q^3+1$  n'est pas nul modulo  $\mu$ , prouvons qu'on peut prendre  $c = n$ . On peut supposer  $n \geq 1$ , auquel cas  $\lambda \equiv q(q^3+1) \not\equiv -(q^3+1) \pmod{\mu}$ . La formule (2) dans la preuve du lemme 3.5.3 (iv) montre alors que le noyau de l'opérateur  $U_1 \oplus U_2$  avec  $R = \mathcal{O}_\mu/\mu$  est constitué de fonctions constantes, et est donc nul puisque  $\eta_{\text{const}} \not\equiv \psi$ . Par le lemme 5.5.6, on en déduit l'égalité  $M = (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)^2) = M^{\text{sat}}$ , c'est-à-dire  $M_0^{\text{sat}} \otimes \mathcal{O}_\mu = M_0 \otimes \mathcal{O}_\mu$ .

Par ailleurs, la preuve du lemme 5.5.6 (i) montre que la matrice du produit hermitien  $p_{M_0}$  sur  $M_0$  dans une base adéquate est diagonale par blocs (2,2) tous égaux à

$$\begin{pmatrix} q^3+1 & \lambda \\ \lambda & q(q^3+1) + (q-1)\lambda \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice (2,2) a un déterminant de  $\mu$ -valuation  $m+n = n$  et un premier mineur inversible dans  $\mathcal{O}_\mu$ , ses diviseur élémentaires sur  $\mathcal{O}_\mu$  sont les idéaux  $\mathcal{O}_\mu$  et  $\mu^n$ . On en déduit que  $(M_0)^{\overline{\cdot}}/p_{M_0}(M_0)$  contient un sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}_\mu/\mu^n$ , et qu'il en va de même de  $(M_0^{\text{sat}})^{\overline{\cdot}}/p_{M_0^{\text{sat}}}(M_0^{\text{sat}})$ . On conclut comme en 5.5.9.

5.5.11. *Preuve de la remarque 5.5.2 (3).* Dans ce cas, la décomposition de  $S_{K,J,\rho,L}$  en sous-espaces propres généralisées pour  $\mathcal{H}$  donnée par 2.4 est plus fine que celle de 5.1.6 (notons que cette fois, la notion de sous-espaces propres généralisés est nécessaire, car l'action de  $\mathcal{H}$  n'est pas semi-simple *a priori*) et les énoncés 5.5.4 à 5.5.7 restent donc valables. Suivant le lemme 5.1.7, si l'on définit  $S$  de sorte que pour toute place  $\mu$  ne divisant aucun élément de  $S$ , les caractères  $\eta$  de  $\mathcal{H}$  intervenant dans cette décomposition sont distincts modulo  $\mu$ , alors la preuve du lemme 5.5.8 fonctionne sans changement.

## 6. REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

La représentation unitaire  $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$  de  $G(\mathbb{A}_F)$  est somme directe orthogonale de représentations unitaires irréductibles

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)) \simeq \bigoplus m(\pi)\pi$$

et les représentations  $\pi$  qui apparaissent dans cette somme avec une multiplicité  $m(\pi) \geq 1$  sont appelés les *représentations automorphes* de  $G$ . À cette décomposition correspond une décomposition (cf. 5.1.2)

$$\mathcal{B} = \bigoplus m(\pi)\pi_{\text{lisse}},$$

où  $\pi_{\text{lisse}}$  désigne l'ensemble (dense) des vecteurs lisses de  $\pi$ .

### 6.1. Preuve du corollaire 2.

6.1.1. *Des représentations aux formes propres.* Soient  $K, (J, V), (\rho, W)$  comme en 5.1.1 et soit  $\pi$  une représentation automorphe telle que  $\pi_\infty \simeq \rho$  et  $\text{Hom}_K(J, \pi) \neq 0$ . Alors  $\text{Hom}_{K \times G(\mathbb{A}_F, \infty)}(J \otimes \rho, \pi) = S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}$  (en effet, pour tout  $f \in \text{Hom}_{K \times G(\mathbb{A}_F, \infty)}(J \otimes \rho, \pi)$ ,  $(v, w) \in V \times W$ ,  $f(v \otimes w)$  appartient à  $\pi_{\text{lisse}}$ , donc à  $\mathcal{B}$ ). De plus, si  $\eta$  désigne le caractère donnant l'action de  $\mathcal{H}^\Sigma$  sur  $\pi^{\prod_{v \notin \Sigma} K_v}$ , alors  $\text{Hom}_{K \times G(\mathbb{A}_F, \infty)}(J \otimes \rho, \pi) \subset S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}(\eta)$ .

