1989 г. март — апрель *т. 44, вып. 2(266)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.93

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

И. М. Кричевер

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 121
Глава I. Спектральная теория нестационарного оператора Шредингера . . . 133
§ 1. Теория возмущений для формально блоховских решений 133
§ 2. Структура римановой поверхности блоховских функций 138
§ 3. Теорема аппроксимации 149
§ 4. Спектральная теория конечнозонных нестационарных операторов Шредингера 151
§ 5. Теорема полноты произведений блоховских функций 155
Глава II. Периодическая задача для уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили 162
§ 1. Необходимые сведения о конечнозонных решениях 162
§ 2. Теория возмущений конечнозонных решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили-2 164
§ 3. Уравнения Уизема для пространственно-двумерных «интегрируемых систем» 167
§ 4. Конструкция точных решений уравнений Уизема 168
§ 5. Квазиклассический предел двумерных интегрируемых уравнений. Уравнение Хохлова — Заболотской 171
Глава III. Спектральная теория при одном уровне энергии двумерного периодического оператора Шредингера 173
§ 1. Теория возмущений для формально блоховских решений 173
§ 2. Структура комплексных «ферми-кривых» 176
§ 3. Спектральная теория «конечнозонных относительно уровня E_0» и двумерных периодических операторов Шредингера 179
Список литературы 182

Введение

Построение эффективной спектральной теории конечнозонных операторов Штурма — Лиувилля, предпринятое в цикле работ С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса (обзор которых см. в [1, 2]; часть этих результатов несколько позднее была получена в [3, 4]), позволило не только построить широкий класс периодических и квазипериодических решений уравнения Кортевега — де Фриза. Оно привело к переосмыслению всего подхода к построению спектральной теории произвольных одномерных линейных операторов с периодическими коэффициентами.

Представляющееся ныне самоочевидным утверждение о том, что блоховские функции таких операторов, рассматриваемые для произвольных комплексных значений спектрального параметра E, являются значениями на различных листах римановой поверхности однозначной (на этой поверхности) функции, оставалось вне рамок классической спектральной теории Флоке. Оказалось, что аналитические свойства блоховских функций на этой римановой поверхности являются определяющими при решении обратной задачи восстановления коэффициентов операторов по спектральным данным. В том случае, когда эта риманова поверхность имеет конечный род, решение обратной задачи опирается на аппарат классической алгебраической геометрии и теорию тэта-функций. (Обобщение алгебро-геометрического языка и тэта-функций на случай гиперэллиптической кривой бесконечного рода, отвечающей оператору Штурма — Лиувилля с общим периодическим потенциалом, было получено в [5].)

В полной мере значение алгебро-геометрического подхода прояснилось в работах [6, 7], в которых была впервые предложена общая конструкция периодических решений пространственно-двумерных уравнений, допускающих коммутационное представление — уравнений типа уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП). В рамках этой конструкции была решена обратная задача для операторов вида

$$\sigma\partial_y - L,\ \partial_t - A,\ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

где коэффициенты операторов L и A

$$L = \sum_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\partial_x^i,\ A = \sum_{j=0}^{m} v_j(x, y, t)\partial_x^j,\ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

являются скалярными или матричными функциями своих аргументов. Эти коэффициенты однозначно определялись данными, характеризующими аналитические свойства на вспомогательной алгебраической кривой Γ (римановой поверхности конечного рода) функции $\psi(x, y, t, Q)$, $Q \in \Gamma$, называемой *функцией Бейкера — Ахиезера — Клебша — Гордана*. Эти аналитические свойства естественно обобщают аналитические свойства блоховских функций одномерных периодических конечнозонных операторов. Их специфика такова, что для любой функции, обладающей ими, всегда существуют операторы L и A вида (2) такие, что

$$(\sigma\partial_y - L)\psi(x, y, t, Q) = 0,\quad (\partial_t - A)\psi(x, y, t, Q) = 0. \tag{3}$$

Нелинейные уравнения на u_i и v_j

$$[\sigma\partial_y - L,\ \partial_t - A] = 0 \Longleftrightarrow L_t - \sigma A_y + [L, A] = 0, \tag{4}$$

эквивалентные условию совместности переопределенной системы (3) линейных задач, и есть уравнения типа КП.

С точки зрения задачи построения решений нелинейных уравнений вполне достаточно было решения обратной задачи для конечнозонных операторов, даже без постановки прямой спектральной задачи. (Обзоры различных этапов развития «конечнозонной теории» можно найти в [1, 8—14].) Вместе с тем такой подход оставлял полностью открытым вопрос о роли и месте построенных решений в периодической задаче для пространственно-двумерных уравнений типа КП.

В одномерном случае уравнений типа Лакса

$$L_t + [L, A] = 0 \tag{5}$$

наличие прямого и обратного спектральных преобразований для операторов L с периодическими коэффициентами позволяет в принципе доказать (хотя это и не всегда доведено до уровня строгих математических теорем), что множество конечнозонных решений плотно среди всех гладких периодических решений. В двумерном случае ситуация оказывается значительно более сложной.

Одной из основных целей данной работы является исследование этого вопроса на примере периодической задачи для уравнения КП

$$\frac{3}{4}\sigma^2 u_{yy}+\partial_x\left(u_t-\frac{3}{2}uu_x+\frac{1}{4}u_{xxx}\right)=0,\quad \sigma^2=\pm 1, \tag{6}$$

которое имеет представление (4) (найденное в [14, 15]), где

$$L=\partial_x^2-u(x,y,t),\quad A=-\partial_x^3+\frac{3}{2}u\partial_x+w(x,\ y,\ t). \tag{7}$$

Ответ принципиально различен для двух вариантов этого уравнения — уравнения КП-1 ($\sigma^2=-1$) и уравнения КП-2 ($\sigma^2=1$).

Как было показано в [17], периодическая задача для уравнения КП-1 неинтегрируема даже формально. Ниже будет доказано, что эта же задача для уравнения КП-2 интегрируема и любое гладкое периодическое решение этого уравнения аппроксимируется конечнозонными решениями (локально это было доказано в работах автора [18, 19]).

Это утверждение следует из спектральной теории для оператора

$$M=\sigma\partial_y-\partial_x^2+u(x,\ y),\quad \mathrm{Re}\ \sigma\neq 0, \tag{8}$$

с периодическим потенциалом $u(x,\ y)$, построению которой посвящена первая глава работы.

В неопубликованной работе И. А. Тайманова методами, полностью аналогичными методам [30], было доказано, что блоховские функции оператора M с гладким вещественным периодическим потенциалом, определяемые как решения уравнения $M\psi=0$, собственные для операторов сдвига на периоды по x и y, параметризуются (как и в одномерном случае) точками римановой поверхности Γ. При этом мультипликаторы $w_1(Q)$ и $w_2(Q)$ — собственные значения операторов сдвига — являются голоморфными функциями на этой поверхности, $Q\in\Gamma$. Это доказательство основано на теореме Келдыша о резольвентах семейства вполне непрерывных операторов, голоморфно зависящих от параметров. К сожалению, в рамках этого подхода не удается получить детальную информацию о структуре Γ, что необходимо для доказательства основной теоремы аппроксимации.

Предлагаемый нами поход к построению римановой поверхности блоховских функций носит конструктивный характер и более эффективен. В первом параграфе работы строятся формальные блоховские решения с помощью рядов, аналогичных рядам теории возмущений. В следующем параграфе доказывается сходимость этих рядов в различных областях, которые «склеиваются» далее в глобальную риманову поверхность. При этом оказывается, что вне любой окрестности «бесконечности» эта поверхность имеет конечный род. Грубо говоря, именно это обстоятельство и позволяет аппроксимировать произвольный потенциал конечнозонными, т. е. такими потенциалами, для которых соответствующие римановы поверхности имеют конечный род.

Спектральной теории конечнозонных операторов посвящен § 3 первой главы. Помимо изложения схемы решения для таких операторов обратной спектральной задачи, в этом же параграфе приводятся и теоремы о полноте блоховских функций. В пятом параграфе доказывается теорема о полноте произведений блоховских функций и их сопряженных в пространстве квадратично-интегрируемых периодических по x и y функций. Это утверждение играет ключевую роль при построении теории возмущений конечнозонных решений $u_0\,(x,\ y,\ t)$ уравнения КП-2. В частности, оно позволяет доказать, что предъявляемые в § 2 главы 2 решения линеаризованного уравнения КП-2

$$\frac{3}{4}v_{yy}+\partial_x\left(v_t-\frac{3}{2}u_0v_x-\frac{3}{2}u_{0x}v+\frac{1}{4}v_{xxx}\right)=0 \tag{9}$$

образуют при каждом t базис в пространстве квадратично-интегрируемых периодических (по x, y) функций. Зная этот базис, несложно выписать асимптотическое решение вида

$$(10)\qquad u(x, y, t)=u_0(x, y, t)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i w_i(x, y, t)$$

как для самого уравнения КП-2, так и для его возмущений (ε — малый параметр). Аналогично многофазному нелинейному ВКБ-методу (методу Уизема, см. [20, 21]) в пространственно-одномерном случае, требование равномерной ограниченности уже первого члена ряда (10) приводит к тому, что параметры $I_1, \ldots, I_N$ конечнозонного решения должны зависеть от «медленных» переменных $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, $T = \varepsilon t$. Уравнения, описывающие медленную модуляцию $I_k = I_k (X, Y, T)$, называются *уравнениями Уизема*. Для пространственно-двумерных систем они были впервые получены в работе [22], изложение результатов которой дается в заключительных параграфах второй главы. Для этих уравнений, представляющих собой систему нелинейных уравнений в частных производных на пространстве Тейхмюллера, предлагается конструкция точных решений. В пространственно-одномерном случае эта конструкция дает эффективную формулировку схемы работы [23], в которой было предложено обобщение метода «годографа» для решения «диагонализуемых» гамильтоновых систем гидродинамического типа. (Теория гамильтоновых систем гидродинамического типа была построена в работах [24, 25].)

В качестве важного частного случая приложения этих результатов в заключительном параграфе второй главы отдельно излагается конструкция решений уравнения Хохлова — Заболотской, хорошо известного в теории волновых нелинейных пучков

$$(11)\qquad \frac{3}{4}\sigma^2 u_{yy}+\partial_x\left(u_t-\frac{3}{2}uu_x\right)=0$$

(подробную библиографию работ, посвященных этому уравнению, можно найти в [26]). Отметим, что уравнение (11) является квазиклассическим пределом уравнения КП.

В третьей заключительной главе работы мы вновь возвращаемся к спектральной теории двумерных периодических операторов. На этот раз на примере двумерного оператора Шредингера

$$(12)\qquad H_0=\partial_x^2+\partial_y^2+u(x, y).$$

Обратная задача для двумерного оператора Шредингера с магнитным полем

$$(13)\qquad H = (\partial_x - iA_1(x, y))^2 + (\partial_y - iA_2(x, y))^2 + u(x, y),$$

основанная на спектральных данных, отвечающих одному уровню энергии $E = E_0$, была поставлена и рассматривалась в работе [27]. В ней был построен класс «конечнозонных на данном уровне энергии» операторов, который с точки зрения спектральной теории выделяется тем, что риманова поверхность блоховских функций, отвечающих этому уровню энергии — «комплексная ферми-кривая» — имеет конечный род.

В работах [28, 29] были указаны условия на алгебро-геометрические данные конструкции [27], выделяющие вещественные, гладкие, потенциальные ($A_i \equiv 0$) операторы $H = H_0$. С. П. Новиковым была сформулирована гипотеза, что соответствующие потенциалы образуют плотное семейство среди всех гладких периодических потенциалов $u(x, y)$.

Основной целью третьей главы является доказательство гипотезы Новикова. Вновь, как и при доказательстве теоремы аппроксимации в первой главе, нам потребуется детальная информация о структуре римановой поверхности блоховских функций оператора H_0, отвечающих фиксированному уровню энергии E_0. (Существование такой римановой поверхности доказано в [30].) С чисто технической, формульной стороны построение формальных блоховских решений уравнения $H_0\psi = E_0\psi$ существенно отличается от конструкции блоховских решений уравнения $M\psi = 0$, где M — оператор вида (8). Однако в наиболее существенных, принципиальных чертах построение спектральной теории операторов (8) и (12) происходит абсолютно параллельно. Это позволяет автору надеяться, что выработанный в рамках данной работы подход применим к построению спектральной теории произвольных линейных двумерных периодических операторов.

Прежде чем мы перейдем к изложению основного материала, сделаем два отступления. До сих пор мы говорили о римановых поверхностях лишь в связи со спектральной теорией линейных периодических дифференциальных операторов. Точки этих поверхностей параметризуют блоховские функции, которые определяются нелокально — через оператор сдвига на период. *Конечнозонными операторами* назывались те операторы, для которых соответствующая риманова поверхность имеет конечный род. Вместе с тем первоначальное определение [6, 7] «конечнозонных» решений уравнений типа КП было чисто локальным. (При таком подходе эти решения было бы правильнее называть *алгебро-геометрическими*.) Они выделялись условием, что для соответствующих операторов L и A найдутся операторы

$$L_1=\sum_{i=0}^{n_1} \tilde{u}_i(x,\ y,\ t)\,\partial_x^i,\quad L_2=\sum_{i=0}^{m_1} \tilde{v}_i(x,\ y,\ t)\,\partial_x^i, \tag{14}$$

которые коммутируют между собой

$$[L_1,\ L_2] = 0 \tag{15}$$

и коммутируют с операторами (1)

$$[L_i,\ \sigma\partial_y - L] = 0,\quad [L_i,\ \partial_t - A] = 0. \tag{16}$$

Такое определение «конечнозонных» решений восходит к пионерской работе С. П. Новикова [31], в которой были рассмотрены ограничения уравнения КдФ на стационарные решения «высших аналогов уравнения КдФ», т. е. на решения уравнений коммутативности оператора Штурма — Лиувилля L и оператора A_n порядка $2n+1$

$$[L,\ A_n] = 0. \tag{17}$$

Впервые задача классификации коммутирующих обыкновенных линейных дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами была поставлена и частично решена в замечательных работах 20-х гг. Бурхнала и Чаунди [32, 33]. Ими было доказано, что для любых таких операторов найдется полином от двух переменных $R(\lambda,\ \mu)$ такой, что

$$R(L_1,\ L_2) = 0 \tag{18}$$

В случае операторов взаимно простых порядков $(n_1,\ m_1) = 1$, каждой точке Q кривой Γ, заданной уравнением $R(\lambda,\ \mu) = 0$, соответствует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция $\psi(x,\ Q)$ операторов L_1, L_2 $(y = y_0,\ t = t_0)$:

$$L_1\psi(x,\ Q) = \lambda\psi(x,\ Q);\quad L_2\psi(x,\ Q) = \mu\psi(x,\ Q),\quad Q = (\lambda,\ \mu). \tag{19}$$

Логарифмическая производная $\psi_x\psi^{-1}$ является мероморфной функцией на Γ, имеющей в ее аффинной части g полюсов $\gamma_1(x),\ \ldots,\ \gamma_g(x)$, где g — род кривой Γ. Сами операторы L_1 и L_2 (в этом случае взаимно простых порядков) однозначно определяются полиномом R и заданием g точек на Γ — $\gamma_s(x_0)$. Конечных формул в этих работах получено не было.

Программа эффективизации результатов работ [32, 33] была предложена Бейкером [34], который указал на совпадение аналитических свойств $\psi(x,\ Q)$ на Γ с теми, которые были положены в конце прошлого века Клебшем и Горданом в основу определения аналога «экспоненты» на алгебраических кривых (см. в [35]). К сожалению, программа Бейкера реализована не была, и эти работы были в течение долгого времени незаслуженно забыты.

В работах автора [6, 7], где уравнения (15) рассматривались в связи с задачей построения решений уравнений типа КП, результаты 20-х гг. были значительно эффективизированы и обобщены на случай операторов с матричными коэффициентами. Для коэффициентов коммутирующих скалярных операторов взаимно простых порядков были найдены явные выражения через тэта-функции Римана, которые показали, что общие решения уравнений (15) в этом случае являются квазипериодическими функциями. Это позволило связать локальную теорию коммутирующих операторов со спектральной теорией Флоке операторов с периодическими коэффициентами.

Исходно задача классификации в [32, 33] ставилась для операторов произвольных порядков, но при этом отмечалось, что нет даже подхода к ее решению, когда порядки операторов не являются взаимно простыми. Первое продвижение в этом наиболее сложном случае было получено в [36] на основе алгебраизации схемы работ [6, 7]. Полностью задача классификации коммутирующих операторов общего положения была решена автором в [37]. (Отметим, что основная идея этого решения была предложена в предшествовавшей работе автора [8], но ее реализация там содержала существенные ошибки.) Оказалось, что такие операторы однозначно определяются полиномом R, матричным дивизором ранга r и набором $r-1$ произвольных функций $w_0(x), \ldots, w_{r-2}(x)$. Восстановление коэффициентов операторов по этим данным сводится к линейной задаче Римана. Здесь r — делитель порядков L_1 и L_2. Он равен числу линейно независимых решений уравнений (19).

Дадим краткое описание основных этапов доказательства сформулированного утверждения для того, чтобы более полно представить различные механизмы возникновения алгебро-геометрических конструкций. (Читатель, интересующийся лишь спектральной теорией периодических операторов, может без особого ущерба для понимания основного материала пропустить эту часть введения и перейти к содержанию последующих глав.)

Любые два оператора L_1 и L_2 со скалярными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям (15), могут быть приведены к виду, в котором $u_{n_1} = 1$, $u_{n_1-1} = 0$, $v_{m_1}(x) = v_{m_1} = \mathrm{const}$, с помощью замены переменной x и сопряжения $L_i \to g(x)L_i g^{-1}(x)$. Этот вид и будет предполагаться в дальнейшем.

Канонический базис $c_i(x, \lambda; x_0)$ в n_1-мерном пространстве $\mathcal{L}(\lambda)$ решений линейного уравнения

$$L_1 y(x) = \lambda y(x) \tag{20}$$

обычно нормируется условиями

$$\partial_x^j c_i(x, \lambda; x_0)|_{x=x_0} = \delta_{i,j}, \quad 0 \leqslant i, \quad j \leqslant n_1 - 1.$$

Оператор L_2 индуцирует, в силу (15), на $\mathcal{L}(\lambda)$ конечномерный линейный оператор $L_2(\lambda)$, матричные элементы которого в базисе c_i являются полиномами от λ. Поэтому характеристический полином

$$R(\lambda, \mu) = \det(\mu \cdot 1 - L_2(\lambda)) \tag{21}$$

является полиномом не только от μ, но и от λ. Из его определения следует что

$$R(L_1, L_2)\, y(x) = 0 \tag{22}$$

для любого решения уравнения (20). Так как $R(L_1, L_2)$ — обыкновенный линейный оператор, то это может быть выполнено, лишь если он нулевой. Тем самым, первое из утверждений Бурхнала — Чаунди доказано.

Уравнение

$$R(\lambda, \mu) = 0 \tag{23}$$

задает в C^2 аффинную часть кривой Г. Чтобы выяснить ее поведение в бесконечности, рассмотрим формальное решение уравнения

$$L_1\psi(x, k) = k^{n_1}\psi(x, k), \tag{24}$$

имеющее вид

$$\psi(x, k) = e^{k(x-x_0)}\left(\sum_{s=-N}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) и находя последовательно ξ_s, легко получить, что существует единственное такое решение, нормированное условиями $N_0 = 0$, $\xi_0 = 1$, $\xi_s(x_0) = 0$, $s > 0$. Обозначим его через $\psi(x, k; x_0)$. Любое другое решение вида (25) однозначно представимо в форме

$$\psi(x, k) = A(k)\psi(x, k; x_0).$$

Так как оператор L_2 коммутирует с L_1, то $L_2\psi(x, k; x_0)$ удовлетворяет (24) и имеет вид (25). Значит,

$$L_2\psi(x, k; x_0) = \mu(k)\psi(x, k; x_0), \tag{26}$$

$$\mu(k) = v_{m_1}k^{m_1} + \sum_{s=-m_1+1}^{\infty} \mu_s k^{-s}.$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{L}}(k)$ n_1-мерное пространство, порожденное формальными выражениями $\psi(x, \varepsilon_j k; x_0)$, $\varepsilon_j^{n_1} = 1$, над полем лорановских рядов по переменной k^{-1}. В исходном базисе $\psi(x, \varepsilon_j k; x_0)$ оператор L_2 диагонален. Если же ввести в $\widetilde{\mathcal{L}}(k)$ базис с каноническими условиями нормировки, то в нем матричные элементы этого оператора совпадут с матричными элементами $L_2^{ij}(\lambda, x_0)$ оператора L_2 в базисе $c_i(x, \lambda; x_0)$, $\lambda = k^{n_1}$. Следовательно,

$$R(\lambda, \mu) = \prod_{j=0}^{n_1-1} (\mu - \mu(\varepsilon_j k)). \tag{27}$$

Теперь мы готовы обсудить роль взаимной простоты порядков операторов. Если $(n_1, m_1) = 1$, то из (26) следует, что уравнение (22) при больших, а значит и при почти всех λ имеет различные корни. Кроме того, это означает, что кривая Г неприводима, пополняется в бесконечности одной точкой P_0, в окрестности которой локальным параметром является $k^{-1}(Q) = \lambda^{-1/n_1}$. В этом случае каждой точке $Q = (\lambda, \mu) \in Г$ соответствует единственный собственный вектор $h(Q, x_0)$ матрицы $L_2(\lambda, x_0)$, нормированный условием $h_0 \equiv 1$. Его остальные координаты $h_i(Q, x_0)$, $i = 1, \ldots, n_1 - 1$, являются мероморфными функциями на Г. Функция

$$\psi(x, Q; x_0) = \sum_{i=0}^{n_1-1} h_i(Q, x_0) c_i(x, \lambda; x_0), \quad Q = (\lambda, \mu), \tag{28}$$

является единственным решением уравнений (19) с условием нормировки $\psi(x_0, Q; x_0) \equiv 1$.

