ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 94, № 2
февраль, 1993

©1993г.В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер

ВЕКТОРНЫЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ БЕЙКЕРА–АХИЕЗЕРА

Обсуждаются функциональные уравнения, естественно возникающие в различных проблемах современной математической физики.

Введены понятия N-мерной теоремы сложения для функций скалярного аргумента и уравнения Коши ранга N для функции g-мерного аргумента, обобщающие классическое функциональное уравнение Коши.

Доказано, что при $N = 2$ общее аналитическое решение этих уравнений задается функцией Бейкера–Ахиезера алгебраической кривой рода 2.

Показано также, что θ-функции дают решения уравнения Коши ранга N для функций g-мерного аргумента, где $N \leq 2^g$ в случае общего g-мерного абелева многообразия и $N \leq g$ в случае якобиева многообразия алгебраической кривой рода g.

Выдвинута гипотеза, что функциональное уравнение Коши ранга g для функции g-мерного аргумента является характеристическим для θ-функций якобиева многообразия алгебраической кривой рода g, т.е. решает проблему Римана–Шоттки.

Посвящается памяти М.К.Поливанова

1.ВВЕДЕНИЕ

Классическое функциональное уравнение Коши [1]

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y), \tag{1.1}$$

возникающее в бесчисленном множестве задач, полностью характеризует экспоненту

$$\psi(x) = \exp(kx), \tag{1.2}$$

где k – параметр. Уравнение (1.1) является одним из примеров так называемых теорем сложения

$$F(f(x), f(y), f(x+y)) = 0. \tag{1.3}$$

Число подобных примеров невелико. Так, согласно теореме Вейерштрасса, если F – полином от трех переменных, то в классе аналитических функций $f(x)$ теоремой сложения обладают лишь эллиптические функции (т.е.

функции, связанные с алгебраическими кривыми рода $g = 1$) и их вырождения.

Векторной теоремой сложения будем называть уравнение вида

$$F(f(x), \phi(y), \psi(x+y)) = 0, \tag{1.4}$$

где $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_N(x)\big)$, $\phi(y) = \big(\phi_1(y), \ldots, \phi_N(y)\big)$, $\psi(z) = \big(\psi_1(z), \ldots, \psi_N(z)\big)$ – вектор-функции, а F – функция $3N$ переменных.

Следует отметить, что варианты таких теорем можно найти уже в классической работе Абеля [2], в которой рассматривается следующая проблема:

Определить три функции ϕ, f и ψ, удовлетворяющие уравнению:

$$\psi(\alpha(x,y)) = F\big(x, y, \phi(x), \phi'(x), \ldots, f(y), f'(y), \ldots\big), \tag{1.5}$$

где α и F – данные функции от соответствующего числа переменных. В частности, в [2] эта проблема решена для уравнения

$$\psi(x+y) = \phi(x)f'(y) + f(y)\phi'(x). \tag{1.6}$$

Важные для современных приложений векторные теоремы сложения содержатся в работе Фробениуса и Штикельбергера [3], где, например, показано, что дзета-функция Вейерштрасса удовлетворяет функциональному уравнению

$$\big(\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(z)\big)^2 + \zeta'(x) + \zeta'(y) + \zeta'(z) = 0, \tag{1.7}$$

где $x + y + z = 0$.

Основной целью настоящей работы является доказательство векторных теорем сложения, характеризующих так называемые функции Бейкера–Ахиезера, которые задаются на алгебраических кривых произвольного рода. Частные случаи таких функций были введены в конце прошлого века в работах Клебша–Гордана как естественное обобщение понятия экспоненты на случай римановых поверхностей произвольного рода. Бейкером [4] была намечена связь таких функций с задачей классификации коммутирующих обыкновенных линейных дифференциальных операторов [5]. Впоследствии замечательные, но, к сожалению, забытые результаты этих работ были переоткрыты и существенно развиты в рамках теории интегрируемых уравнений типа уравнения Кортевега–де Фриза. Общее определение функций Бейкера–Ахиезера (многоточечных и зависящих от многих переменных) было дано одним из авторов [6, 7]. Отправной точкой работ [6, 7] послужили результаты Новикова, Дубровина, Матвеева, Итса, относящиеся к построению периодических и квазипериодических решений уравнений Кортевега–де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера, уравнения sine-Gordon (обзор этих результатов см. в [8, 9]). Начиная с [6, 7], концепция функций Бейкера-Ахиезера стала основной в теории алгебро-геометрического или конечнозонного интегрирования (дальнейшее развитие которого представлено в обзорах [10, 11, 12, 13]).