6.1.2. *Des formes nouvelles propres aux représentations.* Soient de plus  $v_0$  et  $B$  comme en 5.3,  $\Sigma'$  un ensemble fini de places de  $F$  contenant  $\Sigma$  et  $\eta$  un caractère de  $\mathcal{H}^{\Sigma'}$ . Si  $N_{B, J, \rho, \mathbb{C}}(\eta)$  est non nul, alors on peut construire une représentation automorphe  $\pi'$  telle que  $\pi'^\infty \simeq \rho$  et  $\text{Hom}_K(J, \pi') \neq 0$ , telle que l'action de  $\mathcal{H}^{\Sigma'}$  sur  $\pi^{\prod_{v \notin \Sigma'} K_v}$  soit donnée par  $\eta$ , et vérifiant de plus  $\pi'^B \neq 0$  et  $\pi'^K = 0$ .

Soit en effet  $0 \neq f \in N_{B, J, \rho, \mathbb{C}}(\eta)$ , soit  $(v, w) \in V \times W$  tel que  $f(v \otimes w) \neq 0$  et soit  $\pi$  la représentation unitaire engendré par  $f(v \otimes w)$  dans  $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F))$ . Alors  $\pi$  a une décomposition finie orthogonale (avec éventuellement des multiplicités)  $\pi = \bigoplus_{i=1}^l \pi_i$  à laquelle correspond une décomposition  $f(v \otimes w) = \sum_{i=1}^l f_i$ , avec  $f_i \in \pi_i^B$  pour  $i = 1, \dots, l$ . Comme  $f \in N_{B, J, \rho, \mathbb{C}}$ , il existe un indice  $j$ ,  $1 \leq j \leq l$ , tel que  $f_j$  n'appartienne pas à l'image de  $U_1 \oplus U_2$  (cf. §3.4 et définition 5.3.6). Comme  $\pi_j$  est irréductible, la proposition 3.6.2 implique que  $\pi_j^K = 0$ . Les autres assertions sont claires.

6.1.3. *Preuve du corollaire 2.* Soient  $\pi, v_0$  et  $\mu$  vérifiant les hypothèses du corollaire 2,  $\pi$  étant telle que  $\pi_\infty \simeq \rho$  et  $\text{Hom}_K(J, \pi) \neq 0$ . Si  $\eta$  désigne le caractère de  $\mathcal{H}^\Sigma$  attaché à  $\pi$ , alors  $S_{K, J, \rho, \mathbb{C}}(\eta) \neq 0$  par 6.1.1. Si l'on suppose que  $\eta(T_{v_0}) \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu}$ , alors le théorème 1, et le lemme de Deligne-Serre, donnent l'existence d'un caractère  $\eta'$  de  $\mathcal{H}^{\Sigma\mu}$  congru à  $\eta$  modulo  $\mu$  et d'une forme  $0 \neq g \in N_{B, J, \rho, L}(\eta')$  propre pour  $\eta'$ . La construction 6.1.2 permet de conclure à l'existence de  $\pi'$ .

En complément du corollaire, on obtient :

**Proposition 6.1.4.** *Gardons les notations du corollaire 2. Alors  $\pi'_{v_0}$  est isomorphe soit à  $\pi^2$ , soit à St. Enfin, si  $\text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1)) > 2\text{val}_\mu((q + 1)(q^3 + 1))$ , on peut supposer que  $\pi'_{v_0}$  est la représentation de Steinberg.*