Рассмотрим аналитические свойства ψ на Г. Функции c_i являются целыми функциями переменной λ. Поэтому ψ мероморфна на Г вне точки P_0. Причем ее полюсы $\gamma_s(x_0)$ совпадают с полюсами h_i, и значит, не зависят от x. В окрестности P_0 она имеет вид

$$\psi(x, Q; x_0) = e^{k(x-x_0)}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right). \tag{29}$$

В общем случае кривая Г неособая, а число полюсов ψ равно g — роду Г. Последнее утверждение следует из рассмотрения функции

$$F(\lambda, x_0) = [\det(\partial_x^i \psi(x, Q_j, x_0))]^2, \tag{30}$$

где $Q_j = (\lambda, \mu_j) \in \Gamma$ — прообразы точки λ при естественной проекции Γ на λ-плоскость. Она имеет двукратные полюсы в проекциях полюсов $\gamma_s(x_0)$ функции ψ. Кроме того, она имеет полюс кратности $(n-1)$ в точке $\lambda = \infty$, что легко следует из (29). Нули F совпадают с точками ветвления накрытия λ: $\Gamma \to C^1$. Равенство числа нулей и полюсов рациональной функции $F(\lambda, x_0)$ и формула $2g - 2 = \nu - 2n$, выражающая род n-листной кривой через число ν точек ветвления, позволяют получить искомое утверждение о числе полюсов ψ.

Итак, совместная собственная функция $\psi(x, Q, x_0)$ коммутирующих операторов L_1 и L_2 определена на Γ, имеет вне P_0 не зависящие от x полюсы $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и представима в окрестности P_0 в виде (29). Такие функции называются *функциями Клебша — Гордана — Бейкера — Ахиезера* (чаще для краткости они будут называться просто *функциями типа Бейкера — Ахиезера*).

Построение обратного соответствия, т. е. восстановление всего коммутативного кольца $\mathscr{A}$, порожденного парой коммутирующих операторов взаимно простых порядков, по неособой кривой Γ с отмеченной точкой P_0 и набору g точек общего положения состоит из двух ключевых этапов. Во-первых, из доказательства того, что для любого такого набора общего положения $(\Gamma, P_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ существует единственная соответствующая функция Бейкера — Ахиезера. Это утверждение может быть легко получено с помощью обычной теоремы Римана — Роха. Мы его опустим, поскольку можно не просто доказать существование и единственность ψ, но предъявить для нее явные выражения в терминах тэта-функций Римана. (Эти выражения в более общей ситуации будут построены в § 3 главы 1.)

Вторым ключевым моментом является доказательство того, что для любой функции $A(Q)$, имеющей на Γ полюс лишь в точке P_0 (кольцо таких функций обозначается через $\mathscr{A}(\Gamma, P_0)$), существует единственный оператор L_A такой, что

$$L_A\psi(x, Q; x_0) = A(Q)\psi(x, Q, x_0). \tag{31}$$

Степень L_A равна порядку полюса $A(Q)$. Для доказательства этого утверждения достаточно факта существования и единственности функции Бейкера — Ахиезера. Поскольку оно типично для конечнозонного интегрирования, мы кратко приведем его.

Для любого формального ряда вида (29) существует единственный оператор L_A такой, что

$$(L_A - A(Q))\,\psi(x, k, x_0) \equiv O(k^{-1})\, e^{k(x-x_0)}, \qquad A(Q) = a_{-n}k^n + a_{-n+1}k^{n-1} + \ldots \tag{32}$$

Коэффициенты L_A последовательно находятся, если подставить в (32) формальный ряд (29) и разложение функции $A(Q)$ в окрестности P_0 и приравнять нулю коэффициенты в левой части при k^s, $s = n, n-1, \ldots, 0$. Рассмотрим функцию $\tilde{\psi} = L_A\psi(x, Q, x_0) - A(Q)\psi(x, Q, x_0)$, где L_A — только что построенный оператор. Так как полюсы ψ не зависят от x, то $\tilde{\psi}$ удовлетворяет всем требованиям, определяющим функцию Бейкера — Ахиезера, за одним исключением. Как следует из (32), свободный член предэкспоненциального множителя в ее разложении в окрестности P_0 равен нулю. Из единственности ψ следует, что $\tilde{\psi} \equiv 0$ и равенство (31) доказано. Из него вытекает, что все такие операторы коммутируют между собой. Подчеркнем еще раз, что квазипериодичность коэффициентов этих операторов и совпадение функций Бейкера — Ахиезера с блоховскими функциями есть следствие явных тэта-функциональных формул для $\psi(x, Q, x_0)$.

С технической точки зрения задача классификации коммутирующих операторов произвольных порядков значительно более сложная, но идейно она близка к только что разобранному случаю операторов взаимно простых порядков. В общем случае ряды $\mu(\varepsilon_j k)$ могут принимать одинаковые значения для различных ε_j только в том случае, когда $\mu(k) = \tilde{\mu}(k^r)$. При этом, как следует из (26), число r обязано быть общим делителем порядков n_1 и m_1 операторов L_1 и L_2. Отсюда имеем, что тогда полином R равен

$$R(\lambda, \mu) = \prod_{j=0}^{n'-1} (\mu - \tilde{\mu}(\tilde{\varepsilon}_j \tilde{k}))^r = (\tilde{R}(\lambda, \mu))^r, \tag{33}$$

где $(\tilde{\varepsilon}_j \tilde{k})^{n'} = \lambda$, $n'r = n_1$.

Сохраним обозначение Γ для кривой, заданной уже неприводимым уравнением $\tilde{R}(\lambda, \mu) = 0$. В бесконечности эта кривая пополняется единственной точкой, в окрестности которой локальным параметром является $\lambda^{-1/n'}(Q)$. Из (33) следует, что в окрестности бесконечности, а значит и всюду, каждой точке Q кривой Γ соответствует r-мерное пространство собственных векторов $L_2(\lambda, x_0)$ с собственным значением μ, $Q = (\lambda, \mu)$. Выберем в этом пространстве базис $h^i(Q, x_0)$, $i = 0, \ldots, r - 1$, с условиями нормировки

$$h^i_j(Q, x_0) = \delta_{ij}, \quad 0 \leqslant i, \quad j \leqslant r - 1. \tag{34}$$

Все остальные координаты h^i_j, $j = r, \ldots, n_1 - 1$, векторов h^i являются мероморфными функциями на Γ. Функции

$$\psi_i(x, Q, x_0) = \sum_j h^i_j(Q, x_0)\, c_j(x, \lambda, x_0) \tag{35}$$

образуют базис в пространстве решений уравнений (19), нормированный условиями

$$\partial^j_x \psi_i(x, Q; x_0)|_{x=x_0} = \delta_{ij}, \quad 0 \leqslant i, \quad j \leqslant r - 1. \tag{36}$$

Число r называется *рангом* коммутирующей пары L_1, L_2 (или всего коммутативного кольца $\mathcal{A}$, порожденного L_1, L_2).

Вектор-функции $h^i(Q, x_0)$ задают в тривиальном расслоении над Γ алгебраическое r-мерное подрасслоение $\hat{h}(x_0)$. Оно является отправной точкой исследований [36]. Как найти зависимость $\hat{h}(x_0)$? При $r = 1$ она определялась дифференциальными уравнениями, и ее свойства играли важную роль в работах [1, 2, 37 и др.]. При $r > 1$, как указано в [38], ситуация резко усложняется. «Возможные» перемещения $\hat{h}$, оказывается, накрываются неинтегрируемым r-распределением на пространстве модулей r-мерных пучков над Γ с фиксированным флагом в точке P_0. Вариация точки нормировки x_0 определяет касательный к этому распределению путь. На этом исследования [36, 38] завершаются.

Наш метод состоит не в описании x_0-вариаций пучка, а в нахождении самих собственных функций $\psi_i(x, Q, x_0)$, $x_0 = \mathrm{const}$, по их аналитическим свойствам. Вновь, как и в случае $r = 1$, функции ψ_i мероморфны на Γ вне P_0. Аналогично подсчету полюсов функции Бейкера — Ахиезера можно получить, что в общем положении ψ_i имеют полюсы в rg точках $\gamma_s(x_0)$. Причем вычеты этих функций связаны соотношением

$$\alpha_{sj}(x_0)\, \mathrm{res}_{\gamma_s} \psi_i = \alpha_{si}(x_0)\, \mathrm{res}_{\gamma_s} \psi_j, \tag{37}$$

где константы $\alpha_{si}(x_0)$ не зависят от x (но зависят от точки нормировки x_0). Набор (γ_s, α_{si}), где α_{si} — r-мерный вектор, определенный с точностью до пропорциональности, т. е. $\alpha_s \in CP^{r-1}$, называется *параметрами Тюрина*. Они характеризуют ([39]) «матричные дивизоры», задаваемые стабильными r-мерными пучками над Γ с фиксированным «оснащением», т. е. набором базисных сечений.

Для определения поведения ψ_i в окрестности P_0 рассмотрим матрицу $\Psi(x, Q; x_0)$ с матричными элементами $\Psi^i_j = \partial^i_x \psi_j(x, Q; x_0)$. Ее логарифмическая производная не зависит от выбора базиса в пространстве решений (19).

Поэтому в окрестности P_0 ее можно вычислить, воспользовавшись рядами (25) $\psi(x,\ \varepsilon_j' k';\ x_0)$, $(\varepsilon_j')^r = 1$, $(k')^r = k$, $j = 0, \ldots, r-1$, где $k^{-1}(Q)$ — локальный параметр. Получим

$$(38)\qquad (\partial_x \Psi)\,\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0, & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ k+\tilde{w}_0 & \tilde{w}_1, & \tilde{w}_2 & \ldots & \tilde{w}_{r-2} & 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}).$$

Функции $\tilde{w}_i(x_0)$ являются дифференциальными полиномами от коэффициентов оператора L_1.

Определим целую функцию $\Psi_0(x,\ k;\ x_0)$ параметра k, потребовав, чтобы в окрестности $k = \infty$ она была представима в виде

$$(39)\qquad \Psi_0 = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \chi_s k^{-s}\Big)\,\Psi(x,\ k(Q);\ x_0).$$

Задача отыскания Ψ_0 есть задача Римана о факторизации Ψ на контуре, охватывающем малую окрестность P_0. Она сводится к системе сингулярных интегральных уравнений и имеет почти при всех x единственное решение, нормированное условием $\chi_0 \equiv 1$. Из (38) следует

$$(40)\qquad (\partial_x \Psi_0)\,\Psi_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ k+w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_{r-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, из (38) и (39) следует, что $\Psi_{0x}\Psi_0^{-1}$ имеет вид (40) в окрестности $k = \infty$ с точностью до $O(k^{-1})$. Поскольку $\det \Psi_0 = \det \Psi = 1$, то эта логарифмическая производная голоморфна вне $k = \infty$. Значит, равенство (40) выполнено точно.

Обращая равенство (39), получим, что вектор-строка ψ с координатами ψ_i имеет в окрестности P_0 вид

$$(41)\qquad \psi(x,\ Q;\ x_0) = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x,\ x_0)\,k^{-s}\Big)\,\Psi_0(x,\ k,\ x_0),$$

где ξ_s — вектор-строки, $\xi_0 = (1,\ 0, \ldots, 0)$, а Ψ_0 определяется уравнением (40) и начальным условием $\Psi_0(x_0,\ k,\ x_0) = 1$.

Вектор-функция $\psi(x,\ Q;\ x_0) = (\psi_0, \ldots, \psi_{r-1})$, мероморфная вне P_0, имеющая rg полюсов γ_s, удовлетворяющая условиям (37) и представимая в виде (41) в окрестности P_0, называется *векторным аналогом функций Бейкера — Ахиезера*, отвечающим набору данных

$$(42)\qquad (\Gamma,\ P_0,\ \gamma_s,\ \alpha_s,\ w_0(x), \ldots, w_{r-2}(x)).$$

Здесь $w_i(x)$ — произвольные функции. (При $r = 1$ имеем обычные функции Бейкера — Ахиезера.)

Обратная задача восстановления коммутирующих операторов ранга r вновь решается в два этапа. Сначала доказывается, что для данных (42) общего положения соответствующая им вектор-функция существует и единственна. Ее построение сводится к задаче Римана на Γ о факторизации Ψ_0 на малом контуре вокруг P_0. Метод решения матричных задач Римана на произвольных алгебраических кривых был развит в работах [40, 41].

Из равенств (40), (41) немедленно следует, что для любой функции $A(Q)$ существует единственный оператор L_A степени rn, где n — порядок полюса $A(Q)$ такой, что

$$(43)\qquad (L_A - A(Q))\psi \equiv O(k^{-1})\Psi_0.$$

Из единственности векторного аналога функции Бейкера — Ахиезера следует, что каждая компонента ψ_i удовлетворяет (31).

Соответствие

$$\hat{L}\colon A \to L_A$$

определяет гомоморфизм кольца $\mathcal{A}(\Gamma, P_0)$ функций на Γ с единственным полюсом в выделенной точке P_0 в кольцо обыкновенных дифференциальных операторов. Этот гомоморфизм задается набором данных (42) общего положения.

Суммируя сказанное, приходим к окончательной формулировке теоремы классификации.

Теорема [37]. *Для любого коммутативного кольца $\mathcal{A}$ дифференциальных операторов найдется кривая Γ с отмеченной точкой P_0 такая, что $\mathcal{A}(\Gamma, P_0)$ изоморфно $\mathcal{A}$. Для почти всех колец $\mathcal{A}$ кривая Γ неособая. При этом существует матричный дивизор (γ_s, α_s), $s = 1, \ldots, rg$, где g — род Γ, и набор функций $w_0(x), \ldots, w_{r-2}(x)$ такие, что образ определенного по ним гомоморфизма $\hat{L}$ совпадает с $\mathcal{A}$ с точностью до замены переменной $x = f(x')$ и сопряжения некоторой функцией $\mathcal{A} = \varphi(x)\operatorname{Im}\hat{L}\varphi^{-1}(x)$. Число r является наибольшим общим делителем порядков операторов из $\mathcal{A}$.*

В отдельных случаях, как было показано в [42], можно исключить необходимость решения задачи Римана и получить явные формулы для коэффициентов коммутирующих операторов ранга $r > 1$. Так, оператор L порядка 4, коммутирующий с оператором 6 порядка, имеет вид

$$(44)\quad \begin{gathered} L = (\partial_x^2 + u)^2 + c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)) + \\ + \partial_x(c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)) - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)), \\ \gamma_1 = c(x) + y, \quad \gamma_2 = y - c(x) + c_0, \\ 8u = (c_{xx}^2 - 1)c_x^{-2} + 8\Phi c_{xx} + 4c_x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial c} - \Phi\right) - 2c_{xxx}c_x^{-1}, \\ \Phi(c, y) = \zeta(-2c) + \zeta(c - y) + \zeta(c + y). \end{gathered}$$

$c(x)$ — произвольная функция; ζ, $\wp$ — функции Вейерштрасса [43].

Мы опустим дальнейшие подробности теории коммутирующих операторов ранга $r > 1$, поскольку они не будут использованы в основной части работы (в отличие от конструкции ранга 1). Укажем лишь на работу [44], где была построена спектральная теория периодических «конечнозонных» операторов ранга 2, и на работы [10, 42, 45], где было введено многопараметрическое обобщение векторных аналогов функций Бейкера — Ахиезера и были построены с их помощью решения уравнения КП.

В заключение этого параграфа кратко охарактеризуем конструкцию решений уравнений, входящих в «иерархию КП», которая была предложена в серии работ [46] и развита в работе [47]. Эта конструкция основана на формальном обобщении «локального» подхода к аксиоматике функций Бейкера — Ахиезера ранга 1.

Рассмотрим формальный ряд $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots; k)$ вида

$$(45)\qquad \psi(\vec{x}; k) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(\vec{x})\, k^{-s}\right).$$

Для любого такого формального ряда существуют единственные дифференциальные операторы L_n, $n = 2, 3, \ldots$, по переменной $x = x_1$ (коэффициенты которых зависят от всех переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$) такие, что

$$(46)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n\right)\psi(\vec{x}, k) = O(k^{-1})\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i\right).$$

Порядок L_n равен n. Его коэффициенты (как и коэффициенты в конструкции коммутирующих операторов ранга 1) находятся последовательным приравниванием нулю коэффициентов при k^s, $s = n, n-1, \ldots, 0$, у предэкспоненциального множителя в левой части (46).

В том случае, когда ряд (45) не произволен, а обладает тем свойством, что его предэкспоненциальный множитель сходится к голоморфной функции в окрестности $k = \infty$, причем сама функция аналитически продолжается на некоторую алгебраическую кривую рода g и имеет там g полюсов, сравнение (46) превращается в точное равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n\right) \psi(\vec{x}, k) = 0. \tag{47}$$

Условия совместности линейных уравнений (47)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n, \ \frac{\partial}{\partial x_m} - L_m\right] = 0 \tag{48}$$

и есть, так называемая, «иерархия КП».

Оказывается, что из (46) вытекают равенства (47) не только тогда, когда (45) является разложением многопараметрической функции Бейкера — Ахиезера, но и в более общей ситуации. Соответствующие ряды в конструкции [46, 47] однозначно определялись точками W универсального многообразия Грассмана. К сожалению, в рамках этого подхода не были выделены интересные с физической точки зрения решения с контролируемыми глобальными аналитическими свойствами за исключением «конечнозонных решений ранга 1» (которые являются квазипериодическими функциями) и их различных вырождений (многосолитонных, рациональных и др.).

Отметим, что построенные в [48, 49] решения уравнения КП также являются частным случаем общих решений [46, 47]. Следует подчеркнуть, что их конструкция, использующая тензорные поля типа Бейкера — Ахиезера, позволяет доказать, что они являются «асимптотически конечнозонными».

Пока открытым вопросом является построение аналога конструкции [46, 47] в случае векторных функций Бейкера — Ахиезера, возникавших в теории коммутирующих операторов ранга $r > 1$.

Важным математическим приложением теории коммутирующих операторов ранга 1 и теории уравнения КП является доказательство гипотезы С. П. Новикова в проблеме Шоттки. В работе автора [7] была получена формула

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta (Ux + Vy + Wt + \zeta | B) \tag{49}$$

для конечнозонных решений уравнения КП. Здесь $\theta(z_1, \ldots, z_g \mid B)$ — тэта-функция Римана, построенная по матрице B b-периодов голоморфных дифференциалов на алгебраической кривой Г. Векторы U, V, W определяются отмеченной точкой P_0. Вектор ζ произволен.

Проблема Римана — Шоттки состоит в описании симметрических матриц B с положительно определенной мнимой частью, которые являются матрицами b-периодов алгебраических кривых. Гипотеза С. П. Новикова заключалась в том, что функция $u(x, y, t)$, заданная формулой (49), тогда и только тогда удовлетворяет уравнению КП, когда B есть матрица b-периодов некоторой кривой Г. Тем самым, все необходимые соотношения на B можно получить, подставляя (49) в (6). Частично эта гипотеза была доказана в [50], где были выведены соответствующие уравнения на B и доказано, что они задают алгебраическое многообразие, одна из компонент связности которого совпадает с многообразием матриц b-периодов. Полностью гипотеза Новикова была доказана в [51]. Ключевым моментом в [51] является доказательство того, что если $u(x, y, t)$ вида (49) удовлетворяет уравнению КП, то найдутся векторы U^s, $s > 3$, такие, что функция

$$u(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = 2\partial_x^2 \ln \theta \left(\sum_{s=1}^{\infty} U^s x_s | B \right) \tag{50}$$

будет определять решения всей иерархии КП ($x = x_1$, $y = x_2$, $t = x_3$). Так как среди векторов U^s не может быть более g линейно независимых, то отсюда следует, что среди линейных комбинаций операторов L_n найдутся два коммутирующих оператора взаимно простых порядков, а значит, в силу [7], матрица B есть матрица b-периодов соответствующей этим коммутирующим операторам кривой.