Как будет показано в третьем разделе настоящей работы, функции Бейкера–Ахиезера удовлетворяют функциональному уравнению, являющемуся "векторным аналогом" уравнения Коши (1.1). Прежде чем привести его, преобразуем уравнение (1.1).

Уравнение Коши является "жестким". Класс функций, определяемых им, практически не меняется,если ослабить (1.1) и рассмотреть уравнение

$$\phi(x+y) = \psi(x)\psi(y). \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует, что

$$\psi(x) = \exp\big(k(x+x_0)\big), \phi(x) = \exp\big(k(x+2x_0)\big). \tag{1.9}$$

Обозначая функцию $\phi^{-1}(x)$ через $c(x)$, уравнение (1.8) можно представить в виде

$$c(x+y)\psi(x)\psi(y) = 1. \tag{1.10}$$

Векторным аналогом уравнения (1.1) будем называть функциональное уравнение

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(x+y)\psi_k(x)\psi_k(y) = 1 \tag{1.11}$$

на вектор-функции $c(x) = \big(c_0(x), \ldots, c_N(x)\big)$, $\psi(x) = \big(\psi_0(x), \ldots, \psi_N(x)\big)$.

Замечание. Обратим внимание на то, что, хотя формально в уравнении (1.11) искомыми являются все функции c_k, ψ_k, но, как легко видеть, функции c_k явно выражаются через функции ψ_k (см. формулу (3.12)). Поэтому в дальнейшем решением уравнения (1.11) мы будем без ограничения общности называть вектор-функцию $\psi = \big(\psi_1, \ldots, \psi_N\big)$.

Уравнение (1.11) возникло как результат попыток обобщить формулу сложения для функций Бейкера–Ахиезера рода 1. Как было отмечено в [14], частный случай таких функций дает решения уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(x+y) &= \frac{\Phi'(x)\Phi(y) - \Phi(x)\Phi'(y)}{V(x) - V(y)}, \\ \Phi(x)\Phi(-x) &= V(x) + \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Система (1.12) была предложена впервые в работе [15] в связи с задачей построения представления Лакса для уравнений движения системы попарно взаимодействующих частиц с потенциалом попарного взаимодействия, задаваемым функцией $V(x)$. В [15] были найдены частные решения (1.12) для случая $V(x) = \wp(x)$ (где $\wp$ – функция Вейерштрасса). Решения (1.12), предложенные в [14] позволили ввести в представление Лакса "спектральный параметр" и как следствие построить тэта-функциональные формулы для динамики системы Мозера–Калоджеро. Впоследствии в [17] и [27] было доказано, что построенные в [14] решения исчерпывают все решения этого уравнения. Следует отметить, что идея сведения проблемы интегрирования динамических систем к функциональным уравнениям оказалась необычайно плодотворной. Укажем на работы [15–19], в которых эта идея привела к новым результатам как в теории динамических систем, так и в теории функциональных уравнений.

Другой нетрадиционной областью приложения функциональных уравнений является раздел теории алгебраической топологии, связанный с родами Хирцебруха. Выделение классических родов в терминах функциональных уравнений содержится уже в основополагающей работе [20]. В работе [21] функциональное уравнение (1.12) использовалось для предложенного там доказательства свойства "жесткости" эллиптических родов. (Эллиптические роды были введены Ошаниным [22]; гипотеза их "жесткости" и была высказана Виттеном [23] и доказана Таубсом [24, 25].)