*Démonstration* — La première assertion résulte immédiatement de 3.6.6. Pour la seconde, sous les notations du théorème 1, notons  $\mathfrak{I}_{\mathcal{O}_\mu}$  (resp.  $\mathfrak{I}_{L_\mu}$ ) l'image de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma\mu_0}$  dans  $\text{End}_{\mathcal{O}_\mu}(N_{B, J, \rho, \mathcal{O}_\mu})$  (resp.  $\text{End}_{L_\mu}(N_{B, J, \rho, L_\mu})$ ). L'algèbre  $\mathfrak{I}_{\mathcal{O}_\mu}$  est finie et plate sur  $\mathcal{O}_\mu$ , et est un  $\mathcal{O}_\mu$ -réseau de  $\mathfrak{I}_{L_\mu}$ , qui est une algèbre semi-simple de dimension finie sur  $L_\mu$ , donc un produit de corps. Quitte à grossir  $L_\mu$ , on peut supposer que  $\mathfrak{I}_{L_\mu} = L_\mu^a$  pour  $a$  un entier. Chacune des  $a$  projections  $\mathfrak{I}_{L_\mu} \rightarrow L_\mu$  détermine un caractère  $\eta_i$  de  $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \Sigma\mu_0}$  apparaissant dans  $N_{B, J, \rho, L_\mu}$  et donc tel que  $\eta_i(T_{v_0})$  vaut soit  $q(q^3 + 1)$ , soit  $-(q^3 + 1)$ .

Supposons que l'on ait  $\eta_i(T_{v_0}) = -(q^3 + 1)$  pour tout  $i = 1, \dots, a$ . Alors l'image de  $T_{v_0}$  dans  $\mathfrak{I}_{L_\mu}$  est égal au scalaire  $-(q^3 + 1)$ , et donc l'on a  $T_{v_0} = -(q^3 + 1)$  dans  $\mathfrak{I}_{\mathcal{O}_\mu}$ . Le théorème 1 permet de définir un caractère  $\mathfrak{I}_{\mathcal{O}_\mu} \rightarrow \mathcal{O}_\mu/\mu^c$  (avec  $c \geq \text{val}_\mu(\lambda - q(q^3 + 1))/2$ , d'où par l'hypothèse  $c > \text{val}_\mu((q + 1)(q^3 + 1))$ ) qui envoie  $T_{v_0}$  sur  $q(q^3 + 1)$ . On a donc  $q(q^3 + 1) \equiv -(q^3 + 1) \pmod{\mu^c}$ , ce qui contredit l'inégalité sur  $c$  ci-dessus.

L'un des  $\eta_i(T_{v_0})$  vaut donc  $q(q^3 + 1)$ . Cet  $\eta_i$  définit comme en 6.1.2 une représentation automorphe  $\pi'$  vérifiant de plus  $\pi'_{v_0} = \text{St}$ .  $\square$

6.2. **Un lemme de théorie des représentations.** Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant, que nous utilisons dans la preuve du théorème 3 (§6.3).

6.2.1. *Notations.* Soit  $E \subset \mathbb{C}$  un corps de nombres stable sous la conjugaison complexe et  $\mu$  une place de  $L$ . Soit  $\tau$  une représentation continue semi-simple de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$  de dimension  $d$  sur  $L_\mu$ . Si  $\Lambda$  désigne un  $\mathcal{O}_\mu$ -réseau stable, on note  $\tau_\Lambda$  la représentation sur  $\mathcal{O}_\mu$  d'espace  $\Lambda$  induite par  $\tau$ .

**Proposition 6.2.2.** *Si  $\tau$  est telle que  $\tau^c \simeq \tau^*$ , et de dimension 3, alors elle admet un réseau stable  $\Lambda$  tel que  $\tau_\Lambda^c \simeq \tau_\Lambda^*$  quitte à remplacer  $L_\mu$  par une extension finie totalement ramifiée.*

6.2.3. La preuve de la proposition 6.2.2 utilise les deux lemmes suivants, pour lesquels nous introduisons quelques notations.

Soient  $\mathcal{X}$  l'immeuble de Bruhat-Tits attaché à  $\text{GL}_d(L_\mu)$ ,  $X$  l'ensemble de ses sommets,  $\mathcal{S}$  la partie de  $\mathcal{X}$  fixe par  $\tau$  et  $S = \mathcal{S} \cap X$ . Rappelons que les points de  $X$  correspondent aux classes d'homothéties  $[\Lambda]$  de  $\mathcal{O}_\mu$ -réseaux  $\Lambda$  dans  $L_\mu^d$ , et que ceux de  $S$  sont les classes  $[\Lambda]$  avec  $\Lambda$  stable sous  $\tau$  ([Bel2, lemme 3.1.2]).