ГЛАВА I

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

§ 1. Теория возмущений для формально блоховских решений

Блоховскими решениями $\psi(x, y, w_1, w_2)$ нестационарного уравнения Шредингера

$$(1.1)\qquad (\sigma\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y))\psi = 0$$

с периодическим потенциалом $u(x, y) = u(x + l_1, y) = u(x, y + l_2)$ называются решения, собственные для операторов сдвига на периоды по x и y, т. е.

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} \psi(x + l_1, y, w_1, w_2) &= w_1\psi(x, y, w_1, w_2);\\ \psi(x, y + l_2, w_1, w_2) &= w_2\psi(x, y, w_1, w_2). \end{aligned}$$

Блоховские функции будут всегда предполагаться нормированными так, что $\psi(0, 0, w_1, w_2) = 1$. Множество пар $Q = (w_1, w_2)$, для которых существуют блоховские решения, будет обозначаться через Γ и называться *спектральным множеством Флоке*. (Для краткости соответствующие блоховские функции будут обозначаться $\psi(x, y, Q)$, $Q \in \Gamma$.) Многозначные функции $p(Q)$ и $E(Q)$ на Γ, определяемые равенствами

$$(1.3)\qquad w_1 = e^{ipl_1}, \quad w_2 = e^{iEl_2},$$

называются *квазиимпульсом* и *квазиэнергией* соответственно. Если Γ является гладким аналитическим многообразием, то дифференциалы dp и dE являются однозначными голоморфными дифференциалами. Их периоды по любому циклу на Γ кратны величинам $\frac{2\pi}{l_1}$ и $\frac{2\pi}{l_2}$ соответственно.

Предположим, что каждой точке $Q = (w_1, w_2) \in \Gamma$ соответствует блоховское решение $\psi^+(x, y, Q)$ сопряженного к (1.1) уравнения

$$(1.4)\qquad (-\sigma\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y))\psi^+ = 0,$$

такое, что

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} \psi^+(x + l_1, y, Q) &= w_1^{-1}\psi^+(x, y, Q),\\ \psi^+(x, y + l_2, Q) &= w_2^{-1}\psi^+(x, y, Q). \end{aligned}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Имеет место равенство*

$$(1.6)\qquad \sigma\, dE\, \langle\psi\psi^+\rangle_x = dp\, \langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y.$$

(Здесь и далее $\langle\cdot\rangle_x$ и $\langle\cdot\rangle_y$ означают средние по x и y соответственно.)

Впервые равенство (1.6) для случая конечнозонных операторов (1.1) было получено в [52]. Его обобщение на случай операторов произвольных порядков с матричными коэффициентами имеется в [22].

Доказательство. Пусть $\tilde\psi = \psi(x, y, \tilde Q)$ и $\psi^+ = \psi^+(x, y, Q)$, где Q и $\tilde Q$ — произвольные точки Γ. Из (1.1) и (1.4) следует, что

$$(1.7)\qquad \sigma\partial_y(\tilde\psi\psi^+) = \partial_x(\tilde\psi_x\psi^+ - \tilde\psi\psi_x^+).$$

Усредняя равенство (1.7) по x, y и устремляя $\widetilde{Q}$ к Q, получим с помощью (1.2) и (1.5) искомое равенство.

Калибровочное преобразование $\psi \to e^{\alpha(y)}\psi$, где $\partial_y\alpha(y)$ — периодическая функция, переводит решения уравнения (1.1) в решения того же уравнения, но с другим потенциалом $\widetilde{u} = u(x, y) - \sigma\partial_y\alpha$. Следовательно, спектральные множества, соответствующие потенциалам u и $\widetilde{u}$, изоморфны. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем периодических потенциалов, удовлетворяющих условию

$$\langle u(x, y)\rangle_x = 0. \tag{1.8}$$

Основной целью этого параграфа является построение теории возмущений для формально блоховских решений уравнения (1.1), которая позволяет выразить эти решения через базисные совокупности $\psi_n(x, y)$ блоховских решений «невозмущенного» уравнения (1.1) с каким-либо потенциалом $u_0(x, y)$. Точнее, зафиксируем комплексное число w_1. Последовательность блоховских решений

$$\psi_n = \psi_n(x, y) = \psi(x, y, Q_n), \quad Q_n = (w_1, w_{2n}) \in \Gamma_0, \tag{1.9}$$

уравнения (1.1) с $u = u_0(x, y)$ будет называться *базисной*, если любая непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ такая, что

$$f(x + l_1) = w_1 f(x), \tag{1.10}$$

может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_n r_n(y)\,\psi_n(x, y). \tag{1.11}$$

В а ж н ы й п р и м е р. Пусть $u_0 \equiv 0$. Тогда для любого комплексного числа w_1 функции

$$\psi_n = \exp(ik_n x - \sigma^{-1}k_n^2 y) \tag{1.12}$$

образуют базисную последовательность, где k_n — корни уравнения

$$w_1 = e^{ik_n l_1}, \quad \text{т. е.} \quad k_n = k_0 + \frac{2\pi}{l_1} n. \tag{1.13}$$

Помимо ψ_n нам потребуется «двойственная последовательность»

$$\psi_n^+ = \psi^+(x, y, Q_n) \tag{1.14}$$

блоховских решений формально сопряженного уравнения

$$(\sigma\partial_y + \partial_x^2 - u_0(x, y))\,\psi_n^+ = 0, \tag{1.15}$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\langle \psi_n \psi_m^+\rangle_x = \langle \psi_n \psi_n^+\rangle\,\delta_{n,m}. \tag{1.16}$$

Имея в распоряжении последовательности ψ_n и ψ_n^+, несложно построить в «нерезонансном случае», т. е. когда выполняется условие

$$w_{20} \neq w_{2n}, \quad n \neq 0, \tag{1.17}$$

блоховское решение $\widetilde{\psi}(x, y, Q_0)$ уравнения (1.1) в виде формального ряда

$$\widetilde{\psi}(x, y, Q_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_s(x, y, Q_0), \quad \widetilde{\varphi}_0 = \psi_0. \tag{1.18}$$

Этот ряд описывает «возмущение» блоховского решения ψ_0 невозмущенного уравнения. (Здесь и далее ряды типа (1.18) идут по степеням формально малого параметра δu.)

Лемма 1.2. *Если выполнено условие* (1.17), *то существует единственный формальный ряд*

$$F(y,\ Q_0)=\sum_{s=1}^{\infty} F_s(y,\ Q_0) \tag{1.19}$$

такой, что уравнение

$$(\sigma\partial_y-\partial_x^2+u_0+\delta u)\,\Psi(x,\ y,\ Q_0)=F(y,\ Q_0)\,\Psi(x,\ y,\ Q_0) \tag{1.20}$$

имеет формальное решение вида

$$\Psi(x,\ y,\ Q_0)=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x,\ y,\ Q_0),\quad \varphi_0=\psi_0=\psi(x,\ y,\ Q_0), \tag{1.21}$$

удовлетворяющее условиям

$$\langle\psi_0^+\Psi\rangle_x=\langle\psi_0^+\psi_0\rangle_x, \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x+l_1,\ y,\ Q_0)&=w_1\Psi(x,\ y,\ Q_0),\\ \Psi(x,\ y+l_2,\ Q_0)&=w_{20}\Psi(x,\ y,\ Q_0).\end{aligned} \tag{1.23}$$

Соответствующее решение единственно. Члены ряда (1.21) *и величины* F_s *даются рекуррентными формулами* (1.25—1.29).

Отметим, что из единственности F и (1.23) следует, что функция $F(y,\ Q_0)$ периодична по y.

Доказательство. Уравнение (1.20) эквивалентно системе уравнений

$$(\sigma\partial_y-\partial_x^2+u_0)\,\varphi_s=\sum_{i=1}^{s}F_i\varphi_{s-i}-\delta u\varphi_{s-1}. \tag{1.24}$$

По условию базисности последовательности ψ_n, искомые функции φ_s можно представить в виде

$$\varphi_s=\sum_n c_n^s(y,\ Q_0)\,\psi_n(x,\ y),\quad c_n^0=\delta_{n,0}. \tag{1.25}$$

Требование (1.22) эквивалентно тому, что

$$c_0^s=0,\quad s\geqslant 1. \tag{1.26}$$

Подставляя (1.25) в (1.24) и приравнивая между собой коэффициенты при ψ_n, $n\neq 0$, в разложениях по ψ_n правой и левой частей этого равенства, получим

$$\sigma\partial_y c_n^s=\sum_{i=1}^{s-1}F_i c_n^{s-i}-\frac{\langle\psi_n^+\delta u\varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle\psi_n\psi_n^+\rangle_x},\quad n\neq 0. \tag{1.27}$$

Это уравнение вместе с условием $w_{2n}c_n^s(y+l_2)=w_{20}c_n^s(y)$, эквивалентным (1.23), однозначно определяет c_n^s (а значит и φ_s):

$$c_n^s(y,\ Q_0)=\sigma^{-1}\frac{w_{2n}}{w_{20}-w_{2n}}\int_y^{y+l_2}\left(\sum_{i=1}^{s-1}F_i c_n^{s-i}-\frac{\langle\psi_n^+\delta u\varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle\psi_n^+\psi_n\rangle_x}\right)dy'. \tag{1.28}$$

Из (1.26) следует, что коэффициент при ψ_0 разложения правой части (1.24) равен нулю. Значит,

$$F_s(y,\ Q_0)=\frac{\langle\psi_0^+\delta u\varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle\psi_0^+\psi_0\rangle_x}. \tag{1.29}$$

Доказательство леммы завершено.

Следствие. *Формула* (1.30)

$$\psi(x,\ y,\ Q_0)=\exp\left(-\sigma^{-1}\int_0^y F(y',\ Q_0)\,dy'\right)\frac{\Psi(x,\ y,\ Q_0)}{\Psi(0,\ 0,\ Q_0)} \tag{1.30}$$

определяет формально блоховское решение уравнения (1.1)

$$\tilde{\psi}(x + l_1, y, Q_0) = w_1\tilde{\psi}(x, y, Q_0), \tag{1.31}$$

$$\tilde{\psi}(x, y + l_2, Q_0) = \tilde{w}_{20}\tilde{\psi}(x, y, Q_0), \tag{1.32}$$

где соответствующий мультипликатор $\tilde{w}_{20}$ *равен*

$$\tilde{w}_{20} = w_{20} \exp\left(-\sigma^{-1}\int_0^{l_2} F(y', Q_0)\, dy'\right). \tag{1.33}$$

В стационарном случае, когда u не зависит от y, предшествующие формулы переходят в обычные формулы теории возмущений собственных функций, отвечающих простым собственным значениям. Условие (1.17), как уже говорилось выше, является аналогом условия простоты собственного значения оператора. В тех случаях, когда оно нарушается, необходимо поступить аналогично тому, как поступают в теории возмущений кратных собственных значений.

В качестве множества индексов, отвечающих резонансам, можно взять любой конечный набор целых чисел $I \in \mathbb{Z}$ такой, что

$$w_{2\alpha} \neq w_{2n}, \quad \alpha \in I, \quad n \notin I \tag{1.34}$$

(до конца этого параграфа целые индексы, принадлежащие I, будут обозначаться греческими буквами, а все остальные — латинскими).

Лемма 1.3. *Существуют единственные формальные ряды*

$$F^\alpha_\beta(y, w_1) = \sum_{s=1}^{\infty} F^\alpha_{\beta s}(y, w_1) \tag{1.35}$$

такие, что уравнения

$$(\sigma\partial_y - \partial_x^2 + u_0 + \delta u)\,\Psi^\alpha(x, y, w_1) = \sum_\beta F^\alpha_\beta(y, w_1)\,\Psi^\beta(x, y, w_1) \tag{1.36}$$

имеют блоховские формальные решения вида

$$\Psi^\alpha = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^\alpha_s(x, y, w_1), \quad \varphi^\alpha_0 = \psi_\alpha = \psi(x, y, Q_\alpha), \tag{1.37}$$

$$\Psi^\alpha(x + l_1, y, w_1) = w_1\Psi^\alpha(-x, y, w_1), \tag{1.38}$$

$$\Psi^\alpha(x, y + l_2, w_1) = w_{2\alpha}\Psi^\alpha(x, y, w_1), \tag{1.39}$$

удовлетворяющие условиям

$$\langle\psi^+_\beta\Psi^\alpha\rangle_x = \delta_{\alpha,\beta}\langle\psi^+_\alpha\psi_\alpha\rangle_x. \tag{1.40}$$

Соответствующие решения Ψ^α *единственны и даются формулами* (1.41—1.43).

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 1.2, которая является ее частным случаем. Поэтому мы приведем лишь окончательные формулы для $F^\alpha_{\beta s}$ и коэффициентов рядов:

$$\varphi^\alpha_s(x, y, w_1) = \sum_{n\notin I} c_n^{s,\alpha}(y, w_1)\,\psi_n(x, y), \quad s \geqslant 1. \tag{1.41}$$

Имеем

$$c_n^{s,\alpha} = \sigma^{-1}\frac{w_{2n}}{w_{2\alpha} - w_{2n}}\int_y^{y+l_2}\left(\sum_\beta\sum_{i=1}^{s-1} F^\alpha_{\beta i}c_n^{s-i,\beta} - \frac{\langle\psi^+_n\delta u\varphi^\alpha_s\rangle_x}{\langle\psi^+_n\psi_n\rangle_x}\right)dy', \tag{1.42}$$

$$F^\alpha_{\beta s}(y, w_1) = \frac{\langle\psi^+_\beta\delta u\varphi^\alpha_{s-1}\rangle_x}{\langle\psi^+_\beta\psi_\beta\rangle_x}. \tag{1.43}$$

Определим матрицу $T^\alpha_\beta(y, w_1)$ из уравнения

$$\sigma T_y + TF = 0, \quad T(0) = 1. \tag{1.44}$$

Формальное решение этого уравнения может быть найдено в виде

$$(1.45)\qquad T(y, w_1)=\sum_{s=0}^{\infty} T_s(y, w_1), \quad T_0=1,$$

где T_s, $s\geqslant 1$, дается рекуррентными формулами:

$$(1.46)\qquad T_s=-\sigma^{-1}\int_0^y \Big(\sum_{i=1}^{s-1} T_i(y', w_1)F_{s-i}(y', w_1)\Big)\,dy'.$$

Функции

$$(1.47)\qquad \hat\Psi^\alpha(x, y, w_1)=\sum_\beta T^\alpha_\beta(y, w_1)\Psi^\beta(x, y, w_1)$$

являются решениями уравнения (1.1). При сдвиге на период по x они умножаются на w_1, а при сдвиге на период по y они преобразуются следующим образом:

$$(1.48)\qquad \hat\Psi^\alpha(x, y+l_2, w_1)=\sum_\beta \hat T^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta}\hat\Psi^\beta(x, y, w_1), \quad \hat T(w_1)=T(l_2, w_1).$$

Конечную совокупность формальных решений $\hat\Psi^\alpha$ естественно назвать *квазиблоховской*, поскольку она остается инвариантной при сдвигах на периоды по x и y. Характеристическое уравнение

$$(1.49)\qquad R(w_1, \tilde w_2)=\det(\tilde w_2\delta^\alpha_\beta-\hat T^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta})=0$$

является аналогом «секулярного уравнения» в обычной теории возмущений кратных собственных значений.

Следствие. *Пусть $h_\alpha(w_1, \tilde w_2)$ — собственный вектор матрицы $\hat T^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta}$, нормированный так, что*

$$(1.50)\qquad \sum_\alpha h_\alpha(\tilde Q)\hat\Psi^\alpha(0, 0, w_1)=1, \quad \tilde Q=(w_1, \tilde w_2).$$

Тогда

$$(1.51)\qquad \tilde\psi(x, y, \tilde Q)=\sum_\alpha h_\alpha(Q)\hat\Psi^\alpha(x, y, w_1)$$

является формальным блоховским решением уравнения (1.1) *с мультипликаторами w_1 и $\tilde w_2$, где $\tilde w_2$ — корень уравнения* (1.47), *и при этом стандартно нормированным.*

Аналогично предшествующему строятся блоховские формальные решения для формально сопряженного к (1.1) уравнения (1.4).

Лемма 1.4. *Если выполнены условия* (1.34), *то существуют единственные формальные ряды*

$$(1.52)\qquad F^{+\alpha}_\beta(y, w_1)=\sum_{s=1}^{\infty} F^{+\alpha}_{\beta s}(y, w_1)$$

такие, что уравнения

$$(1.53)\qquad (\sigma\partial_y+\partial_x^2-u_0-\delta u)\Psi^{+\alpha}(x, y, w_1)=\sum_\beta F^{+\alpha}_\beta(y, w_1)\hat\Psi^\beta(x, y, w_1)$$

имеют блоховские формальные решения вида

$$(1.54)\qquad \Psi^{+\alpha}=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi^{+\alpha}_s(x, y, w_1), \quad \varphi^\alpha_0=\psi^+_\alpha=\psi^+(x, y, Q_\alpha),$$

$$(1.55)\qquad \Psi^{+\alpha}(x+l_1, y, w_1)=w_1^{-1}\Psi^{+\alpha}(x, y, w_1),$$

$$(1.56)\qquad \Psi^{+\alpha}(x, y+l_2, w_1)=w_{2\alpha}^{-1}\Psi^{+\alpha}(x, y, w_1),$$

удовлетворяющие условиям

$$(1.57)\qquad \langle \Psi^{+\alpha}\psi_\beta\rangle_x = \delta_\beta^\alpha \langle \psi_\alpha \psi_\alpha^+\rangle_x.$$

Соответствующие решения единственны и даются формулами

$$(1.58)\qquad \varphi_s^{+\alpha} = \sum_{n\in I} c_n^{+s,\alpha}(y, w_1)\,\psi_n^+(x, y),\quad s\geqslant 1,$$

$$(1.59)\qquad c_n^{+s,\alpha} = \sigma^{-1}\frac{w_{2\alpha}}{w_{2\alpha}-w_{2n}}\int\limits_y^{y+l_2} dy'\left(\sum_\beta \sum_{i=1}^{s-1} F_{\beta i}^{+\alpha} c_n^{+s-i,\beta} - \frac{\langle \psi_n \delta u \varphi_{s-1}^{+\alpha}\rangle_x}{\langle \psi_n^+ \psi_n\rangle_x}\right),$$

$$(1.60)\qquad F_{\beta s}^{+\alpha} = \frac{\langle \psi_\beta \delta u \varphi_{s-1}^{+\alpha}\rangle_x}{\langle \psi_\beta^+ \psi_\beta\rangle_x}.$$

Определим матрицу $T_\beta^{+\alpha}(y, w_1)$ из уравнения

$$(1.61)\qquad -\sigma T_y^+ + T^+F^+ = 0,\quad T^+(0, w_1) = 1.$$

Тогда функции

$$(1.62)\qquad \hat\Psi^{+\alpha}(x, y, w_1) = \sum_\beta T_\beta^{+\alpha}(y, w_1)\,\Psi^{+\beta}(x, y, w_1)$$

являются решениями уравнения (1.4). При сдвиге на период по x они умножаются на w_1^{-1}, а при сдвиге на период по y они преобразуются так:

$$(1.63)\quad \hat\Psi^{+\alpha}(x, y+l_2, w_1) = \sum_\beta \hat T_\beta^{+\alpha}(w_1)\,w_{2\beta}^{-1}\hat\Psi^{+\beta}(x, y, w_1),\quad \hat T^+ = T^+(l_2, w_1).$$

С л е д с т в и е. *Имеет место равенство*

$$(1.64)\qquad \sum_\gamma \hat T_\gamma^\alpha \hat T_\gamma^{+\beta} = \delta^{\alpha\beta}.$$

Так как $\hat\Psi^\alpha$ и $\hat\Psi^{+\beta}$ — решения формально сопряженных уравнений, величины $\langle \hat\Psi^{+\beta}\hat\Psi^\alpha\rangle_x$ не зависят от y. Так как $T(0) = T^+(0) = 1$, то

$$(1.65)\qquad \langle \hat\Psi^{+\beta}\hat\Psi^\alpha\rangle_x = \delta^{\alpha\beta}\langle \psi_\alpha^+ \psi_\alpha\rangle_x.$$

Значит,

$$(1.66)\quad \delta^{\alpha\beta}\langle \psi_\alpha^+\psi_\alpha\rangle_x = \langle \hat\Psi^{+\beta}(x, y+l_2, w_1)\,\hat\Psi^\alpha(x, y+l_2, w_1)\rangle_x = \\ = \sum_\gamma \hat T_\gamma^{+\beta}\hat T_\gamma^\alpha\langle \psi_\gamma \psi_\gamma^+\rangle_x.$$

С л е д с т в и е. *Формально блоховские решения уравнения* (1.4) *определены на поверхности, заданной уравнением* (1.49), *и имеют мультипликаторы* w_1^{-1} *и* $\tilde w_2^{-1}$.