В [26] было найдено универсальное решение уравнения Абеля (1.6) и с его помощью построена теория когомологий, отвечающая общему арифметическому роду ([20]). В работе [27] было доказано, что функциональное уравнение (1.12) эквивалентно функциональному уравнению

$$\phi(u+v)=\frac{\phi(u)^2\xi_1(v)-\phi(v)^2\xi_1(u)}{\phi(u)\xi_2(v)-\phi(v)\xi_2(u)}. \tag{1.13}$$

В качестве следствия получены структуры алгебраической двузначной группы на римановой сфере и показано, что пространством модулей таких структур является пространство невырожденных эллиптических кривых с отмеченными точками.

В третьем разделе будет доказано, что функции Бейкера–Ахиезера, отвечающие алгебраическим кривым рода g, дают решения уравнения (1.11) для $N=g$. Явные выражения этих функций через тэта-функции римановых поверхностей [7] (см. раздел 4) показывают, что соответствующие решения уравнения (1.11) с точностью до экспоненциального множителя имеют следующий специальный вид:

$$\psi_k(x)=\frac{\Psi(Ux+A_k)}{\Psi(Ux+A_*)}, \tag{1.14}$$

где $\Psi(z_1,\ldots,z_g)$ – функция векторного аргумента, представляющая собой тэта-функцию алгебраической кривой; $U=(U_1,\ldots,U_g)$, $A_k=(A_{k,1},\ldots,A_{k,g})$ – g-мерные векторы, $k=0,\ \ldots\ ,N$ или $*$.

Это позволяет ввести понятие "функционального уравнения Коши ранга N" как векторной теоремы сложения следующего специального вида.

Определение. Функцию $\Psi(z)$ векторного g-мерного аргумента $z=(z_1,\ldots,z_g)$ назовем решением уравнения Коши ранга N, если существуют

g-мерные векторы U и A_*, A_0, $A_1, \ldots, A_N$ такие, что имеет место уравнение

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(x+y)\Psi(Ux+A_k)\Psi(Uy+A_k) = \Psi(Ux+A_*)\Psi(Uy+A_*). \tag{1.15}$$

Важное замечание-определение. В общем случае одна и та же функция $\Psi(z)$ может быть решением функциональных уравнений Коши разных рангов (за счет специального выбора векторов U, $A_1, \ldots, A_N$). Рангом такой функции $\Psi(z)$ назовем минимальное N_* из возможных рангов N уравнений (1.15), которым она удовлетворяет, $\operatorname{rk}\Psi = N_*$.

В третьем разделе будет доказано, что *все* решения уравнения (1.11) для случая $N = 2$ даются функциями Бейкера-Ахиезера рода 2. Тем самым показано,что векторный аналог уравнения Коши (1.11) для $N = 2$ эквивалентен функциональному уравнению Коши ранга 2.

В связи с этим естественно поставить следующие два вопроса.

1. Эквивалентны ли функциональные уравнения (1.11) и (1.15) для $N > 2$?
2. Всякое ли решение уравнения Коши ранга N задается тэта-функциями римановых поверхностей?

Как показано в заключительном разделе работы, ответ на грубую форму второго вопроса отрицателен. Оказывается, что тэта-функции, отвечающие общему абелеву многообразию размерности g, дают решения функционального уравнения Коши ранга $N = 2^g$.

Следовательно тэта-функции общего g-мерного абелева многообразия задают функции ранга $\leq 2^g$. Вместе с тем результаты разделов 3, 4 показывают, что в случае якобианов кривых ранг соответствующих функций не превосходит g. Это позволяет авторам сформулировать гипотезу:

Тэта-функция имеет ранг, не превосходящий g, тогда и только тогда, когда она построена по матрице b-периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g.