**Lemme 6.2.4.** *Il existe un automorphisme de complexe polysimplicial  $b$  de  $\mathcal{X}$ , qui laisse stable  $\mathcal{S}$ , et tel que, pour tout  $[\Lambda] \in S$ , l'égalité  $b([\Lambda]) = [\Lambda']$  implique*

$$\tau_\Lambda^c \simeq \tau_{\Lambda'}^*.$$

*Démonstration* — Voir [Bel-Che, 7.3.3]. □

**Lemme 6.2.5.** *Si  $\tau$  est irréductible et vérifie  $\tau^c \simeq \tau^*$ , alors il existe un point de  $S$  fixe par  $b$  après une extension des scalaires ramifiée de degré  $\leq 3$ .*

*Démonstration* — Comme  $\tau$  est irréductible, l'ensemble  $S$  est fini d'après [Bel2, prop. 3.2.1 et remarque suivante]. Par [B-T], il existe donc une facette  $F \subset \mathcal{S}$  telle que  $b(F) = F$ . L'isobarycentre  $x$  de  $F$  vérifie  $b(x) = x$  et il est clair qu'après une extension ramifiée de degré  $1 + \dim F$  de  $L_\mu$ , on a  $x \in S$ . □

6.2.6. *Preuve de la proposition 6.2.2.* Si  $\tau$  est irréductible, il suffit de combiner les deux lemmes ci-dessus. Si  $\tau \simeq \tau_1 \oplus \tau_2$ , où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont irréductibles de dimension 1 et 2 respectivement, alors on a  $\tau_i^c \simeq \tau_i^*$  pour  $i = 1, 2$  et on est ramené au cas où  $\tau$  est irréductible. Enfin, si  $\tau$  est somme de trois caractères, alors le réseau engendré par n'importe quelle base diagonalisant  $\tau$  convient.

### 6.3. Preuve du théorème 3.

6.3.1. *Représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes.* Soit  $\pi$  une représentation automorphe pour  $G$ . D'après les travaux de Blasius et Rogawski (cf. [Bla-Rog, th. 1.9.1], et [Bel-Che, partie 3.2] pour le résultat sous la forme donnée ci-dessous), on peut attacher à  $\pi$  un corps de définition  $L$ , et un système compatible  $\rho_\mu : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}(M_\mu)$  de représentations continues de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$  de dimension 3 sur  $L_\mu$ ,  $\mu$  parcourant l'ensemble des places finies de  $L$ , qui vérifient :

*Pour toute place finie  $\mu$  de  $L$  et toute place finie  $v$  de  $F$  non ramifiée dans  $E$  où  $\pi$  est non ramifiée, et toute place  $w$  de  $E$  au-dessus de  $v$ ,  $\rho_\mu$  est non ramifiée en  $w$ , et le polynôme caractéristique de  $\rho_\mu(\text{Frob}_w)$  coïncide avec celui de  $\text{mat}_{\pi,w}$ .*

Fixons dorénavant une place finie  $\mu$  de  $L$ . Compte tenu de la forme des matrices de Hecke (3.6.7 et 3.8), il vient facilement que la représentation  $\rho_\mu$  vérifient

$$\rho_\mu^c \simeq \rho_\mu^*.$$

Appliquant la proposition 6.2.2, et en remplaçant éventuellement  $L_\mu$  par une extension ramifiée de degré  $\leq 3$ , on en déduit qu'il existe un réseau  $\Lambda$  de  $L_\mu^3$ , stable sous  $\rho_\mu$ , tel que la représentation  $\rho_\Lambda$  de dimension 3 sur  $\mathcal{O}_\mu$  d'espace  $\Lambda$  induite par  $\rho_\mu$  vérifie  $\rho_\Lambda^c \simeq \rho_\Lambda^*$ .