§ 2. Структура римановой поверхности блоховских функций

В этом параграфе мы будем рассматривать построенные выше формальные ряды теории возмущений, выбрав в качестве невозмущенного потенциала $u_0 \equiv 0$. Блоховские решения «невозмущенного» уравнения (1.1) и его сопряженного

$$(2.1)\qquad (\sigma\partial_y - \partial_x^2)\,\psi(x, y, k) = 0,\quad (\sigma\partial_y + \partial_x^2)\,\psi^+(x, y, k) = 0$$

параметризуются точками комплексной k-плоскости и имеют вид

$$(2.2)\qquad \psi = e^{ikx-\sigma^{-1}k^2y},\quad \psi^+ = e^{-ikx+\sigma^{-1}k^2y}.$$

Соответствующие собственные значения операторов сдвига на l_1 и l_2 по x и y равны

$$(2.3)\qquad w_1 = e^{ikl_1},\quad w_2 = e^{-\sigma^{-1}k^2l_2}.$$

Для любого комплексного k_0 функции $\psi_n = \psi(x, y, k_n)$, где

$$k_n = k_0 + \frac{2\pi n}{l_1}, \tag{2.4}$$

образуют, как уже говорилось выше, базисную последовательность для непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (1.5) для $w_{10} = w_1(k_0)$. Двойственная последовательность $\psi_m^+ = \psi^+(x, y, k_m)$ удовлетворяет требованию (1.11)

$$\langle \psi_n \psi_m^+ \rangle_x = \delta_{nm}. \tag{2.5}$$

Следовательно, формулы (1.21), (1.25), (1.28), (1.29), (1.30), в которых надо δu заменить на $u(x, y)$, определяют формально блоховское решение уравнения (1.1), если k_0 удовлетворяет условию отсутствия резонансов (1.17), которое мы рассмотрим сейчас более детально.

Из (2.3) следует, что при $u_0 \equiv 0$ резонансы бывают только простыми, т. е. уравнения

$$w_1(k^{(i)}) = w_1(k^{(j)}), \quad w_2(k^{(i)}) = w_2(k^{(j)}) \tag{2.6}$$

могут иметь не более двух корней $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$. Соответствующие пары резонансных точек имеют вид

$$k^{(1)} = k_{N, M}, \quad k^{(2)} = k_{-N, -M}, \tag{2.7}$$

где

$$k_{N, M} = \frac{\pi N}{l_1} + \frac{M l_1 \sigma}{2 N i l_2}, \quad N \neq 0, \quad M — \text{целые}. \tag{2.8}$$

Итак, если

$$k_0 \neq k_{N, M} \tag{2.9}$$

ни для каких целых $N \neq 0$, M, то мы имеем формально блоховское решение уравнения (1.1).

Забегая вперед, отметим, что с помощью оценок, значительно более простых, чем те, которые будут получены ниже, можно показать, что для достаточно малых $u(x, y)$, аналитически продолжимых в некоторую окрестность вещественных x, y, ряды теории возмущений сходятся вне некоторой окрестности резонансных точек (2.8) и определяют там аналитическую по k_0 функцию $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$. Это верно при любом значении σ. Принципиальное различие случаев $\operatorname{Re} \sigma = 0$ и $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$ даже для малых $u(x, y)$ проявляется при попытке продолжения $\tilde{\psi}$ в «резонансную» область. Невозможность такого продолжения (по крайней мере, развиваемыми в работе методами) при $\operatorname{Re} \sigma = 0$ связана с тем, что в этом случае точки k_{NM} всюду плотны на вещественной оси. Было бы очень интересно и важно найти язык, позволяющий описать ситуацию в окрестности этого непрерывного резонансного множества. Кратко к этому вопросу мы еще вернемся.

В случае $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$ резонансные точки k_{NM} имеют лишь одну предельную точку $k = \infty$. Это обстоятельство является ключевым для всех последующих построений. До конца этого параграфа мы ограничимся случаем $\sigma = 1$, хотя все его утверждения (в частности, теорема 2.1), доказываемые для комплексных потенциалов u, справедливы для любого $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$. При $\sigma = 1$ естественно выделяется случай вещественных периодических потенциалов $u(x, y)$, в котором общие утверждения допускают дальнейшую существенную эффективизацию.

Обозначим через R_{NM} окрестности резонансных точек k_{NM}, заданные неравенствами (еще раз подчеркнем, что далее $\sigma = 1$)

$$\left| \operatorname{Re} k - \frac{\pi N}{l_1} \right| < \frac{a_1}{N}, \quad \left| \operatorname{Im} k - \frac{M}{2N} \frac{l_1}{l_2} \right| < \frac{a_1}{N}, \tag{2.10}$$

где a_1 — константа, выбранная пока произвольно, лишь бы эти окрестности не пересекались, т. е. $a_1 < \frac{\pi}{2l_1}$, $a_1 < \frac{1}{4}\frac{l_1}{l_2}$. Для любой точки k_0, не принадлежащей R_{NM} ни для каких целых $N \neq 0$, M, верны неравенства

$$(2.11) \qquad |1-e^{(k_n^2-k_0^2)l_2}| > h, \quad |1-e^{(k_0^2-k_n^2)l_2}| > h,$$

где

$$(2.12) \qquad h = \min(1-e^{-a_2}, \sin a_2), \quad a_2 = \frac{2\pi l_2}{l_1} a_1.$$

В дальнейшем будет предполагаться, что рассматриваемая периодическая функция $u(x, y)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность вещественных x, y и ограничена там какой-либо константой U, т. е.

$$(2.13) \qquad |u(x, y)| \leqslant U, \quad |\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1, \quad |\operatorname{Im} y| \leqslant \tau_2.$$

Зафиксируем константу ε, удовлетворяющую следующим неравенствам:

$$(2.14) \qquad \varepsilon < \min(\varepsilon_0, 1), \quad C(\varepsilon) < \frac{1}{2},$$

где ε_0 — корень дискриминанта квадратного уравнения

$$(2.15) \qquad aC^2 + bC + \varepsilon^2 U = 0, \quad a = 2U\frac{l_2}{h}, \quad b = \varepsilon U - 1,$$

а $C(\varepsilon)$ во втором из неравенств (2.14) — значение в ε той ветви корня уравнения (2.15), которая аналитична в окрестности $\varepsilon = 0$, $C(\varepsilon) = \varepsilon^2 U + O(\varepsilon^3)$ (в силу второго неравенства эта ветвь в ε определена корректно).

Пусть R_0 — прямоугольная область в комплексной плоскости

$$(2.16) \qquad |\operatorname{Re} k| \leqslant N_1, \quad |\operatorname{Im} k| \leqslant N_2, \quad q_j = e^{-2\pi\tau_j/l_j},$$

где N_1, N_2 — произвольно фиксированные числа такие, что

$$(2.17) \qquad \frac{l_2}{h} q_1^{\frac{l_1 N_1}{2\pi}} \leqslant \varepsilon^2, \quad \frac{l_1 l_2}{\pi h N_1} \ln \frac{4 l_1}{\pi} N_1 \leqslant \varepsilon^3, \quad N_2 > \frac{l_2}{h} N_1, \quad \frac{l_2}{h} q_2^{2N_2} \leqslant \frac{l_1}{4\pi N_2}.$$

Обозначим через $\widetilde{R}$ дополнение к R_0 и окрестностям $R_{N,M}$ резонансных точек.

Л е м м а 2.1. *Для $k_0 \in \widetilde{R}$ ряды теории возмущений, построенные в силу леммы 1.2 и ее следствия, абсолютно сходятся равномерно в $\widetilde{R}$ и определяют блоховские решения $\widetilde{\psi}(x, y, k_0)$ уравнения 1.1 ($\sigma = 1$), аналитические в области $k_0 \in \widetilde{R}$, $|\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant \tau_2$ и не обращающиеся там в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из трансляционных свойств $c_n^s(y, k_0)$, определенных формулой (1.28), следует, что

$$(2.18) \qquad c_n^s(x, k_0) = \widetilde{c}_n^s(y, k_0)\, e^{(k_n^2-k_0^2)y},$$

где функция $\widetilde{c}_n^s(y, k_0)$ периодична по y. Докажем по индукции, что для $k_0 \notin R_{NM}$, $|\operatorname{Im} k_0| > N_1$, выполняются неравенства ($s \geqslant 1$):

$$(2.19) \qquad |\widetilde{c}_n^s(y, k_0)| \leqslant C_s q_1^{|n|} \times \begin{cases} \varepsilon^{s+1} f_n(k_0), & n \neq n_0, \\ \frac{l_2}{h}\varepsilon^{s-1}, & n = n_0. \end{cases}$$

Здесь n_0 — целое число такое, что $\left|\frac{2\pi n_0}{l_1} + 2\operatorname{Re} k_0\right| < \frac{1}{2}$. Константы C_s последовательно определяются формулами

$$(2.20) \qquad C_1 = 1, \quad C_s = U\left(C_{s-1} + 2\frac{l_2}{h}\sum_{i=2}^{s-1} C_{i-1}C_{s-i}\right), \quad s \geqslant 2.$$

Неотрицательные числа $f_n(k_0)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n\neq 0,\, n_0} f_n(k_0) \leqslant 1. \tag{2.21}$$

Предположим, что (2.19) справедливо для всех $s' \leqslant s-1$. Тогда при тех же $s' \geqslant 1$ имеют место неравенства

$$|\varphi_{s'}\psi_0^+| \leqslant C_{s'}\left(\varepsilon^{s'+1} + \varepsilon^{s'-1}\frac{l_2}{h}\left(q_1 e^{\frac{2\pi}{l_1}|\operatorname{Im} x|}\right)^{|n_0|}\right). \tag{2.22}$$

Из этого неравенства при $\operatorname{Im} x = 0$ и того, что $\frac{l_2}{h} q_1^{|n_0|} \leqslant \varepsilon^2$ в силу (2.17), следует

$$F_1 = 0, \quad |F_{s'}(y, k_0)| \leqslant 2UC_{s'-1}\varepsilon^{s'}, \quad s' \geqslant 2. \tag{2.23}$$

Равенство $F_1 = 0$ выполнено в силу условий нормировки (1.3).

Из (2.19) и (2.23) следует, что

$$\left|\frac{e^{(k_0^2-k_n^2)y}}{e^{(k_n^2-k_0^2)l_2}-1}\int_y^{y+l_2}\left(\sum_{i=2}^{s-1} F_i c_a^{s-i}\right)dy'\right| \leqslant \tag{2.24}$$

$$\leqslant 2Uq^{|n|}J_{n,0}\left(\sum_{i=2}^{s-1} C_{i-1}C_{s-i}\right) \times \begin{cases}\varepsilon^{s+1}, & n\neq n_0,\\ \varepsilon^{s-1}, & n = n_0,\end{cases}$$

где константа $J_{n,0}$ равна

$$J_{n,0} = \frac{|e^{\operatorname{Re}(k_n^2-k_0^2)l_2}-1|}{|\operatorname{Re}(y_n^2-k_0^2)|\,|e^{(k_n^2-k_0^2)l_2}-1|}. \tag{2.25}$$

Для оценки величины

$$I_{n,s} = \frac{e^{(k_0^2-k_n^2)y}}{e^{(k_n^2-k_0^2)l_2}-1}\int_y^{y+l_2}\langle\psi_n^+ u\varphi_{s-1}\rangle_x\,dy' \tag{2.26}$$

оценим коэффициенты Фурье разложения по x функции $(u\varphi_{s-1}\psi_0^+)$

$$\left|\langle e^{\frac{2\pi i n}{l_1}x} u\varphi_{s-1}\psi_0^+\rangle_x\right| \leqslant U\sum_{k\neq 0} q_1^{|k|}\,|\tilde{c}_{n-k}^{s-1}| \leqslant \tag{2.27}$$

$$\leqslant UC_{s-1}q_1^{|n|}\times\begin{cases}\varepsilon^{s-2}\left(\frac{l_2}{h}+\varepsilon^2\right)\leqslant\varepsilon^{s-2}\left(\frac{l_2}{h}+1\right), & n\neq n_0,\\ \varepsilon^s, & n=n_0.\end{cases}$$

(Суммирование в (2.27) идет по $k\neq 0$, т. к. нулевой коэффициент Фурье функции u отсутствует в силу (1.3).) Из (2.27) и того, что

$$\psi_n\psi_0^+ = \exp\left(\frac{2\pi i n}{l_1}x + (k_0^2 - k_n^2)\,y\right)$$

$$|I_{n,1}| \leqslant UJ_{n,0}q_1^{|n|}, \tag{2.28}$$

$$|I_{n,s}| \leqslant UC_{s-1}q_1^{|n|}J_{n,0}\times\begin{cases}\varepsilon^{s-2}(l_2h^{-1}+1), & n\neq n_0,\\ \varepsilon^s, \quad n=n_0, & s\geqslant 2.\end{cases}$$

Если $k_0 \notin R_{NM}$, то

$$J_{n,0} \leqslant \min\left(\frac{l_2}{h},\ |\operatorname{Re}(k_n^2-k_0^2)^{-1}|\right). \tag{2.29}$$

При этом

$$\sum_{n\neq n_{0,0}} J_{n,0} \leqslant \sum_{n\neq n_{0,0}} |\operatorname{Re}(k_n^2-k_0^2)^{-1}| \leqslant \frac{l_1}{\pi}\,|\operatorname{Re} k_0^{-1}|\,\ln\left(\frac{4l_1}{\pi}\,|\operatorname{Re} k_0|\right). \tag{2.30}$$

Из (2.17) следует, что константы f_n, определенные следующим равенством:

$$f_n = \varepsilon^{-3}\left(\frac{l_2}{h}+1\right)J_{n,0}, \quad n \neq n_0, \tag{2.31}$$

удовлетворяют условию (2.21). Суммируя (2.28) и (2.24) и учитывая (2.31), получим искомые неравенства (2.19).

Для $|\operatorname{Re} k_0| < N_1$, $|\operatorname{Im} k_0| > N_2$ мы докажем, что для всех n (включая $n = n_0$) выполнено первое из неравенств (2.19). При этом константы f_n удовлетворяют условию (2.21), в котором суммирование идет по всем n. Отметим, что в силу индуктивного предположения левая часть в (2.24) оценивается при всех n первой строкой правой части этого неравенства.

Продеформируем контур интегрирования в (2.26) в комплексную область так, чтобы он соединял сначала точки y, $y' \pm i\tau_2$ ($y' = \operatorname{Re} y$), затем $y' \pm i\tau_2$, $y' \pm i\tau_2 + l_2$ и $y' \pm i\tau_2 + l_2$, $y + l_2$ прямыми отрезками. Обозначим через $I^j_{n,s}$, $j = 1, 2, 3$ интегралы (2.26) вдоль каждого из этих отрезков. В силу аналитичности u и φ_{s-1} при $|\operatorname{Im} y| < \tau_2$

$$I_{n,s} = I^1_{n,s} + I^2_{n,s} + I^3_{n,s}. \tag{2.32}$$

Имеем

$$I^1_{n,s} + I^3_{n,s} = e^{(k_0^2 - k_n^2)\,y}\int\limits_{y}^{y+l_2}\langle\psi_n^+ u\varphi_{s-1}\rangle_x\,dy'. \tag{2.33}$$

Учитывая, что в силу предположения индукции левая часть в (2.27) может быть в рассматриваемом случае оценена при всех n величиной $UC_{s-1}q_1^{|n|}\varepsilon^s$, $s \geqslant 2$, получим

$$|I^1_{n,s} + I^3_{n,s}| \leqslant Uq_1^{|n|}\,|\operatorname{Im}|(k_n^2 - k_0^2)^{-1}| \times \begin{cases}1, & s = 1,\\ C_{s-1}\varepsilon^s, & s \geqslant 2.\end{cases} \tag{2.34}$$

Для второго слагаемого имеем

$$|I^2_{n,s}| \leqslant UI_{n,0}e^{-\tau_2|\operatorname{Im}(k_n^2 - k_0^2)|}q_1^{|n|} \times \begin{cases}1, & s = 1,\\ C_{s-1}\varepsilon^s, & s \geqslant 2.\end{cases} \tag{2.35}$$

Итак, для величины $I_{n,s}$ справедливы два типа неравенств: одно вытекает из (2.34), (2.35), а второе — это неравенство (2.28), которое в силу измененного в указанной области предположения индукции (первое из неравенств (2.19) справедливо для всех n) приобретает вид

$$|I_{n,s}| \leqslant UC_{s-1}J_{n,0}\varepsilon^s q_1^{|n|}, \quad n \neq 0.$$

Определим величины f_n формулами

$$f_n = \varepsilon^{-2}J_{n,0}, \quad |n| > \frac{2N_1 l_1}{\pi}, \qquad f_n = \varepsilon^{-2}\left|\frac{2\pi n}{l_1}\operatorname{Im} k_0\right|^{-1}, \quad |n| \leqslant \frac{2N_1 l_1}{\pi}. \tag{2.36}$$

Из неравенств (2.17) следует, что они удовлетворяют условию (2.21). Используя для оценки $|I_{n,s}|$ при $|n| \leqslant \frac{Nl_1 l_1}{\pi}$ неравенства (2.34) и (2.35), а при $|n| > \frac{2N_1 l_1}{\pi}$ модифицированное неравенство (2.28), получим искомое утверждение леммы.

Из (2.20) следует, что константы C_s являются коэффициентами разложения в нуле

$$C(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s\varepsilon^{s+1} \tag{2.37}$$

аналитической ветви уравнения (2.15). Значит, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ этот ряд абсолютно сходится. Следовательно, ряды (1.19) и (1.21) определяют аналитические функции $\Psi(x, y, k_0)$ и $F(y, k_0)$, $k_0 \in \widetilde{R}$. В силу второго из неравенств $(2.14)_0$, а также (2.22), имеем при $|\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1/2$

$$|\Psi(x, y, k_0)| \geqslant 1 - 2C(\varepsilon) > 0. \tag{2.38}$$

Поэтому блоховская функция $\widetilde{\psi}$, определенная формулой (1.30), аналитична при $k_0 \in \widetilde{R}$, $|\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1/2$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant \tau_2$ и не обращается в нуль. Лемма доказана.

Построим теперь блоховские решения в резонансных областях. Пусть, как и в лемме 1.3, I — конечный набор резонансных индексов.

Лемма 2.2. *Если для всех $n \notin I$, $\alpha \in I$ имеют место неравенства*

$$\sum_{|n|\geqslant N} J_{n,\alpha} + \sum_{|n|<N} \left(\left| \frac{4\pi n}{l_1} \operatorname{Im} k_0 \right|^{-1} + q_2^{2\,|\operatorname{Im} k_0|\,|n|} \right) \leqslant \varepsilon^2 \tag{2.39}$$

при некотором целом N, где $\mathcal{J}_{n,\alpha}$ даются формулой (2.25) *с заменой k_0 на k_α, то ряды* (1.35) *и* (1.37) *абсолютно сходятся и определяют аналитические функции $F^\alpha_\beta(y, w_1)$ и $\Psi^\alpha(x, y, w_1)$, удовлетворяющие уравнению* (1.36).

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.1. Соответствующие оценки для членов этих рядов имеют вид

$$|\widetilde{c}_n^{s,\alpha}| \leqslant C_s \varepsilon^{s+1} q_1^{|n-\alpha|} f_{n,\alpha} \widetilde{c}_n^{s,\alpha} = c_n^{s,\alpha} e^{(k_\alpha^2 - k_n^2)\,y}, \tag{2.40}$$

$$\sum_{n \notin I} f_{n,\alpha} \leqslant 1, \tag{2.41}$$

$$|F^\alpha_{\beta s} l^{(k_\alpha^2 - k_\beta^2)\,y}| \leqslant \begin{cases} U\Phi_{s-1}\varepsilon^s q_1^{|\alpha-\beta|}, & s \geqslant 2, \\ U q_1^{|\alpha-\beta|}, \quad \alpha \neq \beta, & s = 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

Рассмотрим следствия этого утверждения. Пусть $k_0 \notin R_0$, но принадлежит одной из окрестностей R_{NM} резонансных точек. Тогда, если в качестве I выбрать $\{0, -2N\}$, то неравенства (2.39) будут выполнены. Значит, для $w_1 \in w_1(R_{NM})$ определены аналитические функции $\Psi^\alpha(x, y, w_1)$ и $F^\alpha_\beta(y, w_1)$, $w_1 \in \widetilde{R}_{|N,M|}$, такие, что имеет место (1.36). Матрица $T(y, w_1)$, определенная из (1.44), также аналитична в области комплексной плоскости $\widetilde{R}_{|N,M|}$, на которую отображаются $R_{N,M}$ и $R_{-N,-M}$ функцией $w_1(k)$. Отсюда следует, что блоховские решения уравнения (1.1), определенные формулами (1.50, 1.51) для каждой точки двулистного накрытия $\hat{R}_{|N,M|}$ над $\widetilde{R}_{|N,M|}$, задаваемого уравнением (2.43), являются мероморфной функцией на $\hat{R}_{|N,M|}$:

$$\begin{gathered} \widetilde{w}_2^2 - \widetilde{w}_2 \operatorname{Sp}(\hat{T}^\alpha_\beta(w_1)\, w_{2\beta}) + \det(\hat{T}^\alpha_\beta(w_1)\, w_{2\beta}) = 0, \\ w_1 = w_1(k_0), \quad k_0 \in R_{N,M}, \quad \alpha, \beta = 0, \ -2N. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Полюсы $\widetilde{\psi}(x, y, Q)$ совпадают с полюсами h^α и поэтому не зависят от x, y, $Q \in \hat{R}_{|N,M|}$.