Эту гипотезу можно переформулировать в следующем виде:

Уравнение (1.15) *с $N = g$ для функции g-мерного аргумента является характеристическим для тэта-функций якобиевых многообразий алгебраических кривых, т.е. решает проблему Римана–Шоттки.*

В пользу этой гипотезы говорит отмеченная выше связь теорем сложения с теорией интегрируемых систем и доказательство в [28] того, что гипотеза С.П.Новикова о том, что тэта-функциональные формулы для решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили являются характеристическими для якобиевых многообразий (т.е. решают проблему Римана–Шоттки).

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть Γ – неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченными точками и локальными координатами $k_\alpha^{-1}(Q)$, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, l$. Зафиксируем набор полиномов $q_\alpha(k)$. Как было показано в [6,7], для любого набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности функция $\psi(x, Q)$, которая

1) мероморфна на Γ вне точек P_α и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s (если все они различны);
2) в окрестности точки P_α функция $\psi(x, Q)$ имеет вид

$$\psi(x,Q) = \exp\big(xq_\alpha(k_\alpha)\big)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{s,\alpha}(x)k^{-s}\right), \qquad k_\alpha = k_\alpha(Q). \tag{2.1}$$

Выбрав точку P_0, условимся нормировать ψ равенством

$$\psi(x, P_0) = 1. \tag{2.2}$$

Замечание. Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, Q)$ определяется своими аналитическими свойствами по переменной Q. От переменной x и от коэффициентов полиномов q_α она зависит как от внешних параметров. Мы опускаем в записи ψ указание на зависимость ее от q_α, оставляя лишь существенную для дальнейшего зависимость от x.

В [7] была предложена явная тэта-функциональная формула для ψ. Пусть a_i, b_i – базис циклов на Γ с канонической матрицей пересечений: $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Определим базис голоморфных дифференциалов ω_i на Γ, нормированный условиями

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \tag{2.3}$$

Матрица

$$B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i \tag{2.4}$$

называется матрицей b-периодов кривой Γ. Она симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. Любая такая матрица определяет целую функцию g переменных (называемую тэта-функцией Римана) по формуле

$$\theta(z_1, \ldots, z_g) = \sum_{m \subset Z^g} \exp\big(2\pi i(z, m) + \pi i(Bm, m)\big) \tag{2.5}$$

(здесь $m = \big(m_1, \ldots, m_g\big)$ – целочисленный вектор). Тэта-функция Римана обладает следующими трансляционными свойствами:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z), \qquad \theta(z + B_k) = \theta(z)\exp\big(-\pi i B_{kk} - 2\pi i z_k\big) \tag{2.6}$$

(e_k и B_k – векторы с координатами $\{\delta_{ki}\}$, $\{B_{ki}\}$). Векторы e_k и B_k порождают решетку в C^g, фактор по которой является g-мерным тором $J(\Gamma)$, называемым якобианом кривой Γ. Отображением Абеля называется отображение

$$A\colon \Gamma \to J(\Gamma), \tag{2.7}$$

задаваемое формулой

$$A_k(Q) = \int_{P_0}^{Q} \omega_k. \tag{2.8}$$

Если определить вектор Z

$$Z = K - \sum_{s=1}^{g} A(\gamma_s) \tag{2.9}$$

(где K – вектор римановых констант, зависящих от выбора базисных циклов и начальной точки P_0), то функция $\theta(A(Q)+z)$ имеет ровно g нулей на Γ, совпадающих с точками γ_s,

$$\theta(A(\gamma_s) + Z) = 0. \tag{2.10}$$

Отметим, что сама функция $\theta(A(Q) + Z)$ многозначна на Γ, но, как следует из (2.6), ее нули определены корректно. Введем нормированные дифференциалы $d\Omega_\alpha$ такие, что