6.3.2. (Le lecteur pourra comparer avec [Clo, partie 6].) Choisissons une base de  $\Lambda$ , ce qui nous permet de voir  $\rho_\Lambda$  comme un morphisme  $\text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$  et rappelons que  $\gamma$  est un élément d'ordre 2 de  $\text{Gal}(\bar{E}/F)$  relevant la conjugaison de  $\text{Gal}(E/F)$ , cf. 2.1. Pour toute matrice  $M$  de  $\text{GL}_3(L_\mu)$ , on pose  $M^* := {}^t M^{-1}$ . L'existence d'un isomorphisme  $\rho_\Lambda^c \simeq \rho_\Lambda^*$ , se traduit par celle d'une matrice  $A \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$  telle que pour tout  $g \in \text{Gal}(\bar{E}/E)$

$$(11) \quad \rho_\Lambda(\gamma g \gamma^{-1}) = A \rho_\Lambda(g)^* A^{-1}.$$

Notons  $H$  l'image de  $\rho_\Lambda$ ,  $C$  le groupe à deux éléments  $\{1, c\}$ . La relation (11) permet de faire agir  $C$  sur le sous-groupe  $H$  de  $\text{GL}_3(\mathcal{O}/\mu^n)$  en faisant opérer  $c$  par  $M \mapsto AM^*A^{-1}$ . On définit  $\tilde{H} := H \rtimes C$  comme étant le produit semi-direct attaché à cette action. La relation (11) implique que  $\rho_\Lambda$  se prolonge en un morphisme  $\tilde{\rho}_\Lambda: \text{Gal}(\bar{E}/F) \rightarrow \tilde{H}$  en posant

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_\Lambda(\sigma) & := \rho_\Lambda(\sigma) \rtimes 1, \quad \sigma \in \text{Gal}(\bar{E}/E) \\ \tilde{\rho}_\Lambda(\gamma) & := 1 \rtimes c \end{cases}$$

6.3.3. Soit  $n \geq 1$  un entier. Notons  $H_n$  la réduction de  $H$  modulo  $\mu^n$ , c'est-à-dire l'image de  $H$  par le morphisme  $\text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu) \rightarrow \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n)$ , notons  $\tilde{H}_n$  le produit semi-direct  $H_n \rtimes C$  et  $\tilde{\rho}_n: \text{Gal}(\bar{E}/F) \rightarrow \tilde{H}_n$  le morphisme de groupes induit par  $\tilde{\rho}_\Lambda$ . Soit  $l$  la caractéristique résiduelle de  $\mu$  et  $\omega_{l^n}: \text{Gal}(\bar{E}/F) \rightarrow (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^*$  le caractère cyclotomique. Comme l'élément  $(1 \rtimes c, -1)$  de  $\tilde{H}_n \times \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$  est l'image de  $\gamma$  par  $\tilde{\rho}_n \times \omega_{l^n}$ , le théorème de Čebotarev implique l'existence d'un ensemble de densité analytique strictement positive de places  $v$  de  $F$  telles que  $\tilde{\rho}_n(\text{Frob}_v) = 1 \rtimes c$  et  $\omega_{l^n}(\text{Frob}_v) = -1$ . Or, toute place  $v$  de  $F$  décomposée dans  $E$  vérifie  $\text{Frob}_v \in \text{Gal}(\bar{E}/E)$  soit  $\tilde{\rho}_n(\text{Frob}_v) \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n) \rtimes 1$ , d'où l'existence d'un ensemble de densité analytique strictement positive de places  $v$  de  $F$  inertes dans  $E$  telles que  $\tilde{\rho}_n(\text{Frob}_v) = 1 \rtimes c$  et  $\omega_{l^n}(\text{Frob}_v) = -1$ .