Далее будет предполагаться, что константа ε выбрана так, что помимо неравенств (2.14) выполнено и неравенство

$$\varepsilon \leqslant \frac{h}{2(1 + h \cdot 2)\, l_2 U}. \tag{2.44}$$

В этом случае дискриминант уравнения (2.43) может обращаться в нуль лишь внутри области $\hat{R}_{|N,M|}$. Это утверждение следует из того, что на границе $R_{N,M}$ и $R_{-N,-M}$ справедливы как условия леммы 2.1, так и леммы 2.2. Из построения блоховских решений $\widetilde{\psi}(x, y, k_0)$ и $\widetilde{\psi}(x, y, k_0')$, $w_1 = w_1(k_0) = w_1(k_0')$, следует, что переход к ним соответствует процессу диагонализации матрицы $\hat{T}^\alpha_\beta(w_1) w_{2\beta}$. Поэтому собственные значения этой матрицы совпадают на границе с $w_2(k_0')$, $w_2(k_0')$, определенными формулой (1.33) для нерезонансной области. Так как в силу (2.23)

$$\left|\int_0^{l_2} F(y, k_0)\,dy\right| \leqslant \varepsilon l_2 UC(\varepsilon), \tag{2.45}$$

то имеем

$$\left|\frac{\widetilde{w}_2(k_0')}{\widetilde{w}_2(k_0)}-1\right| \geqslant \left|\frac{w_2(k_0')}{w_2(k_0)}-1\right| - 2\left|\frac{w_2(k_0')}{w_2(k_0)}\right| \varepsilon l_2 UC(\varepsilon) \geqslant \tag{2.46}$$

$$\geqslant h - 2\varepsilon l_2 U\Phi(\varepsilon)(1+2h) \geqslant h(1-C(\varepsilon)) > 0.$$

Следовательно, на границе $\widetilde{R}_{|N,M|}$ уравнение (2.43) имеет различные корни, и его дискриминант может иметь нули лишь внутри области.

Все утверждения, доказанные выше, справедливы для любого потенциала, удовлетворяющего условиям (2.13). В частности, для потенциалов $u_\tau = \tau u(x, y)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Так как при такой деформации число нулей дискриминанта внутри области сохраняется, а при $\tau = 0$ имеем у него один двукратный нуль в точке $w_1^{MN} = w_1(k_{NM})$, то мы приходим к заключению, что дискриминант уравнения (2.43) имеет либо два простых нуля, либо один двукратный.

Определение. Пара целых чисел ($N > 0$, M) такая, что $k_{NM} \in \widetilde{R}$, будет называться *отмеченной*, если дискриминант уравнения (2.43) имеет двукратный нуль.

В этом случае $\hat{R}_{|N,M|}$ приводима, т. е. распадается на два листа. При этом блоховская функция $\widetilde{\psi}(x, y, k_0)$ продолжается аналитически в области $R_{N,M}$ и $R_{-N,-M}$, которые являются распавшимися листами $\hat{R}_{|N,M|}$. Для неотмеченных пар двулистная поверхность $\hat{R}_{|N,M|}$ неособая.

Лемма 2.3. *Блоховская функция* $\widetilde{\psi}(x, y, Q)$ *имеет один простой полюс на* $\hat{R}_{|N,M|}$ (*для неотмеченных пар* $N > 0$, M).

Прежде чем приступить к доказательству леммы, отметим, что полностью аналогично предшествующему доказывается, что ряды теории возмущений для формально сопряженной блоховской функции $\widetilde{\psi}^+(x, y, k_0)$ сходятся в нерезонансной области и определяют там аналитическую функцию. Из следствия леммы 1.4 вытекает, что $\widetilde{\psi}^+(x, y, Q)$ определена, так же как и $\widetilde{\psi}$ на $\hat{R}_{|N,M|}$, где она мероморфна, а ее полюсы не зависят от x, y.

Доказательство. Рассмотрим произвольную периодическую вариацию δu потенциала u. Аналогично доказательству равенства (1.6) (см. также [22, 52]) можно получить

$$i\delta E\,\langle\langle\widetilde{\psi}\widetilde{\psi}^+\rangle_x - i\delta p\,\langle\widetilde{\psi}_x\widetilde{\psi}^+ - \widetilde{\psi}\widetilde{\psi}_x^+\rangle_y + \langle\langle\widetilde{\psi}\delta u\widetilde{\psi}^+\rangle\rangle = 0. \tag{2.47}$$

Из этого равенства следует, что функции $\langle\widetilde{\psi}\widetilde{\psi}^+\rangle_x$ и $\langle\widetilde{\psi}_x\widetilde{\psi}^+ - \widetilde{\psi}\widetilde{\psi}_x^+\rangle_y$ не могут иметь совпадающие нули. Действительно, в противном случае в этой точке $\langle\langle\widetilde{\psi}\delta u\widetilde{\psi}^+\rangle\rangle = 0$ (где $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ означает среднее по x, y), что не может быть верно для всех δu. Воспользуемся теперь равенством (1.6). По доказанному нули функции $\langle\widetilde{\psi}\widetilde{\psi}^+\rangle_x$ совпадают с нулями dp, которые, в свою очередь, совпадают с нулями дискриминанта уравнения (2.43). Значит, их всего два. Вне резонансной области $\langle\widetilde{\psi}\widetilde{\psi}^+\rangle_x \neq 0$. Следовательно, в области $\hat{R}_{|N,M|}$ числа нулей и полюсов этой функции равны, т. е. функции $\widetilde{\psi}$ и $\widetilde{\psi}^+$ имеют в этой области по одному простому полюсу. Лемма доказана.

С топологической точки зрения «вклейка» вместо двух областей $R_{N,M}$ и $R_{-N,-M}$ двулистной накрывающей $\hat{R}_{|N,M|}$, на которую аналитически продолжается блоховская функция $\tilde{\psi}$ из нерезонансной области, — это простейшая перестройка, соответствующая «приклеиванию ручки» между двумя резонансными точками $k_{N,M}$ и $k_{-N,-M}$.

Рассмотрим продолжение $\tilde{\psi}$ внутрь центральной резонансной области R_0, заданной неравенствами (2.16), в которых, не ограничивая общности, можно считать, что $N_1' = \frac{l_1}{2\pi} N_1$ — целое. Функция w_1 (2.3) отображает R_0 как $2N_1'$-листное накрытие кольца в w_1-плоскости $\exp(-N_2 l_1) < w_1 < \exp(N_2 l_1)$.

Выберем в качестве набора резонансных индексов I для w_1, удовлетворяющих предшествующим неравенствам, все индексы, для которых $|\operatorname{Re} k_\alpha| < N_1$. Тогда выполнены условия применимости леммы 2.2. Аналогично предшествующему получаем, что $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ из нерезонансной области продолжается на риманову поверхность $\hat{R}_0$, которая задается над кольцом $\exp(-N_2 l_1) < w_1 < \exp(N_2 l_1)$ характеристическим уравнением (1.49) для матрицы размером $2N_1' \times 2N_1'$-матрицы монодромии квазиблоховских решений, построенных как возмущения решений $\exp(ik_\alpha x - k_\alpha^2 y)$ свободного уравнения (2.1). В силу леммы 2.2 эта матрица $\hat{T}_\beta^\alpha(w_1) w_{2\beta}$ аналитична по w_1 в области своего определения. Таким образом, мы приходим к лемме.

Л е м м а 2.4. *Блоховская функция $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ аналитически продолжается из нерезонансной области на $\hat{R}_0$, где она является мероморфной функцией, полюсы которой не зависят от x, y. Их число g_0 не превосходит числа пар $(N > 0, M)$ таких, что $k_{NM} \in R_0$. В общем положении, когда $\hat{R}_0$ неособая, g_0 равно роду $\hat{R}_0$.*

Забегая вперед, укажем, что для вещественных потенциалов $u(x, y)$ поверхность $\hat{R}_0$ всегда неособая.

Обозначим через Γ риманову поверхность, полученную из комплексной k-плоскости «вклейкой» $\hat{R}_0$ вместо R_0 и «вклейкой» $\hat{R}_{|N,M|}$ вместо $R_{N,M}$ и $R_{-N,-M}$ (для неотмеченных пар $N > 0, M$). Эта поверхность всюду, кроме, может быть, конечного числа точек в области $\hat{R}_0$, является гладкой.

П е р е о б о з н а ч е н и я. До сих пор блоховские решения уравнения (1.1), построенные с помощью теории возмущений, обозначались через $\tilde{\psi}$. В дальнейшем мы для краткости будем опускать знак волны, обозначая их через $\psi(x, y, Q)$. Аналогично будем опускать знак волны над собственным значением $w_2(Q)$ оператора сдвига на период по y.

Т е о р е м а 2.1. *Риманова поверхность Γ изоморфна «спектральному множеству Флоке» для оператора (1.1). Блоховские решения $\psi(x, y, Q)$ этого уравнения, нормированные условием $\psi(0, 0, Q) = 1$, мероморфны на Γ. Полюсы ψ не зависят от x, y. В каждой из областей $\hat{R}_{|N,M|}$ функция ψ имеет по одному простому полюсу. В области $\hat{R}_0$ она имеет g_0 полюсов, где g_0 в общем положении, когда $\hat{R}_0$ неособая, равно роду $\hat{R}_0$. Вне $\hat{R}_{|N,M|}$ и $\hat{R}_0$ функция ψ голоморфна и не имеет нулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения теоремы, кроме первого, следуют из самой конструкции Γ. Каждой точке $Q \in \Gamma$ соответствуют собственные значения $w_1(Q)$ и $w_2(Q)$ операторов сдвига на периоды по x и y. Они определяют отображение Γ в C^2 с координатами w_1, w_2. То, что оно устанавливает изоморфизм между Γ и «спектральным множеством Флоке», вытекает из утверждения следующей леммы.

Л е м м а 2.5. *Для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (1.9) (т. е. $f(x + l_1) = w_0 f(x)$), ряд*

$$S = \sum_n \psi(x, y, Q_n) \frac{\langle f \psi_n^+ \rangle_x}{\langle \psi_n^+ \psi_n \rangle_x} \tag{2.48}$$

сходится к $f(x)$. (Здесь, как и ранее, через $Q_n = Q(w_0)$ обозначены точки Γ такие, что $w_1(Q_n) = w_{10}$, $\psi_n = \psi(x, y, Q_n)$.)

Доказательство леммы в частном случае конечнозонных операторов было впервые предложено в [52]. Оно практически без изменений переносится на общий случай. Из леммы 1.1 и того, что функции $\langle\psi\psi^+\rangle_x$ и $\langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y$ не имеют общих нулей, следует, что дифференциал

$$d\Omega = \frac{dp}{\langle\psi\psi^+\rangle_x} = \frac{dE}{\langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y} \tag{2.49}$$

голоморфен на Γ и имеет нули в полюсах ψ и ψ^+.

Рассмотрим интеграл

$$S_N = \frac{1}{l_1} \int\limits_{C_N} \int\limits_0^{l_1} f(x') \frac{\psi(x, y, Q)\,\psi^+(x', y, Q)}{1 - w_{10} w_1^{-1}(Q)}\, d\Omega\, dx', \tag{2.50}$$

где в качестве контура C_N выберем границу квадрата $|\operatorname{Re} k| \leqslant \frac{\pi}{2l_1}(2N+1)$, $|\operatorname{Im} k| \leqslant \frac{\pi}{2l_1}(2N+1)$, где N — достаточно большое целое. Подынтегральное выражение имеет полюсы в точках Q_n, а его вычеты в этих точках равны соответствующим членам ряда (2.48). С другой стороны, используя неравенство (2.22), легко получить, что S_N равно сумме первых N членов обычного ряда Фурье для функции $f(x)$. Устремляя N к бесконечности, получим искомое утверждение.

Пусть (w_{10}, w_2') — какая-либо точка спектрального множества Флоке и ψ' — соответствующая ей блоховская функция. Если w_2' не совпадает ни с одним из значений $w_{2n} = w_2(Q_n)$, то

$$\langle\psi'(x, y, w_{10}, w_2')\,\psi^+(x, y, Q_n)\rangle_x = 0, \tag{2.51}$$

поскольку левая часть не зависит от y, а с другой стороны она при сдвиге y на l_2 умножается на $w_2' w_{2n}^{-1}$. Из леммы 2.5 следует, что тогда $\psi' \equiv 0$. Теорема доказана.

Подчеркнем еще раз, что она справедлива для всех (в том числе и комплексных) потенциалов, удовлетворяющих условию (2.13). Для вещественных $u(x, y)$ ей можно придать более эффективную форму. Прежде чем сделать это, приведем следующее определение.

Определение. Потенциал $u(x, y)$ называется *конечнозонным*, если для него все пары $(N > 0, M)$, кроме конечного числа, являются отмеченными, т. е. кривая Γ имеет конечный род.

Для конечнозонных потенциалов соответствующая им поверхность Γ вне некоторой конечной области совпадает с окрестностью бесконечности на обычной комплексной плоскости. Поэтому она может быть компактифицирована одной «бесконечно удаленной» точкой $P_0 = \infty$. В дальнейшем мы сохраним обозначение Γ для соответствующей компактной римановой поверхности — алгебраической кривой.

Следствие. *Блоховские решения* $\psi(x, y, Q)$, $Q \in \Gamma$, *уравнения* (1.1) *для конечнозонных потенциалов и определены на компактной римановой поверхности* Γ. *Вне выделенной точки* P_0 *функция* ψ *мероморфна, имеет* g *полюсов, не зависящих от* x, y, *где* g *в общем положении, когда* Γ *неособая, равно роду* Γ. *В окрестности* P_0 *функция* $\psi(x, y, Q)$ *имеет вид*

$$\psi = e^{ikx - k^2 y}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, y)\, k^{-s}\right), \tag{2.52}$$

где $k^{-1} = k^{-1}(Q)$ *— локальный параметр в окрестности* P_0.

Все утверждения следствия, кроме последнего, непосредственно вытекают из определения конечнозонных потенциалов и теоремы 2.1. Для получения (2.52) воспользуемся тем, что в окрестности бесконечности $\psi(x, y, k)$

дается рядами теории возмущений для нерезонансного случая. Из (2.22) следует, что функция

$$\psi(x,\ y,\ k)\,e^{-ikx+k^2y}, \tag{2.53}$$

которая голоморфна в проколотой окрестности P_0, ограничена. Поэтому она голоморфна в этой окрестности и может быть разложена в ряд

$$\psi(x,\ y,\ k)\,e^{-ikx+k^2y}=\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s(x,\ y)\,k^{-s}. \tag{2.54}$$

Из нормировки (1.8) следует, что $\xi_0=1$, и следствие доказано.

Назовем набор пар комплексных чисел $\pi=\{(p_s',\ p_s'')\}$, где s пробегает конечное или бесконечное подмножество пар целых чисел $(N>0,\ M)$, допустимым, если

$$\operatorname{Re}p_s'=\operatorname{Re}p_s''=\frac{\pi N}{l_1},\qquad |p_s'-k_s|=o\left(\frac{1}{|k_s|}\right),$$
$$|p_s''-k_s|=o\left(\frac{1}{|k_s|}\right), \tag{2.55}$$

и отрезки $[p_s',\ p_s'']$, параллельные мнимой оси, не пересекаются.

Для каждого допустимого набора π построим риманову поверхность $\Gamma(\pi)$, проводя вертикальные разрезы между парами точек p_s', p_s'' и $-\overline{p}_s'$, $-\overline{p}_s''$ и склеивая левый берег правого разреза с правым берегом левого разреза и наоборот. После такой склейки каждой паре разрезов $(p_s',\ p_s'')$ и $(-\overline{p}_s',\ -\overline{p}_s'')$ соответствует негомологичный нулю цикл, который будет обозначаться a_s.

Теорема 2.2. *Для любого вещественного периодического потенциала $u(x,\ y)$, аналитически продолжимого в окрестность вещественных x, y, блоховские решения уравнения* (1.1) *с* $\sigma=1$ *параметризуются точками Q римановой поверхности $\Gamma(\pi)$ для некоторого допустимого набора π. Соответствующая функция $\psi(x,\ y,\ Q)$ мероморфна на $\Gamma(\pi)$ и имеет по одному простому полюсу на каждом из циклов a_s.*

Доказательство. Для вещественных потенциалов u комплексное сопряжение переводит блоховские решения уравнения (1.1) в блоховские решения того же уравнения. Поэтому соответствие

$$\tau:\ (w_1,\ w_2)\to(\overline{w}_1,\ \overline{w}_2) \tag{2.56}$$

является антиголоморфной инволюцией спектрального множества Флоке, которая в силу теоремы 2.1 индуцирует антиголоморфную инволюцию «спектральной кривой» Γ. В наличии такой антиинволюции можно убедиться и непосредственно из конструкции Γ. В частности, из формул леммы 1.2 следует, что в нерезонансной области τ имеет вид $k_0\to-\overline{k}_0$ и при этом $\psi(x,\ y,\ k_0)=\overline{\psi}(x,\ y,\ -\overline{k}_0)$.

Рассмотрим окрестности $R_{N,M}$ резонансных точек, лежащих вне центральной области R_0. Инвариантность $\hat{R}_{|N,M|}$ относительно τ означает, что два нуля дискриминанта уравнения (2.43) либо оба лежат на прямой $\operatorname{Re}k=\pi N/l_1$, либо оба расположены симметрично вне этой прямой. Последнее невозможно, поскольку на пересечении этой прямой с границей $R_{N,M}$ знаки мнимых частей собственных значений оператора сдвига на период по y различны (для свободного уравнения (2.1) это видно непосредственно из формулы (2.3), а для общего оператора (1.1) — из оценки (2.46)). Следовательно, внутри отрезка прямой существует точка, в которой w_2 вещественно. Таким образом, оба нуля дискриминанта, которые мы обозначим через p_s', p_s'', лежат на прямой $\operatorname{Re}k=\pi N/l_1$. Разрез между ними соответствует циклу a_s, который выделен условиями, что на нем оба мультипликатора w_1 и w_2 вещественны, $s=(N,\ M)$. Этот цикл есть «запрещенная зона», возникшая на месте резонансной точки k_s. Докажем, что полюс блоховской функции лежит на цикле a_s. На этом цикле функции ψ, ψ^+ вещественны. Поскольку

$\psi(x, y, Q) = \overline{\psi}(x, y, \tau(Q))$, то полюсы ψ должны быть инвариантны относительно τ. Так как на $\hat{R}_{|N,M|}$ имеется лишь один полюс ψ, то он должен быть неподвижен относительно τ, а значит, принадлежит неподвижному циклу a_s.

Для достаточно малых потенциалов $u(x, y)$, когда центральная область R_0 пуста, теорема доказана. Будем увеличивать $u(x, y)$. Описанная структура Γ топологически устойчива и может разрушиться лишь при слиянии циклов a_s для различных s. (В этот момент Γ будет иметь особенности.) Препятствием к подобному слиянию является условие периодичности u. Условие периодичности u по x разделяет циклы a_s и $a_{s'}$, если $N \neq N'$. Препятствием к слиянию циклов над отрезками одной прямой $\operatorname{Re} k = \pi N/l_1$ является периодичность u по y. Если разрезать Γ вдоль циклов a_s и вдоль прямой $\operatorname{Re} k = 0$, то в области $\operatorname{Re} k > 0$ определена однозначная ветвь квазиэнергии $E(Q)$. Поскольку дифференциал dE чисто мнимый на a_s, то вещественная часть $E(Q)$ непрерывно продолжается на a_s и равна там тождественно $\pi M/l_2$, $s = (N, M)$. Таким образом, циклы a_s разделены значениями вещественных частей квазиимпульса и квазиэнергии и не могут сливаться. Поэтому доказываемая теорема справедлива для всех, а не только малых u.

Из построения Γ следует, что для достаточно больших $|s| = |N| + |M|$ точки p'_s, p''_s локализованы в окрестностях R_s резонансных точек k_s, что и отражено в (2.55). В рассматриваемом случае потенциалов u, аналитических в некоторой окрестности вещественных x, y, можно показать, что

$$|p'_s - p''_s| = O(e^{-\alpha|N|-\beta|M|}). \tag{2.57}$$

Это соотношение не доказывается в данной работе и не включается в определение допустимых наборов в связи со следующими обстоятельствами.