1) дифференциал $d\Omega_\alpha$ голоморфен вне P_α, в которой он имеет полюс вида

$$d\Omega_\alpha = dq(k_\alpha) + O(k_\alpha^{-1}); \tag{2.11}$$

2)

$$\oint_{Q_\alpha} d\Omega_\alpha = 0.$$

Условия 1, 2 определяют $d\Omega_\alpha$ однозначно. Обозначим через $2\pi i U_\alpha$ вектор его b-периодов

$$2\pi i U_{\alpha,k} = \oint_{b_k} d\Omega_\alpha. \tag{2.12}$$

Как было доказано в [7], функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(x, Q) = \exp\left(x \int_{P_0}^{Q} d\Omega_\alpha\right) \cdot \phi(x, Q), \tag{2.13}$$

где

$$\phi(x, Q) = \frac{\theta\big(A(Q) + xU + Z\big)\theta\big(A(P_0) + Z\big)}{\theta\big(A(Q) + Z\big)\theta\big(A(P_0) + xU + Z\big)}, \tag{2.14}$$

$$U = \sum_{\alpha=1}^{l} U_\alpha. \tag{2.15}$$

В заключение раздела мы приведем еще одно утверждение, которое понадобится в дальнейшем. Для любого положительного дивизора $D = \sum n_i Q_i$ рассмотрим линейное пространство $L(x, D)$ функций, имеющих вне точек P_α полюсы в точках Q_i кратности не выше n_i и имеющих в окрестности P_α вид (2.1). Для дивизоров общего положения степени $d = \sum n_i \geq g$ размерность этого пространства равна

$$\dim L(x, D) = d - g + 1. \tag{2.16}$$

3. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Для любого набора неотрицательных целых чисел $S = \{n_0 < n_1 < \cdots < n_g\}$ и набора функций $\{f_0, \ldots, f_g\}$ определим “обобщенные Вронскианы”

$$W_S(f_0, \ldots, f_g) = \det M_S, \tag{3.1}$$

где матричные элементы матрицы M_S равны

$$M_S^{i,j} = \partial_-^{n_i}\left(f_j(x) f_j(y)\right), \tag{3.2}$$

$$\partial_- = \partial/\partial x - \partial/\partial y. \tag{3.3}$$

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для любого набора $g+1$ точек $Q_0, \ldots, Q_g$ общего положения на Γ функции*

$$\psi_k(x) = \psi(x, Q_k) \tag{3.4}$$

(где $\psi(x, Q)$ – функция Бейкера–Ахиезера) удовлетворяют уравнениям

$$W_S(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_g) = 0 \tag{3.5}$$

для наборов S, не содержащих нуля (т.е. если $S = \{0 < n_0 < n_1 \cdots < n_g\}$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $W_S(x, y, Q_0) = W_S(\psi_0, \psi_1 \ldots, \psi_g)$ как функцию переменной Q_0 (т.е. зафиксируем все $Q_1, \ldots, Q_g$, а точку Q_0 будем варьировать). Из определения функции Бейкера–Ахиезера следует, что вне точек P_α функция $W_S(x, y, Q_0)$ мероморфна и имеет полюсы порядка не выше второго в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. В окрестности точки P_α она имеет вид

$$W_S(x, y, Q_0) = \exp\left((x+y) q_\alpha(k_\alpha)\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} W_{S,n}(x, y) k^{-n}\right). \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$W_S(x, y, Q_0) \in L(x+y, D = 2\gamma_1 + \cdots + 2\gamma_g). \tag{3.7}$$

Из (2.16) вытекает, что при фиксированных x, y размерность пространства таких функций равна $g+1$.

Функция $W_S(x, y, Q_0)$ обращается в нуль в точках Q_k:

$$W_S(x, y, Q_0 = Q_k) = 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, если $n_0 > 0$, то из условий нормировки (2.2) имеем

$$W_S(x, y, P_0) = 0. \tag{3.9}$$

Обращение $W_S(x, y, Q_0)$ в нуль в фиксированных $g+1$ точках общего положения влечет за собой равенство ее нулю тождественно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Функции* $\psi_k(x)$ *удовлетворяют обобщенному уравнению Коши* (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = (1, 2, \ldots, g+1)$. В силу теоремы функции $\partial_- \psi_0(x)\psi_0(y), \ldots, \partial_- \psi_g(x)\psi_g(y)$ линейно зависимы с коэффициентами, постоянными относительно оператора ∂_-, т.е. существуют функции $b_k(x)$, такие что

$$\sum_{k=0}^{g} b_k(x+y)\partial_- \psi_k(x)\psi_k(y) = 0. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{g} b_k(x+y)\psi_k\psi_k(y) = b_*(x+y). \tag{3.11}$$

Обозначая $c_k = b_k/b_*$, получаем (1.11).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (1.11) не только вытекает из уравнений (3.5) – оно им эквивалентно.