Soit  $v$  une place de cet ensemble et  $q$  le cardinal résiduel de  $F_v$ ; vérifions que  $v$  vérifie la conclusion du théorème 3. D'une part, on a l'égalité  $q + 1 \equiv 0 \pmod{\mu^n}$  puisque  $q = \omega_{l^\infty}(\text{Frob}_v) \equiv -1 \pmod{\mu^n}$ . D'autre part, en notant  $w$  la place de  $E$  au dessus de  $v$ , on a  $\text{Frob}_w = \text{Frob}_v^2$ , d'où l'égalité dans  $\text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n)$

$$\rho_n(\text{Frob}_w) = (\tilde{\rho}_n(\text{Frob}_v))^2 = (1 \rtimes c)^2 = 1 = \begin{pmatrix} q^2 & & \\ & 1 & \\ & & q^{-2} \end{pmatrix},$$

ce qui par 3.7 implique que l'opérateur de Hecke  $T_v$  agit sur  $\pi_v^{K_v}$  par  $q(q^3 + 1) \pmod{\mu^n}$ .

#### 6.4. Applications aux représentations endoscopiques non tempérées.

6.4.1. *Rappels.* Une représentation automorphe pour  $G$  est dite *endoscopique non tempérée* si elle vérifie les propriétés équivalentes suivantes

- (a)  $\pi_v$  est isomorphe à  $\pi^n$  en une place  $v$  inerte dans  $E$ .
- (b)  $\pi_v$  est isomorphe à  $\pi^n$  en presque toute les places  $v$  inertes dans  $E$ .
- (b')  $\pi_v$  est isomorphe à  $\pi^n$  en presque toute les places  $v$  inertes où  $\pi$  est non ramifiée.
- (c) Il existe deux caractères de Hecke  $\chi$  et  $\phi$  de  $E$ , vérifiant  $\chi^c = \chi^{-1}$  et  $\phi^c = \phi^{-1}$ , tels que pour toute place  $w$  de  $E$  la matrice de Hecke  $\text{mat}_w(\pi)$  soit

$$\text{diag}(\chi(\varpi_w)\phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{1/2}, \phi(\varpi_w), \chi(\varpi_w)\phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{-1/2}),$$

où  $\varpi_w$  désigne une uniformisante de  $E_w$ .

- (d)  $\pi$  est non tempérée en presque toute place et est de dimension infinie.

L'équivalence entre (a) et (b) résulte de [Rog3, th. 13.3.6 (c)], l'équivalence entre (b) et (c) de [Rog2, pages 395-398] ; que (c) implique (d) est clair, car les matrices de Hecke des représentations 1-dimensionnelles sont de la forme

$$\text{diag}(\phi(\varpi_w)|\varpi_w|, \phi(\varpi_w), \phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{-1})$$

et (d) implique (c) résulte de la classification des  $A$ -paquets de  $G$  rappelée en [Rog1, 2.9], de la construction de la représentation galoisienne associée et des conjectures de Weil, prouvées par Deligne.

On conjecture en général que les représentations automorphes qui sont tempérées en presque toute place le sont partout. Pour  $G = \text{U}(3)$ , nous montrerons cet énoncé à l'aide du théorème 1 dans un prochain travail. Pour éviter de recourir à ce résultat, convenons par abus d'appeler *tempérées* les représentations automorphes qui le sont en presque toute place.

**Théorème 6.4.2.** *Soit  $\pi$  une représentation automorphe non tempérée et  $L$  un corps de définition pour  $\pi$ . Pour presque toute place  $\mu$  de  $L$  il existe une représentation automorphe tempérée  $\pi'$  telle que  $\pi' \equiv \pi \pmod{\mu}$ .*

*Démonstration* — Pour presque toute place  $\mu$  de  $L$ , le corollaire 2 et le théorème 3 montrent l'existence d'une représentation  $\pi'$ , d'une place inerte  $v_0$  où  $\pi$  est non ramifiée telles que  $(\pi'_{v_0})^{B_{v_0}} \neq 0$  et  $(\pi'_{v_0})^{K_{v_0}} = 0$  vérifiant  $\pi' \equiv \pi \pmod{\mu}$ . Montrons qu'on peut imposer que  $\pi'$  soit tempérée.