Описанное в теореме 2.2 представление Γ хорошо известно (см. [53, 54]) в спектральной теории оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом $u(x)$. Соответствующие кривые Γ являются гиперэллиптическими. Им отвечают наборы p'_s, p''_s для $s = (N, 0)$. Причем $p'_s = \overline{p}''_s$. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих u, можно выбрать $d_s = \operatorname{Im} p'_s$ и точки γ_s по одной на каждом из циклов. В терминах этих параметров процесс аппроксимации u конечнозонными потенциалами u_G выглядит очень просто. Потенциал u_G соответствует набору данных, в котором полагается $d_s^G = d_s$, $|s| \leqslant G$, $d_s^G = 0$, $|s| > G$ ([53]).

Такой подход к доказательству аппроксимируемости произвольного периодического потенциала конечнозонными в нестационарном случае сильно затруднен, поскольку параметры p'_s, p''_s не независимы (они были зависимыми и в стационарном случае, но там их связь была явной). Как будет видно в дальнейшем, любым конечным допустимым наборам соответствуют конечнозонные потенциалы, периодические по x и квазипериодические по y (см. § 4). Условие периодичности по y приводит к тому, что среди величин p'_s, p''_s независимыми являются лишь половина (например, p'_s или $p'_s - p''_s$). Поэтому, если пытаться строить процесс аппроксимации периодическими конечнозонными потенциалами, то необходимо «захлопывать» зоны $[p'_s, p''_s]$ для больших $|s|$, подправляя одновременно оставшиеся. В принципе, этот путь возможен, но технически довольно трудно реализуем. Ниже мы приведем доказательство теоремы аппроксимации, основанное на другой идее, которая применима и в случае спектральной теории операторов, у которых полюсы блоховских функций не лежат на неподвижных овалах соответствующей антиинволюции (к числу таких случаев относится спектральная теория операторов, используемых при построении конечнозонных решений уравнения sine-gordon или нелинейного уравнения Шредингера с отталкиванием и т. д.). Поскольку в ходе подобного доказательства не будет явно использоваться параметризация u с помощью допустимых наборов π, то мы и не уточняем необходимые и достаточные условия, выделяющие допустимые наборы.

§ 3. Теорема аппроксимации

Пусть потенциал $u_1(x, y)$ уравнения (1.1) с $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$ является тригонометрическим полиномом. Поскольку

$$(3.1)\quad \psi(x, y, k_{NM})\,\psi^+(x, y, k_{-N,-M}) = \exp\left(\frac{2\pi i N x}{l_1} + \frac{2\pi i M y}{l_2}\right)$$

(в этом параграфе мы придерживаемся первоначальных определений и обозначений первого параграфа и начала второго, т. е. $\psi(x, y, k)$ — решение свободного уравнения (2.1), $\widetilde{\psi}(x, y, Q)$ — решения уравнений типа (1.1)), то это означает, что для некоторого G

$$(3.2)\quad \langle\langle \psi(x, y, k_{N,M})\psi^+(x, y, k_{-N,-M})u_1(x, y)\rangle\rangle = 0,$$
$$|N| + |M| > G.$$

Из формул леммы 1.2 следует, что при условии (3.2) член первого порядка теории возмущений $\varphi_1(x, y, k_0)$ не имеет полюсов в резонансных точках $k_{N,M}$ при $|N| + |M| > G$ и может быть доопределен в них по непрерывности. Полюсы в этих точках возникнут уже в следующем порядке теории возмущений. Основная идея последующей конструкции опирается на возможность построения формального ряда $U(x, y)$ с главным членом u_1, последующие члены которого подбираются так, чтобы соответствующие члены ряда теории возмущений не имели полюсов в k_{NM}, $|N| + |M| > G$.

Л е м м а 3.1. *Пусть $u_1(x, y)$ — периодическая функция, удовлетворяющая условиям (3.2). Тогда существует единственный формальный ряд*

$$(3.3)\quad U(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x, y),$$

в котором для $s \geqslant 2$ выполнены равенства

$$(3.4)\quad u_s^{NM} = \langle\langle \psi(x, y, k_{NM})\,\psi^+(x, y, k_{-N,-M})\,u_s(x, y)\rangle\rangle = 0,$$
$$|N| + |M| \leqslant G,$$

и такой, что для любого $k_0 \neq k_{NM}$, $|N| + |M| \leqslant G$, существует единственный формальный ряд

$$(3.5)\quad F(y, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(y, k_0),$$

для которого уравнение

$$(3.6)\quad (\sigma\partial_y - \partial_x^2 + U(x, y))\,\Psi(x, y, k_0) = F(y, k_0)\,\Psi(x, y, k_0)$$

имеет формальное решение вида

$$(3.7)\quad \Psi(x, y, k_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(x, y, k_0), \quad \varphi_0 = \psi(x, y, k_0),$$

удовлетворяющее соотношениям

$$(3.8)\quad \langle \Psi(x, y, k_0)\,\psi^+(x, y, k_0)\rangle_x = 1,$$

$$(3.9)\quad \begin{aligned} \Psi(x + l_1, y, k_0) &= w_1(k_0)\Psi(x, y, k_0);\\ \Psi(x, y + l_2, k_0) &= w_2(k_0)\Psi(x, y, k_0). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.6) эквивалентно системе

$$(3.10)\quad (\sigma\partial_y - \partial_x^2)\,\varphi_s = \sum_{i=1}^{s} (F_i - u_i)\,\varphi_{s-i}.$$

Для $k_0 \neq k_{NM}$ члены рядов (3.5) и (3.7) даются формулами, полностью аналогичными (1.25—1.29):

$$(3.11)\quad F_s(y, k_0) = \sum_{i=1}^{s} \langle \psi_0^+ u_i \varphi_{s-i} \rangle_x, \qquad \psi_0^+ = \psi^+(x, y, k_0),$$

$$(3.12)\qquad \varphi_s = \sum_{n \neq 0} c_n^s(y, k_0)\, \psi_n(x, y), \quad \psi_n = \psi\left(x, y, k_0 + \frac{2\pi n}{l_1}\right),$$

$$(3.13)\qquad c_n^s = \sigma^{-1} \frac{w_{2n}}{w_{20} - w_{2n}} \int_y^{y+l_2} \sum_{i=1}^{s} (F_i c_n^{s-i} - \langle \psi_n^+ u_i \varphi_{s-i} \rangle_x)\, dy'.$$

Предположим, что члены u_i ряда (3.3) с номерами $i \leqslant s - 1$ построены так, что $\varphi_i(x, y, k_0)$ не имеют полюсов при $k_0 = k_{NM}$ для $|N| + |M| > G$. Значит, φ_i могут быть определены и в этих точках по непрерывности. Следующий член ряда (3.3) $u_s(x, y)$ находится из условий

$$(3.14)\quad u_s^{NM} = \int_y^{y+l_2} \sum_{i=1}^{s-1} (F_i c_N^{s-i} - \langle \psi^+(x, y', k_{-N,-M})\, u_i \varphi_{s-i}(x, y', k_{NM}) \rangle_x)\, dy', \quad |N| + |M| > G.$$

Равенства (3.14) вместе с нормировочными условиями (3.4) и (1.8) определяют все коэффициенты Фурье периодической функции $u_s(x, y)$. Из (3.14) следует, что $\varphi_s(x, y, k_0)$ не имеет полюсов в k_{NM} при $|N| + |M| > G$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Любой гладкий периодический потенциал $u(x, y)$ уравнения* (1.1) *с* $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$, *аналитически продолжимый в окрестность вещественных x, y, равномерно с любым числом производных аппроксимируется конечнозонными потенциалами.*

Доказательство этого утверждения будет проведено для $\sigma = 1$. На общий случай $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$ оно переносится практически без изменений (как и доказательство теоремы 2.1). Для любого целого G обозначим через $u_0^G(x, y)$ и $u_1^G(x, y)$ периодические функции такие, что

$$(3.15)\qquad u(x, y) = u_0^G(x, y) + u_1^G(x, y), \qquad \langle u_0^G \rangle_x = \langle u_1^G \rangle_x = 0,$$

и такие, что для u_0^G выполнены условия (3.4), а для u_1^G — условия (3.2). В силу леммы 3.1 потенциалу u_1^G однозначно сопоставляется формальный ряд (3.3) $U^G(x, y)$.

Лемма 3.2. *Существует константа G_0, зависящая от величин U, τ_1, τ_2, входящих в* (2.13), *такая, что при $G > G_0$ соответствующий формальный ряд* (3.3) *сходится и определяет гладкий периодический конечнозонный потенциал $U^G(x, y)$ уравнения* (1.1).

Доказательство. Если u удовлетворяет условиям (2.13), то при $|\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant \tau_2$

$$(3.16)\qquad |u_0^G(x, y)| \leqslant U_0^G = U \exp(-\sqrt{2}(\pi\tau_1/l_1 + \pi\tau_2/l_2)\, G).$$

Следовательно,

$$(3.17)\qquad |u_1^G(x, y)| \leqslant U_1^G = U + U_0^G.$$

Как и в доказательстве леммы 2.1, представим коэффициенты c_n^s ряда (3.12) в виде (2.14). Тогда при $k_0 \in R_0$, $k_0 \notin R_{NM}$ имеют место неравенства (2.19) с заменой C_s на $\widetilde{C}_s$, которые рекуррентно определяются формулами

$$(3.18)\qquad \widetilde{C}_1 = 1, \quad \widetilde{C}_s = \frac{l_2}{h} \sum_{i=2}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^{i} U_j \Phi_{i-j} \right) \widetilde{C}_{s-i} + \sum_{i=1}^{s} U_i \Phi_{s-i},$$

$$(3.19)\qquad \Phi_s = 2\widetilde{C}_s, \quad s \geqslant 1.$$

Константы U_i, входящие в (3.18), ограничивают члены ряда (3.3):

$$|u_s(x, y)| \leqslant U_s \varepsilon^{s-1}. \tag{3.20}$$

Для получения рекуррентных формул для U_s отметим, что если неравенства (2.19) справедливы для $k_0 \notin R_0$ (R_0 — центральная резонансная область) и для $k_0 \in R_{NM}$, то они остаются справедливыми и для $k_0 \notin R_0$, $k_0 \in R_{NM}$, поскольку функции $c_n^s(y, k_0)$ регулярны в R_{NM}, и поэтому для них можно воспользоваться принципом максимума модуля. Из этого замечания следует, что если неравенства (2.19) доказаны до порядка $s-1$, то в соотношениях (3.14), определяющих коэффициенты Фурье u_s с индексами N, M, $|N| + |M| > G$ (остальные коэффициенты Фурье равны, в силу (3.4), нулю), можно для $\varphi_i(x, y, k_{NM})$ пользоваться неравенствами (2.22). Окончательно получим

$$U_s = \left(\frac{l_2}{h}\sum_{i=2}^{s-1}\left(\sum_{j=1}^{i} U_j\Phi_{i-j}\right)\widetilde{C}_{s-i} + \sum_{i=1}^{s-1} U_i\Phi_{s-i}\right)e^{-\sqrt{2}(\pi\tau_1/l_1+\pi\tau_2/l_2)G}. \tag{3.21}$$

Из формул (3.18—21) следует, что для достаточно больших G ряд (3.3) сходится и определяет гладкую периодическую функцию $U^G(x, y)$. (Достаточно G выбрать так, чтобы точки k_{NM} с $|N| + |M| > G$ удовлетворяли условию $|\operatorname{Re} k_{NM}| > \frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{N}_0$, $|\operatorname{Im} k_{NM}| > \frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{N}_0$, где $\widetilde{N}_0$ находится, подобно N_1, N_2 в лемме 2.1, из условий сходимости производящих рядов для величин $\widetilde{C}_s$, U_s.) Одновременно мы получаем, что для k_0, $|k_0| > \widetilde{N}_0$, ряд (3.7) сходится и определяет блоховское решение уравнения (3.6), которое аналитично и не обращается в нуль для всех k_0, $|k_0| > \widetilde{N}_0$. Следовательно, U^G является конечнозонным потенциалом. Лемма доказана.

Непосредственно из (3.21) и (3.16) следует, что при $|\operatorname{Im} x| \leqslant \tau_1$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant \tau_2$

$$|u(x, y) - U^G(x, y)| \leqslant M \exp\left(-\sqrt{2}\,(\pi\tau_1/l_1 + \pi\tau_2/l_2)\,G\right), \tag{3.22}$$

где константа M зависит лишь от U, τ_1, τ_2. Следовательно, последовательность конечнозонных потенциалов $U^G(x, y)$ при $G \to \infty$ равномерно с любым числом производных сходится к $u(x, y)$. Теорема доказана.

§ 4. Спектральная теория конечнозонных нестационарных операторов Шредингера

Формально определение конечнозонных потенциалов, данное во втором параграфе, относится лишь к потенциалам уравнения (1.1) с $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$. Однако, хотя при $\operatorname{Re}\sigma = 0$ для общего периодического потенциала $u(x, y)$ спектральное множество Флоке глобально не является римановой поверхностью, ввести понятие конечнозонных потенциалов можно и в этом случае. Более того, общее определение конечнозонных потенциалов относится не только к периодическим, но и к квазипериодическим потенциалам с конечной группой периодов. *Блоховскими решениями* уравнения (1.1) с такими потенциалами u называются решения, для которых логарифмические производные $\psi_x\psi^{-1}$, $\psi_y\psi^{-1}$ имеют ту же группу периодов, что и $u(x, y)$. Множество таких решений — это и есть спектральное множество Флоке. В том случае, когда оно является римановой поверхностью Γ конечного рода $g < \infty$, соответствующий потенциал называется *конечнозонным*. Непустота такого определения следует из решения обратной задачи восстановления u по соответствующим алгебро-геометрическим данным, которая была поставлена и решена в [6, 7] и кратко излагается ниже.

Пусть Γ — неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченной точкой P_0 и фиксированным в ее окрестности локальным параметром $k^{-1}(Q)$, $k^{-1}(P_0)=0$. Для любого набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ общего положения существует единственная функция $\psi(x, y, Q)$ такая, что

(4.1) 1° вне точки P_0 она мероморфна и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s (если они все различны);

2° в окрестности P_0 она имеет вид

$$\psi(x, y, Q)=e^{ikx-\sigma^{-1}k^2y}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(x, y)\,k^{-s}\right), \quad k=k(Q). \tag{4.2}$$

Отметим, что ψ зависит лишь от класса эквивалентности $[k^{-1}]_2$ локального параметра. (Для любого натурального m назовем *m-эквивалентными локальными параметрами* k^{-1}, k_1^{-1}, если имеет место равенство $k_1(Q)=k(Q)+O(k^{-m}(Q))$. Класс эквивалентности будет обозначаться через $[k^{-1}]_m$. В дальнейшем, когда это не будет необходимо специально, мы будем подразумевать под локальным параметром его класс эквивалентности.)

Зафиксируем на Γ базис циклов a_i, b_i с канонической матрицей пересечений $a_i\circ a_j=b_i\circ b_j=0$, $a_i\circ b_j=\delta_{ij}$. Стандартным образом определяются (см. [7] или [9]): базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_k, $k=1, \ldots, g$; векторы $B_k=(B_{ki})$ их b-периодов и соответствующая тэта-функция Римана — целая функция g комплексных переменных, которая при сдвигах аргументов на базисные единичные векторы e_k в C^g и на векторы B_k преобразуется следующим образом:

$$\theta(\tau+e_k)=\theta(\tau), \quad \theta(\tau+B_k)=e^{-\pi iB_{kk}-2\pi i\tau_k}\theta(\tau). \tag{4.3}$$

Пусть q — произвольная точка Γ. *Отображением Абеля* называется соответствие, при котором точке $Q\in\Gamma$ сопоставляется вектор $A(Q)$ с координатами $A_k(Q)=\int_q^Q\omega_k$. Для любого набора g точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ общего положения функция $\theta(A(Q)+Z)$, где

$$Z=K-A(\gamma_1)-\ldots-A(\gamma_g) \tag{4.4}$$

(K — вектор римановых констант) имеет ровно g нулей, совпадающих с γ_s (отметим, что нули этой многозначной функции на Γ определены, в силу 4.3, корректно).

Обозначим через $\Omega^{(s)}$, $s=1, 2$, мероморфные дифференциалы на Γ, имеющие единственные полюсы в точке P_0 вида

$$\Omega^{(1)}=dk(1+O(k^{-2})), \quad \Omega^{(2)}=i\sigma^{-1}dk^2(1+O(k^{-3}))$$

и нормированные условием

$$\int_{a_i}\Omega^{(s)}=0. \tag{4.5}$$

Векторы их b-периодов будут обозначаться через

$$2\pi U_k=\oint_{b_k}\Omega^{(1)}, \quad 2\pi V_k=\oint_{b_k}\Omega^{(2)}. \tag{4.6}$$

Функция типа Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, Q)$, определенная своими аналитическими свойствами (4.1), (4.2), имеет вид

$$\psi=\exp\left(i\int_q^Q x\Omega^{(1)}+y\Omega^{(2)}\right)\frac{\theta(A(Q)+Ux+Vy+Z)\,\theta(A(P_0)+Z)}{\theta(A(Q)+Z)\,\theta(A(P_0)+Ux+Vy+Z)}. \tag{4.7}$$

Доказательство (4.7) заключается в непосредственной проверке того, что правая часть не меняется при обходе по любому циклу на Γ (т. е. корректно определяет функцию ψ на Γ) и обладает всеми необходимыми аналитическими свойствами.

Теорема 4.1 ([7]). *Функция* $\psi(x, y, Q)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1), *с потенциалом* $u(x, y)$, *равным*

$$u(x, y) = 2\partial_x^2 \ln \theta (A(P_0) + Ux + Vy + Z) - 2c, \tag{4.8}$$

где константа c *определяется из разложения*

$$\int_q^Q \Omega^{(1)} = k(Q) + c_0 + ck^{-1}(Q) + O(k^{-2}(Q)). \tag{4.9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi} = (\sigma\partial_y - \partial_x^2 + u)\psi(x, y, Q), \quad u(x, y) = 2i\xi_{1x}(x, y), \tag{4.10}$$

где ξ_1 — коэффициент из разложения (4.2). Она обладает всеми аналитическими свойствами ψ за исключением одного. Разложение ее предэкспоненциального множителя в окрестности P_0 начинается с члена порядка k^{-1}, а не с единицы, как у ψ. Из единственности ψ следует, что $\tilde{\psi} \equiv 0$. Для получения формулы (4.8) достаточно разложить правую часть (4.7) в окрестности P_0, используя соотношение (следствие билинейных соотношений Римана)

$$A(Q) = A(P_0) + iUk^{-1}(Q) + O(k^{-2}(Q)). \tag{4.11}$$

Для кривой общего положения соответствующие потенциалы $u(x, y)$ являются квазипериодическими. Условия, выделяющие кривые, которым отвечают периодические потенциалы, формулируются следующим образом.

Пусть dp и dE — мероморфные дифференциалы на Γ, имеющие единственные особенности в P_0 вида

$$dp = dk(1 + O(k^{-2})), \quad dE = i\sigma^{-1}dk^2(1 + O(k^{-3})) \tag{4.12}$$

и однозначно нормированные тем, что их периоды по всем циклам Γ являются вещественными. Если для любого цикла C на Γ

$$\oint_C dp = \frac{2\pi n_C}{l_1}, \quad \oint_C dE = \frac{2\pi m_C}{l_2}, \quad n_C, m_C \text{ — целые,} \tag{4.13}$$

то соответствующие таким кривым Γ потенциалы u имеют периоды l_1 и l_2 по x и y соответственно. Функции Бейкера — Ахиезера совпадают с блоховскими решениями уравнения (1.1). Дифференциалы dp и dE являются дифференциалами квазиимпульса и квазиэнергии, а соответствующие «мультипликаторы» $w_1(Q)$ и $w_2(Q)$ равны

$$w_1(Q) = \exp\left(il_1 \int_q^Q dp\right), \quad w_2(Q) = \exp\left(il_2 \int_q^Q dE\right). \tag{4.14}$$

(Условия (4.13) гарантируют, что $w_i(Q)$ не зависят от пути интегрирования.) Доказательство сформулированных утверждений следует из того, что

$$\psi(x + l_1, y, Q) = w_1(Q)\psi(x, y, Q), \tag{4.15}$$

$$\psi(x, y + l_2, Q) = w_2(Q)\psi(x, y, Q), \tag{4.16}$$

поскольку правые и левые части этих равенств имеют одинаковые аналитические свойства.