Действительно, применяя к равенству (1.11) операторы $\partial_-^{n_0}, \ldots, \partial_-^{n_g}$, получим систему линейных уравнений на $c_k(x+y)$. Существование решения у этой системы влечет равенство нулю определителя матрицы коэффициентов, т.е. равенства (3.5). При этом

$$c_k(x+y) = \frac{\det M_k(x,y)}{\det M(x,y)}, \tag{3.12}$$

где матричные элементы $M_{i,j}$, $i, j \le 0, \ldots, g-1$, матрицы M равны

$$M_{i,j} = \partial_-^i \psi_j(x)\psi_j(y), \tag{3.13}$$

а матрица M_k получена из M заменой k-го столбца на вектор $(1, 0, \ldots 0)^T$.

4. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЧИСЛО ПАРАМЕТРОВ

Результаты предшествующего раздела, в сочетании с формулой (2.13) позволяют дать явные формулы для решений векторного аналога уравнения Коши.

Рассмотрим функцию $\phi(x, Q)$, заданную формулой (2.13), в которой векторы U, Z произвольны, тогда полное семейство построенных выше алгебро-геометрических решений функционального уравнения (1.11) дается формулой

$$\psi_k = \phi(x, Q_k) \exp(a_k x), \tag{4.1}$$

где a_k – произвольные константы. Произвольность вектора Z следует из возможности варьировать дивизор полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Произвольность вектора U и констант a_k связана с произвольностью выбора полиномов q_α.

Важное замечание. На первый взгляд имеется еще один произвольный набор параметров. Функции ψ_k можно умножить на константы

$$\psi_k \leftarrow \psi_k \exp(b_k). \tag{4.2}$$

Однако можно показать, что такое преобразование эквивалентно сдвигу вектора Z, т.е. полное семейство алгебро-геометрических решений можно представить в виде

$$\psi_k = \frac{\theta\big(A(Q_k) + Ux\big)}{\theta\big(A(P_0) + Ux\big)} \cdot \exp\big(a_k x + b_k\big), \qquad k = 0, \dots, g. \tag{4.3}$$

Размерность пространства модулей кривых рода $g > 1$ равна $3g - 3$. Следовательно, общее число параметров (кривая + вектор U + константы a_k, b_k + точки $P_0, Q_0, \dots, Q_g$) равно

$$R_- = (3g - 3) + g + 2(g + 1) + 1 + (g + 1) = 7g + 1 \tag{4.4}$$

(для рода $g = 1$ число параметров дается той же формулой (4.4)).

Докажем, что в случае рода $g = 2$ формула (4.3) дает общие решения уравнения (1.11) для $N = 2$.

Как уже было сказано выше, из (1.11) следуют равенства (3.5). Рассмотрим эти равенства для наборов $S_1 = (2, 3, \dots, g + 2)$, $S_2 = (1, 3, \dots, g + 2)$, $S_{g+1} = (1, 2, 3, \dots, g - 1, g, g + 2)$, полагая в них затем $y = 0$. Соответствующие равенства

$$W_{S_i}(\psi_0, \dots, \psi_g)\big|_{y=0} = 0 \tag{4.5}$$

дают систему $g+1$ уравнений степени $g+2$ на неизвестную функцию $\psi_0, \dots, \psi_g$. Коэффициенты системы зависят как от параметров от значений производных $\partial_x^j \psi_i(0)$, $j = 0, \dots, g + 2$, которые вместе с тем задают и начальные данные для искомых решений. Следовательно, число параметров R_C, от которых может зависеть общее решение обобщенного уравнения Коши, не превосходит

$$R_C \le R_+ = (g + 1)(g + 3).$$

Для $g = 2$ имеем

$$R_- = (7g + 1)|_{g=2} = R_+ = (g + 1)(g + 3)|_{g=2} = 15,$$

что доказывает общность построенных выше решений.

5. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБЩИХ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Как было доказано в предшествующих разделах, формулы

$$\psi_k(x) = \frac{\theta(A_k + Ux)}{\theta(A_* + Ux)} \exp\big(a_k x + b_k\big) \tag{5.1}$$

задают решения уравнения (1.11) с $N = g$, если тэта-функция $\theta(z) = \theta(z \mid B)$ построена по матрице b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов неособой алгебраической кривой Γ рода g, а векторы A_k являются образами при отображении Абеля некоторых точек этой кривой $A_k = A(Q_k)$, $A_* = A(P_0)$ (т.е. $A_k \in \operatorname{Im} A \colon \Gamma \to J(\Gamma)$).

Рассмотрим теперь случай тэта-функции (2.5), построенной по произвольной матрице B с положительно определенной мнимой частью. Функция $\phi(x, A)$, заданная формулой

$$\phi(x, A) = \frac{\theta(A + Ux)\theta(A_*)}{\theta(A)\theta(A_* + Ux)}, \tag{5.2}$$

однозначно определяется следующими аналитическими свойствами.

1. При фиксированных x, U функция ϕ как функция переменной A обладает следующими трансляционными свойствами:

$$\phi(x, A + e_k) = \phi(x, A), \tag{5.3}$$

$$\phi(x, A + B_k) = \phi(x, A) \cdot \exp\bigl(-U_k x\bigr). \tag{5.4}$$

2. Дивизор полюсов $\phi(x, A)$ совпадает с тэта-дивизором

$$\theta(A) = 0. \tag{5.5}$$

3. Функция $\phi(x, A)$ нормирована условием

$$\phi(x, A_*) \equiv 1. \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. *Для любого набора $A_0, \ldots, A_N$, $N = 2^g$ точек общего положения обобщенный вронскиан $W_S(\phi_0, \ldots, \phi_N)$ для функций $\phi_k(x) = \phi(x, A_k)$ равен нулю:*

$$W_S(\phi_0, \ldots, \phi_N) = 0 \tag{5.7}$$

для наборов $S = (0 < n_0 < \cdots < n_N)$.

Доказательство теоремы практически полностью повторяет доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим аналитические свойства $W_S(x, y, A_0) = W_S(\phi_0, \ldots, \phi_N)$ как функций переменной A_0 при фиксированных $A_1, \ldots, A_N$. Они удовлетворяют следующим трансляционным свойствам:

$$W_S(x, y, A_0 + e_k) = W_S(x, y, A_0),$$
$$W_S(x, y, A_0 + B_k) = \exp\bigl(-U_k(x + y)\bigr) W_S(x, y, A_0),$$

и имеют двукратный полюс на тэта-дивизоре. Размерность пространства таких функций равна $2^g + 1$. С другой стороны,

$$W_S(x, y, A_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N = 2^g.$$

Кроме того, $W_S(x, y, A_*) = 0$ в силу условия нормировки (5.6). Следовательно, $W_S(x, y, A_0)$ равна нулю тождественно.

Список литературы

[1] *Cauchy A.L.* Cours d'analyse de l'Ecole Polyt., 1. // Analyse algebraique, 103 (1821); Oeuvres complets (2). Vol. 3. 98–105.

[2] *Abel N.H.* Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantite variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimee par une equation entre deux variables // Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 1. Cristiana 1823. Oever completes Vol. 1 cristiana. 1881. P. 1–10.

[3] *Frobenius G., Stikelberger* Ueber die Addion und Multiplication der elliptischen Functionen // Jour. Reine Angew. Math. 1880. V. 88. P. 146–184.

