Chapter 1

Functions of matrices

1.1 2×2 matrices with distinct eigenvalues

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /5$$

then

$$\begin{aligned} A &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5 \\ A^n &= (-1)^n \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + 4^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5 \\ e^{At} &= e^{-t} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + e^{4t} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5 \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /4 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /4 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /5 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} /5 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /3 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} /3 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /4 \\
&= -2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} /4 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \\
&= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5 \\
&= -4 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /7 \\
&= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} /7 + 4 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} /3 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} /3 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} /3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /5 \\
&= -4 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} /5 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} /7 \\
&= -3 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} /7 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} /7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /2 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} /2 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /2
\end{aligned}$$

1.2 2×2 singular matrices

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3$$

then

$$\begin{aligned} A &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \\ A^n &= 0^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + 3^n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \\ e^{At} &= e^{0t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + e^{3t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have nonzero integer entries, are singular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} /3 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} /4 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} /5 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /2 \\
&= 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} /2 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /4 \\
&= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /4 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} /4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5 \\
&= 0 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} /5 + 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} /5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 0 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3 \\
&= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} /3 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} /3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} /3 \\
&= -3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} /3 + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 0 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.3 2 × 2 symmetric matrices

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

then

$$\begin{aligned} A &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \\ A^n &= 1^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 3^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \\ e^{At} &= e^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \end{aligned}$$

The following 2 × 2 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}/5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}/5 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}/5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}/5 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}/5$$
$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}/5 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}/5$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 - 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}/5$$
$$= -3 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}/5 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}/5$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$
$$= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}/2 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}/2$$

1.4 2×2 matrices with a repeated eigenvalue

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

then

$$\begin{aligned} A &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^n &= 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n\, 2^{n-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{At} &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\, e^{2t} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have entries in $[-4, 4]$, and have a repeated integer eigenvalue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} /4 \\
&= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} /4 \\
&= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /3 \\
&= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /2 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} /3 \\
&= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} /4 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} /2 \\
&= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} /4 \\
&= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.5 3 × 3 matrices with distinct eigenvalues

The following 3 × 3 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} /16$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & 8 & -8 \\ -8 & -4 & 4 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 6 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} /16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} /12$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -4 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -5 & -5 & 5 \\ 9 & -3 & 21 \end{bmatrix} /30$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 6 & -12 & -6 \\ -10 & 20 & 10 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & 15 & -15 \\ 10 & 10 & -10 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 21 \end{bmatrix} /30$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} /12$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 5 \\ 9 & 21 & -3 \end{bmatrix} /30$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 6 & -6 & -12 \\ -4 & 4 & 8 \\ -10 & 10 & 20 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 15 \\ -5 & 5 & -5 \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 21 & -3 \\ 9 & 21 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /30$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} /8 - 1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & -4 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} /16$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & -4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} /16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -8 & 4 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ -8 & 0 & 8 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 8 & 16 & -8 \\ -4 & -8 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -5 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} /16$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -12 & 4 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} /12$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & -12 & 4 \\ 4 & 12 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 12 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12$$

1.6 3 × 3 singular matrices

The following 3 × 3 matrices have nonzero integer entries, are singular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} /12$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} /12$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} /12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \\ -12 & 0 & 12 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -15 & 15 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -12 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -15 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -5 & 15 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /12$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \end{bmatrix} /12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} /12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} /12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 \\ 5 & -15 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 12 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 \\ 5 & -15 & 5 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} /15$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} /15 + 0 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} /15 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} /15$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -8 \\ 8 & -12 & 8 \end{bmatrix} /20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 5 \end{bmatrix} /20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} /20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /12$$

$$= 0 \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} /12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} /12$$

1.7 3 × 3 symmetric matrices

The following 3 × 3 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are symmetric:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6$$

$$= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6$$