Формально сопряженные или двойственные функции Бейкера — Ахиезера, являющиеся решениями уравнения (1.4), определяются следующим образом. Пусть $d\Omega$ — единственный мероморфный на Γ дифференциал с единственным полюсом второго порядка в P_0, имеющий нули в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Кроме γ_s дифференциал $d\Omega$ имеет еще g нулей, которые будут обозначаться через $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$. *Двойственной функцией Бейкера — Ахиезера* будет называться функция $\psi^+(x, y, Q)$, которая мероморфна на Γ вне P_0 и имеет полюсы в $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$. В окрестности P_0 она имеет вид

$$\psi^+(x, y, Q) = e^{-ikx+\sigma^{-1}k^2y}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^+(x, y)\,k^{-s}\right). \tag{4.17}$$

Л е м м а 4.1. ([56]) *Для коэффициентов ξ_1 и ξ_1^+ разложений* (4.2) *и* (4.17) *имеет место равенство*

$$\xi_1(x, y) + \xi_1^+(x, y) = 0. \tag{4.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.2) и (4.17) и определения $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$ следует, что дифференциал

$$d\tilde{\Omega}(x, y, Q) = \psi(x, y, Q)\psi^+(x, y, Q)d\Omega(Q) \tag{4.19}$$

голоморфен вне P_0, где он имеет полюс второго порядка. Значит, вычет $d\tilde{\Omega}$ в P_0 равен нулю. Так как он равен левой части (4.18), то лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Двойственная функция Бейкера — Ахиезера ψ^+ является решением уравнения* (1.4), *формально сопряженного уравнению* (1.1), *которому удовлетворяет ψ.*

Л е м м а 4.2. *Если Γ, P_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ таковы, что отвечающий им потенциал u является неособым, то дифференциал $d\Omega$ равен*

$$d\Omega = \frac{dp}{\langle\psi\psi^+\rangle_x} = \frac{\sigma\, dE}{\langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y}. \tag{4.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полностью аналогично ходу доказательства леммы 2.3 можно показать, что если u неособый, то $\langle\psi\psi^+\rangle_x$ и $\langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y$ не могут иметь общих нулей. Из (1.6) следует, что правые части (4.20) голоморфны вне P_0 и имеют нули в полюсах ψ, ψ^+ и полюс второго порядка P_0. Так как эти свойства однозначно определяют $d\Omega$, то лемма доказана.

Т е о р е м а 4.2. *Для вещественного гладкого периодического конечнозонного потенциала и уравнения* (1.1) *соответствующая кривая Γ изоморфна спектральному множеству Флоке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы при произвольном σ полностью повторяет доказательство первого утверждения теоремы 2.1, поскольку для его проведения достаточно соотношения (4.20).

Потенциалы u, соответствующие произвольному набору данных (Γ, P_0, k^{-1}, γ_s), являются комплексными и мероморфными функциями. Выделение вещественных и неособых потенциалов для случаев $\sigma = 1$ и $\sigma = i$ оказывается принципиально различными.

С л у ч а й $\sigma = i$. Для вещественности u необходимо, чтобы на Γ существовала антиголоморфная инволюция τ такая, что $\tau(P_0) = P_0$. Локальный параметр k^{-1} должен быть выбран так, чтобы $k(\tau(Q)) = \overline{k}(Q)$. Полюсы γ_s должны под действием τ переходить в двойственный набор $\tau(\gamma_s) = \gamma_s^+$, т. е. γ_s, $\tau(\gamma_s)$ должны быть нулями дифференциала $d\Omega$ с единственным полюсом второго порядка в P_0.

Если эти условия выполнены, то в силу совпадения аналитических свойств равны между собой функции

$$\psi^+(x, y, Q) = \overline{\psi}(x, y, \tau(Q)). \tag{4.21}$$

Значит,

$$\overline{\xi}_1(x, y) = \xi_1^+(x, y), \tag{4.22}$$

и согласно (4.18) $u = 2i\xi_{1x}$ вещественен.

Для того, чтобы потенциал u был гладким, достаточно, чтобы антиинволюция τ была разделяющего типа, т. е. ее неподвижные овалы $a_0, \ldots, a_l$, $l \leqslant g$, разделяли Γ на две области $\Gamma^{\pm}$. Если $d\Omega$, соответствующий $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, неотрицателен на a_s относительно ориентации, заданной на этих овалах, как на границе Γ^+, то потенциал u не имеет особенностей при вещественных x, y.

Достаточность приведенных условий для гладкости u была впервые получена в [12]. Их необходимость недавно была доказана в [57] на основе детального анализа тэта-функциональной формулы (4.8). Ниже мы дадим краткий набросок иного способа доказательства.

Во-первых, отметим, что доказательство необходимости приведенных условий достаточно провести для периодических потенциалов, поскольку множество кривых Γ с отмеченной точкой P_0, отвечающих им при $l_1, l_2 \to \infty$, плотно среди всех конечнозонных потенциалов.

Соответствие

$$(w_1, w_2) \to (\bar{w}_1^{-1}, \bar{w}_2^{-1}) \tag{4.23}$$

при $\sigma = i$ оставляет инвариантным спектральное множество Флоке. Так как это множество изоморфно Γ, то (4.23) порождает антиголоморфную инволюцию τ: $\Gamma \to \Gamma$. Неподвижные овалы τ разбивают Γ на две области Γ^+, где $|w_1| > 1$, и Γ^-, где $|w_1| < 1$. На этих овалах dp положителен, и в силу (4.20) положителен и дифференциал $d\Omega$. Утверждение доказано.

Неподвижные овалы $a_0, \ldots, a_l$ антиинволюции τ являются «спектром» оператора (1.1) в пространстве квадратично-интегрируемых функций на прямой.

Теорема 4.3 ([52]). *Пусть параметры* $(\Gamma, P_0, k^{-1}, \gamma_s)$ *удовлетворяют перечисленным выше условиям, гарантирующим вещественность и неособость соответствующего конечнозонного потенциала* $u(x, y)$. *Тогда*

$$\delta(x - x') = \int\limits_{(\bigcup\limits_s a_s)\setminus P_0} \psi(x, y, Q)\, \psi^+(x', y, Q)\, d\Omega. \tag{4.24}$$

Теорема доказана в [52] в более общей ситуации, используя стандартный прием контурного интегрирования.

Отметим, что при $Q \in a_s$ функции $\psi(x, y, Q)$ и $\psi^+(x, y, Q)$ комплексно сопряжены друг другу и ограничены, так как $|w_i(Q)| = 1$.

Случай $\sigma = 1$. Конечнозонные решения уравнения (1.1) с $\sigma = 1$ являются вещественными и неособыми тогда и только тогда, когда определяющие их данные $(\Gamma, P_0, k^{-1}, \gamma_s)$ удовлетворяют следующим условиям: на кривой Γ существует антиголоморфная инволюция τ, имеющая $g + 1$ неподвижный овал (такие кривые называются *M-кривыми*); точки $P_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_g$ лежат по одной на каждом из неподвижных овалов τ, локальный параметр k^{-1} в окрестности P_0 должен быть выбран так, что $k(\tau(Q)) = -\overline{k(Q)}$.

Замечание. На неподвижных овалах $\tau^* dp = -\overline{dp}$, $\tau^* dE = -\overline{dE}$, поэтому условие вещественности периодов этих дифференциалов означает равенство нулю интегралов dp, dE вдоль $a_1, \ldots, a_g$. Значит, в случае $\sigma = 1$ дифференциалы dp и dE совпадают с дифференциалами $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, где $\Omega^{(s)}$ определены в начале параграфа (4.5).

§ 5. Теорема полноты произведений блоховских функций

В данном параграфе мы ограничимся случаем вещественных неособых конечнозонных потенциалов уравнения (1.1) с $\sigma = 1$. Как было показано выше, они определяются M-кривой Γ с отмеченной точкой $P_0 \in a_0$ (где $a_0, \ldots, a_g$ — неподвижные овалы антиинволюции τ: $\Gamma \to \Gamma$) и набором точек $\gamma_s \in a_s$. Кроме того, они зависят от класса эквивалентности локального параметра $[k^{-1}]_2$ такого, что $k(\tau(Q)) = -\overline{k}(Q)$. Вещественная размерность многообразия таких данных

$$M_g = (\Gamma, P_0, [k^{-1}]_2) \tag{5.1}$$

равна $3g + 1$, где g — род кривой Γ. Подмногообразие $M_g^0 \in M_g$ данных (5.1), отвечающих потенциалам с нулевым средним по x, имеет размерность $3g$

и выделяется, как видно из (4.8,9) и того, что (при $\sigma = 1$) $dp = \Omega^{(1)}$, условием $p^{-1}(Q) \in [k^{-1}]_2$, где $p(Q)$ — любая ветвь квазиимпульса.

Основной целью настоящего параграфа является построение из произведений блоховских функций, отвечающих периодическим конечнозонным операторам, и их двойственных аналога базиса Фурье в пространстве периодических по x и y функций. Прежде чем изложить эти результаты, нам потребуется детальная информация о структуре «резонансных точек» на соответствующих таким потенциалам кривых.

Пусть набор данных $(\Gamma,\ P_0,\ [k^{-1}]_2) \in M_g^0$ удовлетворяет условиям (4.13), которые необходимы и достаточны для периодичности u. Тогда на Γ определены функции $w_i(Q)$, $i = 1,\ 2$, являющиеся собственными значениями операторов сдвига на периоды по x, y. Пара точек Q и Q' называется *резонансной*, если $w_i(Q) = w_i(Q')$.

На каждой из областей $\Gamma^{\pm}$, на которые циклы $a_0, \ldots, a_g$ разбивают кривую Γ, можно выбрать однозначную ветвь интегралов

$$p(Q) = \int_q^Q dp, \quad E(Q) = \int_q^Q dE, \quad q \in a_0. \tag{5.2}$$

(В качестве Γ^+ выберем ту из областей, на которой $\operatorname{Re} p > 0$.)

Лемма 5.1 ([18]). *Для любой M-кривой Γ отображение*

$$\Gamma^+ \ni Q \to (\operatorname{Re} p(Q),\ \operatorname{Re} E(Q)) \tag{5.3}$$

является вещественным диффеоморфизмом Γ^+ на правую полуплоскость $\mathbb{R}^2$ с g выколотыми точками. Кривая Γ и P_0 соответствуют периодическим потенциалам уравнения (1.1) с $\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда координаты этих точек имеют вид $(\pi N_s l_1^{-1},\ \pi M_s l_2^{-1})$, $N_s > 0$, M_s — целые. Все пары резонансных точек на Γ суть точки $P_{NM}^{\pm}$ такие, что $P_{NM}^- = \tau(P_{NM}^+)$, а P_{NM}^+ является прообразом при отображении (5.3) точки с координатами $(\pi N l_1^{-1},\ \pi M l_2^{-1})$, $N > 0$, M — целые, $(N,\ M) \neq (N_s,\ M_s)$, $s = 1, \ldots, g$.

Доказательство. Дифференциалы dp и dE являются чисто мнимыми на неподвижных овалах $a_0, \ldots, a_g$. Поэтому отображение (5.3) непрерывно продолжается на эти овалы. При этом цикл a_0 отображается в начало координат, а циклы a_s — в точки с координатами

$$\frac{1}{2} \oint_{b_s} dp = \pi U_s, \quad \frac{1}{2} \oint_{b_s} dE = \pi V_s, \quad s = 1, \ldots, g \tag{5.4}$$

(b_s — циклы Γ, дополняющие a_s до канонического базиса).

Рассмотрим линию уровня функции $\operatorname{Re} p = r$ на Γ^+. Функция $\operatorname{Re} E$ не имеет на этой линии экстремумов. Сначала докажем это для $r \neq \pi U_s$, $s = 1, \ldots, g$. Предположим, что $\operatorname{Re} E$ имеет экстремум в точке Q на линии $\operatorname{Re} p = r$. Тогда в этой точке

$$\frac{dE}{dp}(Q) = \lambda, \tag{5.5}$$

где λ — вещественное.

Дифференциал $dE - \lambda dp$ имеет $2g - 1$ нуль. На циклах $a_0, \ldots, a_g$ он веществен. Его интегралы по $a_1, \ldots, a_g$ равны нулю, поскольку, как было объяснено в конце прошлого параграфа, равны нулю интегралы по этим циклам dE и dp. Значит, на каждом из этих циклов $dE - \lambda dp$ имеет, как минимум, два нуля. Еще один нуль имеется на цикле a_0. Следовательно, этот дифференциал не может обращаться в нуль в точке Q, что противоречит (5.5). Аналогично доказывается, что $\operatorname{Re} E$ монотонна на всех компонентах связности линии уровня $\operatorname{Re} p = \pi U_s$. Первое утверждение леммы доказано, а второе следует из (5.4) и (4.13).

Для доказательства последнего утверждения леммы достаточно рассмотреть отображение Г:

$$(5.6) \qquad Q \to (\operatorname{Im} p(Q),\ \operatorname{Im} E(Q)).$$

Аналогично предшествующему доказывается, что прообраз любой точки $\mathbb{R}^2$ состоит не более чем из двух точек Г. Так как $\operatorname{Im} p$ и $\operatorname{Im} E$ четны относительно τ, то два прообраза сопряжены друг другу. При сопряжении $\operatorname{Re} p$, $\operatorname{Re} E$ меняют знак. Из условия резонансности двух точек P_{NM}^+, P_{NM}^-

$$(5.7) \quad \operatorname{Re} p(P_{NM}^+) - \operatorname{Re} p(P_{NM}^-) = \frac{2\pi N}{l_1}, \quad \operatorname{Re} E(P_{NM}^+) - \operatorname{Re} E(P_{NM}^-) = \frac{2\pi M}{l_2}$$

следует утверждение леммы.

Пусть $\psi(x, y, Q)$ — функция Бейкера — Ахиезера, построенная по данным (5.1) и набору полюсов γ_s. Если выполнены условия периодичности (4.13) соответствующего потенциала, то произведения

$$(5.8) \qquad \Phi_{NM}^{\pm}(x, y) = \psi(x, y, P_{NM}^{\pm})\, \psi^+(x, y, P_{NM}^{\mp})$$

являются по определению резонансных точек периодическими функциями переменных x, y. Периодическими функциями являются и произведения $\psi(x, y, Q)\psi^+(x, y, Q)$. Из теоремы Римана — Роха следует, что среди последних имеется лишь $g + 1$ линейно независимых. Действительно, при любых x, y функция $\psi\psi^+$, как функция Q, является мероморфной с множеством возможных полюсов в точках γ_s^+, γ_s. По теореме Римана — Роха размерность пространства таких функций равна $g + 1$. (Из этого рассуждения следует, что размерность пространства функций $\psi(x, y, Q)\psi^+(x, y, Q)$ не превосходит $g + 1$. То, что она равна $g + 1$, будет показано в ходе доказательства теоремы 5.1.)

Обозначим через $\Phi_s^+(x, y)$ периодические функции

$$(5.9) \quad \Phi_s^+(x, y) = \frac{\psi(x, y, P_{2s})\, \psi^+(x, y, P_{2s})}{\langle \psi(x, y, P_{2s})\, \psi^+(x, y, P_{2s})\rangle_x}, \qquad s = 1, \ldots, g,$$

где P_j, $j = 1, \ldots, 2g$ — это нули дифференциала dp, которые занумерованы так, что P_{2s-1}, P_{2s} лежат на овале a_s.

Пусть $L_2^0 = L_2^0(T^2)$ — пространство квадратично-интегрируемых периодических по x, y функций с нулевым средним по x. Через $(L_2^0)^*$ будет обозначаться двойственное пространство. Определим элементы $\Phi_s^- \in (L_2^0)^*$, которые, как будет показано ниже, образуют совместно с $\Phi_{NM}^{\pm}$ и Φ_s^+ аналог базиса Фурье в $(L_2^0)^*$.

Зададим функции $r_s(x, y)$ формулой

$$(5.10) \quad r_s(x, y) = \exp\left(i \int_q^{\gamma_s} (x\, dp + y\, dE)\right) \frac{\theta(A(\gamma_s) + Ux + Vy + Z)}{\theta(A(P_0) + Ux + Vy + Z)},$$

которая с точностью до постоянного множителя $\theta(A(P_0) + Z)$ совпадает с коэффициентом при сингулярном члене разложения $\psi(x, y, Q)$ в окрестности ее полюса по локальному параметру $\theta(A(Q) + Z)$. (Напомним, что $\theta(A(\gamma_s) + Z) = 0$.) Пусть Q_n^s — это точки Г такие, что $w_1(\gamma_s) = w_1(Q_n^s)$. Рассмотрим ряд

$$(5.11) \qquad \Phi_s^-(x, y) = \sum_{n \neq 0} \frac{w_2(Q_n^s)}{w_2(\gamma_s) - w_2(Q_n^s)}\, \frac{r_s(x, y)\, \psi^+(x, y, Q_n^s)}{\langle \psi(x, y, Q_n^s)\, \psi^+(x, y, Q_n^s)\rangle_x}.$$

Лемма 5.2. *Ряд (5.11) для всех x и $y < l_2$ сходится и определяет гладкую аналитическую функцию $\Phi_s^-(x, y)$, периодическую по x. Для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(x, y)$ с периодами l_1 и l_2 по x, y*

существует конечный предел

$$\lim_{l\to l_2}\int_0^l \langle \Phi_s^-(x,y)\,v(x,y)\rangle_x\,dy, \tag{5.12}$$

который и определяет элемент $\Phi_s^- \in (L_2^0)^*$.

Доказательство. При $|n|\to\infty$ имеем $k(Q_n^s)=\frac{2\pi n}{l_1}+p_s$. Отсюда

$$w_2(Q_n^s)\approx \exp\left(-\frac{4\pi^2n^2l_2}{l_1^2}-\frac{4\pi n p_s}{l_1}l_2\right). \tag{5.13}$$

Аналогично с точностью до конечного множителя

$$\psi^+(x,y,Q_n^s)\approx \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l_1}+\frac{4\pi^2n^2y}{l_1^2}+\frac{4\pi n p_s y}{l_1}\right). \tag{5.14}$$

Следовательно, при $y<l_2$ члены ряда (5.11) экспоненциально убывают. Периодичность Φ_s^- по x вытекает из того, что по определению Q_n^s периодичны по x все члены ряда. Обозначим через r_s^0 периодическую функцию $r_s^0 = r_s(x,y)\exp(-ip_sx-iE_sy)$, где p_s и E_s — значения квазиимпульса и квазиэнергии в γ_s. Имеем

$$\frac{r_s(x,y)\,\psi^+(x,y,Q_n^s)}{\langle \psi(x,y,Q_n^s)\,\psi^+(x,y,Q_n^s)\rangle_x}= \tag{5.15}$$

$$=\left(r_s^0+O\left(\frac{1}{|n|}\right)\right)e^{-\frac{2\pi i n x}{l_1}+\frac{4\pi^2n^2y}{l_1^2}+\frac{4\pi n p_s}{l_1}+iE_sy}.$$

Значит, левая часть (5.12) представляется суммой ряда, члены которого для $|n|>N_0$ равномерно оцениваются коэффициентами Фурье периодической функции $r_s^0(x,y)v(x,y)$, что влечет за собой последнее утверждение леммы.

Теорема 5.1. *Функции* $\Phi_s^\pm$ *и* $\Phi_{NM}^\pm$ *образуют минимальный базис в* $(L_2^0)^*$.

Доказательство. Для доказательства полноты этого набора достаточно показать, что для любой непрерывно дифференцируемой периодической функции $v(x,y)$ из равенств

$$\text{a)}\ \langle\langle v\Phi_s^+\rangle\rangle=0,\quad \text{b)}\ \int_0^{l_2}\langle \Phi_s^-(x,y)\,v(x,y)\rangle_x\,dy=0, \tag{5.16}$$

$$\text{a)}\ \langle\langle v\Phi_{NM}^\pm\rangle\rangle=0,\quad \text{b)}\ \langle v\rangle_x=0, \tag{5.17}$$

следует, что $v\equiv 0$. (Здесь и далее $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ означает среднее по x, y.)

Для любой точки $Q_0\in\Gamma$ такой, что $w_1(Q_0)\neq w_1(P_j)$, $Q_0\neq\gamma_s$, $Q_0\neq P_{NM}^\pm$, рассмотрим ряд

$$\varphi(x,y,Q_0)=\sum_{n\neq 0}\psi_n(x,y)\frac{w_{2n}}{w_{2n}-w_{20}}\int_y^{y+l_2}\frac{\langle\psi_n^+v\psi_0\rangle_x}{\langle\psi_n^+\psi_n\rangle_x}dy', \tag{5.18}$$

где $\psi_n(x,y)=\psi(x,y,Q_n)$, $w_{2n}=w_2(Q_n)$ и Q_n, как и ранее, определяется из условия $w_1(Q_n)=w_1(Q_0)$. Асимптотически члены этого ряда совпадают с членами ряда $\varphi_1(x,y,Q_0)$, рассматриваемого в § 2. Поэтому (5.18) сходится и определяет аналитическую функцию переменной Q_0. Из (5.17) следует, что она аналитически продолжается во все резонансные точки $P_{NM}^\pm$. Покажем, что его можно непрерывно продолжить и в точки $Q_0\neq P_j$ такие, что $w_1(Q_0)=w_1(P_j)$. Рассмотрим $\varphi(x,y,Q_0')$, где Q_0' близка к Q_0. Устремляя Q_0' к Q_0, видим, что среди членов ряда (5.18) имеется два члена, стремящихся к бесконечности. Они отвечают индексам n_0, n_0+1 таким, что соответствующие точки Q_{n_0}, Q_{n_0+1} лежат в окрестности P_j. (Эти члены стремятся к нулю, поскольку при $Q_0' \to Q_0$ стремятся к нулю $\langle \psi_{n_0}\psi^+_{n_0}\rangle_x$ и $\langle \psi_{n_0+1}\psi^+_{n_0+1}\rangle_x$.) Сумма этих двух членов стремится к конечному пределу. Действительно, члены ряда (5.18) для $n \neq 0$ совпадают с вычетами в точках Q_n дифференциала

$$(5.19)\quad \int\limits_y^{y+l_2} dy' \int\limits_0^{l_1} \frac{\psi(x,\ y,\ Q)\,\psi^+(x',\ y',\ Q)\,\psi(x',\ y',\ Q_0)\,v(x',\ y')\,dx'}{(w_1(Q_0)\,w_1^{-1}(Q)-1)\,(w_2(Q_0)\,w_2(Q_0')-1)}\,d\Omega(Q),$$

который локально гладко зависит от Q_0. Поэтому сумма двух стремящихся к бесконечности членов ряда (5.18) стремится к интегралу дифференциала (5.19) по малому контуру, охватывающему точку P_j.