[4] *Baker H.F.* Note on the foregoing paper "Commutative ordinare differential operators" // Proc. Royal Soc. London 1928. V. 118. P. 584–593.

[5] *Burchnal J.L., Chaundy T.W.* Commutative ordinary differential operators I.II. // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 21. P. 420–440;// Proc. Royal Soc. London. 1928. V. 118. P. 557–583.

[6] *Кричевер И.М.* Алгебро-геометрическая конструкция уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений // ДАН СССР. 1976. Т. 2. № 227. С. 291–294.

[7] *Кричевер И.М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11, Ser. 1. С. 15–31.

[8] *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные операторы и Абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.

[9] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

[10] *Кричевер И.М., Новиков С.П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. № 6.

[11] *Дубровин Б.А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.

[12] *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Интегрируемые системы // Итоги науки и техники, Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. Т. 4. 1985. С. 179–285.

[13] *Кричевер И.М.* Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения // УМН. 1989. Т. 44. № 2. С. 121–184.

[14] *Кричевер И.М.* Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функциональный анализ и прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 45–54.

[15] *Calogero F.* One–dimensional many–body problems with pair interactions whose exact ground–state wave function is of product type // Lettere il Nuovo Cimento. 1975. V. 13. № 13. P. 507–511.

[16] *Bruschi M., Calogero F.* The Lax representation for an integrable class of relativistic dynamical systems // Commun. Math. Phys. 1987. V. 109. P. 481–492.

[17] *Bruschi M., Calogero F.* General analytic solution of certain functional equations of addition type // Siam J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 1019–1030.

[18] *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

[19] *Buchstaber V.M.* Report on scientific activity during visit at the MPI from 06.04.92 to 04.07.92. // Bonn, MPI. 1992.

[20] *Hirzebruch F.* Topological methods in algebraic geometry. New York: Springer–Verlag, 1966.

[21] *Кричевер И.М.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Математические заметки 1990. Т. 47. С. 132–142.

[22] *Ochanine S.* Sur les genres multiplicatifs difinis par der integrales elliptiques // Topology. 1987. V. 26. P. 143–151.

[23] *Witten E.* Elliptic Genera and Quantum Field Theory // Comm. Math Phys. 1987. V. 109. P. 525–536.

[24] *Taubes C.* S^1-actions and elliptic genera // Comm. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 455–526.

[25] *Bott R., Taubes C.* On the rigidity theorem of Witten // J. Amer. Math. Soc. 1989. V. 2. № 2. P. 137–186.

[26] *Бухштабер В.М., Холодов А.Н.* Формальные группы, функциональные уравнения и обобщенные теории когомологий // Мат. сб. 1991. Т. 69. С. 77–97.

[27] *Бухштабер В.М.* Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С 213–215.

[28] *Shiota T.* Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations // Inv. Math. 1986. V. 83. P. 333–382.

Научно-исследовательский институт
физико-технических и радио-технических измерений
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
8.V.1992 г.

V. M. Buchstaber, I. M. Krichever

THE VECTOR ADDITION THEOREMS AND THE BAKER–AKHIEZER FUNCTIONS

The functional equations that naturally arise from various problems of mathematical physics are considered. The N-vector addition theorem for functions of scalar argument and the functional rank N Cauchy equation for function of g dimensional argument are introduced. They are vector analogues of the classical Cauchy equaiton. It is proved that for $N = 2$ the general analytic solution of these equations is given by the Baker-Akhiezer functions of genus $g = 2$ algebraic curves. It is proved that theta functions give solutions of the rank N Cauchy functional equation of g-dimensional argument, where $N \leq 2^g$ in the case of general g dimensional Abelian variety and $N \leq g$ in case of the Jacobian variety of genus g algebraic curve. The conjecture that the rank g Cauchy equation for functions of g-dimesional argument is characteristic of the theta-functions of Jacobian variety of genus g algebraic curve (i.e it solves the Riemann-Schottky problem) is formulated.