En la place  $v_0$ , 3.6.6 implique que l'on a  $\pi'_{v_0} \simeq \pi^2$  ou  $\text{St}$ . Ceci exclut que  $\pi$  soit 1-dimensionnel, car ni  $\pi^2$  ni  $\text{St}$  ne sont des caractères, et aussi que  $\pi$  soit endoscopique non tempérée, car une telle représentation est supercuspidale en toutes places où elle est ramifiée (d'après [Rog3, théorème 13.3.6 (c) et prop. 13.1.3 (d)]), tandis que  $\pi^2$  est de carré intégrable mais n'est pas supercuspidale puisqu'elle est apparaît dans une induite parabolique.  $\square$

Joël Bellaïche (jbellaic@math.columbia.edu)

MC 441, Columbia University, 2990 Broadway, 10027 New York, NY, USA

Phillipe Graftieaux (graftiea@math.unice.fr)

Laboratoire J.-A. Dieudonné, Université de Nice - Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France

#### RÉFÉRENCES

- [Bel1] **J. Bellaïche**, *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*, Thèse de l'université Paris 11 (2002).

Disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/theses-orsay/2002/2395.html>

- [Bel2] **J. Bellaïche**, *À propos d'un lemme de Ribet*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 109 (2003), pages 45-62]
- [Bel-Che] **J. Bellaïche et G. Chenevier**, *Formes non tempérées pour  $U(3)$  et conjectures de Bloch-Kato*, Annales de l'ENS, **37/4**, juillet 2004, pp. 611-662.
- [Ber] **J. N. Bernstein**, *Le "centre" de Bernstein*, in *Representations of reductive groups over a local field*, Hermann, 1-32 (1984).
- [Bla-Rog] **D. Blasius et J. Rogawski**, *Tate class and arithmetic quotient of the two-ball*, in [ZFPMS] 421-443.
- [Bor] **A. Borel**, *Some finiteness properties of adèle groups over number fields*, Publ. Math. IHES **16**, 5-30 (1963).
- [Bor2] **A. Borel** *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35**, 233-259 (1976).
- [B-T] **F. Bruhat et J. Tits**, *Groupes réductifs sur un corps local*, Publ. Math. IHES **41** (1972).
- [Car] **P. Cartier**, *Representations of  $\mathfrak{P}$ -adic Groups*, in [Corvallis], 111-155.
- [Cho] **F. Choucroun**, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **58** (1994).
- [Clo] **L. Clozel**, *On Ribet's Level-raising Theorem for  $U(3)$* , Amer. J. Math. **122**, 1265-1287 (2000).
- [Corvallis] **Edited by A. Borel and W. Casselman**, *Automorphic forms, representations, and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math **33**, Vol. 1 (1977).
- [Del1] **P. Deligne**, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$* , in *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Math. **349**, 501-597 (1973).
- [D-S] **P. Deligne et J.-P. Serre**, *Formes modulaires de poids 1.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507-530 (1975).
- [Key] **D. Keys**, *Principal series representations of special unitary groups over local fields*, Compositio Math. **51**(1), 115-130 (1984).
- [H-T] **M. Harris & R. Taylor**, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies **151**, Princeton University Press (2001).
- [Laz] **X. Lazarus**, *Module universel non ramifié pour un groupe réductif  $p$ -adique*, Thèse de l'université Paris 11 (2000), non publiée.
- [P-R] **V. Platonov & A. Rapinchuk**, *Algebraic groups and number theory*. Pure and Applied Mathematics, 139. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
- [Rog1] **J. Rogawski**, *Analytic expression for the number of points mod  $p$* , in [ZFPMS], 65-109.
- [Rog2] **J. Rogawski**, *The multiplicity formula for  $A$ -packets*, in [ZFPMS], 395-419.
- [Rog3] **J. Rogawski**, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of math. studies **123**, Princeton University Press (1990).
- [Ser] **J.-P. Serre** *Two letters on quaternions and modular forms (mod  $p$ )*. Israel J. Math. **95** (1996), 281-299.
- [Tay] **R. Taylor** , *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **98**, 265-280 (1989).
- [Tay2] **R. Taylor** , *Galois representations*, À paraître aux annales de la faculté des sciences de Toulouse, Disponible sur le site <http://abel.math.harvard.edu/~rtaylor/>
- [Tit] **J. Tits**, *Reductive Groups over Local Fields*, in [Corvallis], 29-69.
- [ZFPMS] **Edited by R. Langlands and D. Ramakhrisnan**, *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Publications C.R.M., Montréal (1992).