Таким образом, если v удовлетворяет условию (5.17а), то $\varphi(x,\ y,\ Q_0)$ — аналитическая функция на Γ вне точек P_j, γ_s и отмеченной точки P_0. В точках γ_s она, возможно, имеет простые полюсы, а в точках P_j, $j = 1, \ldots, 2g$ она может иметь двукратные полюсы. Из равенства

$$(5.20)\quad \frac{w_{2n}}{w_{2n}-w_{20}} \int\limits_y^{y+l_2} \chi_n(y')\,dy' = \frac{w_{2n}}{w_{2n}-w_{20}} \int\limits_0^{l_2} \chi_n(y')\,dy' - \int\limits_0^{y} \chi_n\,dy',$$

$$\chi_n = \frac{\langle \psi_n^+ v \psi_0\rangle_x}{\langle \psi_n^+\psi_n\rangle_x}$$

следует, что функция

$$(5.21)\quad \tilde\varphi(x,\ y,\ Q_0) = \varphi(x,\ y,\ Q_0) - \varphi(0,\ 0,\ Q_0)\psi(x,\ y,\ Q_0)$$

не имеет полюсов в точках P_j, если v удовлетворяет условиям (5.16а). Из (5.16 b) следует, что $\varphi(0,\ 0,\ Q_0)$ не имеет полюсов в точках γ_s. Значит, $\tilde\varphi$ мероморфна на Γ вне P_0 и имеет, возможно, простые полюсы в точках γ_s. Аналогично неравенству (2.19) для $s = 1$ имеем

$$(5.22)\quad \tilde\varphi(x,\ y,\ Q_0)\psi^+(x,\ y,\ Q_0) = O(k^{-1}(Q_0)).$$

Следовательно, функция $\tilde\varphi$ является функцией типа Бейкера — Ахиезера, но в разложении (4.2) для $\tilde\varphi$ предэкспоненциальный множитель будет начинаться с $O(k^{-1})$. Из единственности функции Бейкера — Ахиезера заключаем, что $\tilde\varphi = 0$.

В силу леммы 2.4 последовательность $\psi_n = \psi(x,\ y,\ Q_n)$ является базисной (в смысле определения, данного в § 1). Сравнивая формулы (1.25), (1.28) с (5.18), получим

$$(5.23)\quad (\partial_y - \partial_x^2 + u_0)\,\varphi(x,\ y,\ Q_0) = -v\psi_0 + \frac{\langle \psi_0^+ v\psi_0\rangle_x}{\langle \psi_0^+\psi_0\rangle_x}\,\psi_0,$$

где u_0 — конечнозонный потенциал, отвечающий функции Бейкера — Ахиезера $\psi(x,\ y,\ Q)$. Так как $\tilde\varphi = 0$, то левая часть (5.23) равна нулю. Из (5.16а) заключаем, что тогда $v \equiv 0$. Полнота семейства $\Phi_s^{\pm}$, $\Phi_{NM}^{\pm}$ доказана.

Доказательство минимальности этого семейства вытекает из следующего построения «двойственного» базиса в пространстве L_2^0. Рассмотрим произвольную вариацию $u(x,\ y,\ \tau)$ конечнозонного потенциала $u_0 = u(x,\ y,\ 0)$. Для любой точки $Q_0 \neq P_j$, $P_{NM}^{\pm}$ обозначим через $Q(\tau)$ точку римановой поверхности Γ_τ, отвечающей потенциалу $u(x,\ y,\ \tau)$, которая определяется из условия $w_1(Q(\tau)) = w_1(Q_0)$. Обозначим через

$$(5.24)\quad \psi_\tau = \psi_\tau(x,\ y,\ Q_0) = \partial_\tau\psi(x,\ y,\ Q(\tau))\,|_{\tau=0}.$$

По определению эта функция имеет блоховское поведение по x с мультипликатором $w_1(Q_0)$.

Лемма 5.3. *Для любой вариации* $u(x, y, \tau)$ *функция* $\varphi(x, y, Q_0)$, *заданная формулой* (5.18), *где*

$$v(x, y) = \partial_\tau u(x, y, \tau)\,|_{\tau=0}, \tag{5.25}$$

равна

$$\varphi(x, y, Q_0) = \psi_\tau - \frac{\langle \psi_\tau \psi_0^+ \rangle_x}{\langle \psi_0 \psi_0^+ \rangle_x} \psi_0, \quad \psi_0 = \psi(x, y, Q_0). \tag{5.26}$$

Доказательство. Правая часть равенства (5.26) является блоховской функцией с мультипликаторами w_{10}, w_{20} и удовлетворяет условию нормировки $\langle \varphi \psi_0^+ \rangle_x = 0$. Дифференцируя (1.1) по τ, получим, что она является решением уравнения (5.23). Как было показано в § 1, такое решение единственно и дается формулой (5.18). Лемма доказана.

Рассмотрим сначала конечнозонные вариации u, сохраняющие периоды u_0. К таким вариациям относятся вариации, не меняющие Γ, но сдвигающие полюсы γ_s блоховской функции. Обозначим через

$$v_s^-(x, y) = \frac{\partial}{\partial \gamma_s} u(x, y \mid \Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_g). \tag{5.27}$$

(Эти функции являются линейными комбинациями $\partial u / \partial z_i$, где u заданы формулой (4.8), а z_i — координаты вектора Z.) Кроме того, имеются вариации, сохраняющие γ_s, но изменяющие Γ. Например, если в качестве параметров, определяющих Γ, выбрать концы p_{2s} разрезов в модели Γ из § 2 (напомним, что при вариациях Γ, сохраняющих периоды u_0, среди концов разрезов имеется лишь половина независимых), то можно определить функции

$$v_s^+(x, y) = \partial / \partial p_{2s} u(x, y \mid p_2, \ldots, p_{2g}, \gamma_1, \ldots, \gamma_g). \tag{5.28}$$

Лемма 5.4. *Функции* $v_s^\pm$ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\langle\langle v_s^\pm \Phi_{NM}^\pm \rangle\rangle = \langle\langle v_s^\pm \Phi_{NM}^\mp \rangle\rangle = 0, \tag{5.29}$$

$$\langle\langle v_s^+, \Phi_{s'}^- \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle v_s^- \Phi_{s'}^+ \rangle\rangle = 0, \tag{5.30}$$

$$\langle\langle v_s^+ \Phi_{s'}^+ \rangle\rangle = \delta_{ss'}, \quad \langle\langle v_s^- \Phi_{s'}^- \rangle\rangle = a_s \delta_{ss'}, \quad a_s \neq 0. \tag{5.31}$$

Доказательство. Для обоих типов рассматриваемых вариаций ψ_τ (где τ или γ_s, или p_{2s}) не имеет полюсов в точках $P_{NM}^\pm$. Из этого вытекают равенства (5.29). Функция $\dfrac{\partial \psi}{\partial \gamma_s}$ имеет двукратный полюс в точке γ_s, простые полюсы в точках $\gamma_{s'}$, $s' \neq s$. В остальных точках она аналитична. Сравнивая эти свойства с теми, которые вытекают из (5.18), получаем вторые из равенств (5.30), (5.31). При вариациях p_{2s} производные $\dfrac{\partial \psi}{\partial p_{2s}}$ имеют полюс в точках P_{2s}. Отсюда получаем первые из равенств (5.30), (5.31). Лемма доказана.

Ее утверждения говорят о том, что $\Phi_s^\pm$ образуют базис в кокасательном расслоении к многообразию периодических конечнозонных потенциалов, отвечающих кривым рода g. Ниже мы покажем, что $\Phi_{NM}^\pm$ двойственны к вариациям, трансверсальным к этому многообразию, при которых «раскрывается зона» на месте резонансных точек $P_{NM}^\pm$.

Рассмотрим малые окрестности $R_{NM}^\pm$ какой-либо пары точек $P_{NM}^\pm$. Функция w_1 отождествляет каждую из этих окрестностей с некоторой окрестностью $\widetilde{R}_{NM}$ точки $w_1(P_{NM}^\pm)$. Если для $w_1 \in \widetilde{R}_{NM}$ обозначить через $P^\pm(w_1) \in R_{NM}^\pm$, $w_1(P^\pm) = w_1$, то $w_2^\pm(w_1) = w_2(P^\pm)$ аналитические функции в $\widetilde{R}_{NM}$. Пусть $\hat{R}_{NM}$ — двулистное накрытие $\widetilde{R}_{NM}$, заданное уравнением

$$z^2 - (w_2^+(w_1) + w_2^-(w_1)) z + (1 - \varepsilon^2) w_2^+(w_1) w_2^-(w_1) = 0. \tag{5.32}$$

Для достаточно малых ε граница $\hat{R}_{NM}$ распадается на две окружности, каждая из которых естественно отождествляется с границами $R_{NM}^\pm$. Это отождествление позволяет приклеить к дополнению в Γ областей $R^{\pm}_{NM}$ область $\hat{R}_{NM}$. При этом получится риманова поверхность рода $g+1$. Обозначим ее через $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$. Инволюция τ естественно продолжается на $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$, где она имеет помимо старых неподвижных циклов $a_0, \ldots, a_g$ еще один новый $a_{g+1} \in \hat{R}_{NM}$.

Приведем необходимые сведения о голоморфных дифференциалах на $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$ [58]. Пусть $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_{g+1}$ — базис нормированных дифференциалов на $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$. Если $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис нормированных голоморфных дифференциалов на Γ, а $\hat{\omega}_{NM}$ — нормированный дифференциал третьего рода на Γ с вычетами $\pm 1/2\pi i$ в точках $P^{\pm}_{NM}$, то вне $R^{\pm}_{NM}$ имеем

$$(5.33)\qquad |\omega_i\tilde{\omega}_i^{-1}-1| = O(\varepsilon^2),\qquad i=1,\ldots,g,\qquad |\hat{\omega}_{NM}\tilde{\omega}_{g+1}^{-1}-1| = O(\varepsilon^2).$$

Пусть $\tilde{B}^{\varepsilon}$ и B — матрицы периодов кривых $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$ и Γ соответственно. Тогда из 5.33) следует

$$(5.34)\qquad \tilde{B}^{\varepsilon}_{ij} = B_{ij}+O(\varepsilon^2),\quad i, j \leqslant g,$$

$$(5.35)\qquad \tilde{B}_{g+1,\,i} = \oint_{b_i} \hat{\omega}_{NM} = A_i(P^{+}_{NM}) - A_i(P^{-}_{NM}) = A^{i}_{NM}$$

(второе из этих равенств есть следствие билинейных соотношений Римана). Для матричного элемента $\tilde{B}_{g+1,g+1}$ имеем

$$(5.36)\qquad \tilde{B}_{g+1,\,g+1} = \frac{1}{\pi i}(\ln\varepsilon + r_{NM} + O(\varepsilon^2)).$$

Тэта-функция $\tilde{\theta} = \theta(z_1, \ldots, z_{g+1})$, построенная по матрице $\tilde{B}^{\varepsilon}_{i}$, равна

$$(5.37)\qquad \tilde{\theta} = \theta(z) + \varepsilon e^{r_{NM}}[\theta(z+A_{NM})\, e^{2\pi i z_{g+1}} - \\ - \theta(z-A_{NM})\, e^{-2\pi i z_{g+1}}] + O(\varepsilon^2),$$

где $z=(z_1, \ldots, z_g)$, $A_{NM} = (A^{i}_{NM})$ и A^{i}_{NM} определены в (5.35).

Рассмотрим конечнозонный потенциал $\tilde{u}(x, y)$, соответствующий кривой $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$ и дивизору полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+1}$. Он задается формулой (4.8), в которой тэта-функция есть $\tilde{\theta}$. Векторы b-периодов дифференциалов dp и dE на $\Gamma^{\varepsilon}_{NM}$ равны

$$(5.38)\qquad \begin{aligned} &\tilde{U}_i = U_i + O(\varepsilon^2), && \tilde{V}_i = V_i + O(\varepsilon^2),\quad i=1,\ldots,g,\\ &\tilde{U}_{g+1} = \frac{2\pi i N}{l_1} + O(\varepsilon^2), && \tilde{V}_{g+1} = \frac{2\pi i M}{l_2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из (4.8) и (5.37) получаем, что

$$(5.39)\qquad \delta u = \tilde{u} - u = \varepsilon(v^{+}_{NM}e^{2\pi i z_{g+1}} + v^{-}_{NM}e^{-2\pi i z_{g+1}}) + O(\varepsilon^2),$$

где функции $v^{\pm}_{NM}(x, y)$ даются формулами

$$(5.40)\qquad v^{\pm}_{NM} = e^{r_{NM}}\cdot 2\partial_x^2\, \frac{\theta(Ux+Vy+Z\pm A_{NM})}{\theta(Ux+Vy+Z)}\, e^{\pm\frac{2\pi i N}{l_1}x \pm \frac{2\pi i M}{l_2}y}.$$

Лемма 5.5. *Функции $v^{\pm}_{NM}$ удовлетворяют соотношениям*

$$(5.41)\qquad \langle\langle v^{\pm}_{NM}\Phi^{\pm}_s\rangle\rangle = 0,\qquad \langle\langle v^{\pm}_{NM}\Phi^{\mp}_s\rangle\rangle = 0,$$

$$(5.42)\qquad \langle\langle v^{\pm}_{NM}\Phi^{\pm}_{N_1M_1}\rangle\rangle = 0,\quad \langle\langle v^{\pm}_{NM}\Phi^{\mp}_{N_1M_1}\rangle\rangle = \delta_{NN_1}\delta_{MM_1}.$$

Доказательство. Рассматривая производную блоховской функции по ε, получим, что соответствующая функция ψ_ε имеет простые полюсы в точках γ_s и P_j и полюс в паре точек $P_{NM}^{\pm}$. Сравнивая его вычет с (5.18), получим равенства (5.42). Равенства (5.41) есть следствие простоты полюсов ψ_ε в γ_s и P_{2s}.

Доказанные леммы позволяют сделать вывод о минимальности базиса $\Phi_s^{\pm}$, $\Phi_{NM}^{\mp}$ в $(L_2^0)^*$. Одновременно они доказывают теорему.

Теорема 5.2. *Функции $v_s^{\pm}$ и $v_{NM}^{\mp}$, заданные формулами* (5.27), (5.28) *и* (5.40), *образуют минимальный базис в L_2^0.*

ГЛАВА II

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ

Как было сказано во введении, уравнения типа уравнения КП — это система нелинейных уравнений на коэффициенты u_i и v_j операторов L, A вида (2), эквивалентных операторному уравнению (4). (В дальнейшем будет предполагаться, что $u_n^{\alpha\beta} = u_n^\alpha \delta_{\alpha\beta}$, $v_m^{\alpha\beta} = v_m^\alpha \delta_{\alpha\beta}$ — постоянные диагональные матрицы, $v_{m-1}^{\alpha\alpha} = 0$.) Это определение нуждается в уточнении. Оказывается, что если $n \leqslant m$, то система (4) редуцируется к пучку систем лишь на коэффициенты оператора A, параметризованных константами $h_{\alpha i}$, $\alpha = 1, \ldots, l$; $i = 0, \ldots, n$. (Подробности см. [7].) В дальнейшем под уравнениями типа КП будут подразумеваться редуцированные системы уравнений на коэффициенты A.

§ 1. Необходимые сведения о конечнозонных решениях

Исходным объектом в конструкции [7] конечнозонных решений уравнений (4) является неособая алгебраическая кривая Γ рода g с отмеченными точками P_α, $\alpha = 1, \ldots, l$, в окрестности которых фиксированы локальные параметры $k_\alpha^{-1}(Q)$, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$. Обозначим через $R_\alpha(k) = \sum_{i=0}^{n} h_{\alpha i} k^i$ (где $h_{\alpha i}$ — константы, параметризующие системы уравнений типа КП вместе с константами v_m^α, являющимися диагональными элементами старшего коэффициента A).

Для любого набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$ общего положения существует единственная функция $\psi_\alpha(x, y, t, Q)$, $Q \in \Gamma$, которая

1° *мероморфна на Γ вне точек P_α и имеет полюсы в точках γ_s (не более чем простые, если γ_s различны);*

2° *в окрестности точки P_β она представима в виде*

$$\psi_\alpha = l^{\,i(k_\beta x + R_\beta(k_\beta) y + v_m^\beta k_\beta^m t)} \Bigl(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^{\alpha\beta}(x, y, t)\, k_\beta^{-s} \Bigr), \tag{1.1}$$

где $\xi_0^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $k_\beta = k_\beta(Q)$.

Обозначим через $\psi(x, y, t, Q)$ вектор-столбец с координатами ψ_α. Как было показано в [7], существуют единственные операторы L и A вида (2) с матричными $(l \times l)$ коэффициентами такие, что

$$(\partial_y - L)\psi(x, y, t, Q) = 0, \quad (\partial_t - A)\psi(x, y, t, Q) = 0. \tag{1.2}$$

Поскольку равенства (1.2) выполнены при всех Q, то L и A удовлетворяют (4) (с $\sigma = 1$). Из единственности ψ_α легко следует, что они не меняются при заменах локальных параметров таких, что $k'_\beta = k_\beta + O(k_\beta^{-m})$. Локальные параметры, связанные подобным образом, относятся к одному классу эквивалентности $[k_\beta^{-1}]_m$.

Комплексная размерность многообразия наборов

$$M_g = (\Gamma,\ P_\alpha,\ [k_\alpha^{-1}]_m), \quad \Gamma \text{ имеет род } g, \tag{1.3}$$

равна $N = 3g - 3 + (m+2)l$. На M_g может быть введена комплексно-аналитическая структура. Пусть $I = (I_1, \ldots, I_N)$ — произвольная система (локальная) координат на M_g. Зависимость всех величин от I в последующих формулах является комплексно-аналитической.

Обозначим через dp, dE, $d\Omega$ мероморфные дифференциалы на Γ с полюсами в точках P_α вида dk_α, $dR_\alpha(k_\alpha)$, $v_m^\alpha dk_\alpha^m$ соответственно, однозначно нормированные условием вещественности их интегралов по всем циклам. Пусть a_i, b_j — канонический базис циклов на Γ. Определим g-мерный вещественный вектор U с координатами

$$U_k = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{b_k} dp, \qquad U_{k+g} = -\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{a_k} dp, \qquad k = 1, \ldots, g. \tag{1.4}$$

Аналогично по dE, $d\Omega$ определяются $2g$-мерные вещественные векторы V, W. Разрезав Γ вдоль циклов a_i, b_j, можно выбрать однозначную ветвь интегралов $p(Q)$, $E(Q)$, $\Omega(Q)$. В окрестности P_α они имеют вид

$$p = k_\alpha - a_\alpha + O(k_\alpha^{-1}), \qquad E = R_\alpha(k_\alpha) - b_\alpha + O(k_\alpha^{-1}), \tag{1.5}$$
$$\Omega = v_m^\alpha k_\alpha^m - c_\alpha + O(k_\alpha),$$

p, E, Ω можно однозначно нормировать условием $a_l = b_l = c_l = 0$.

В работе [22] с помощью явных тэта-функциональных формул показано, что построенные конечнозонные решения имеют следующий вид. Если $a = a(I)$, $b = b(I)$, $c = c(I)$ — диагональные матрицы $a_\alpha\delta_{\alpha\beta}$, $b_\alpha\delta_{\alpha\beta}$, $c_\alpha\delta_{\alpha\beta}$, то

$$L = g\hat{L}g^{-1}, \quad A = g\hat{A}g^{-1}, \tag{1.6}$$

где $g = \exp(i(ax + by + ct + \Phi))$, $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha\delta_{\alpha\beta}$, а коэффициенты $\hat{u}_i$, $\hat{v}_j$ операторов $\hat{L}$, $\hat{A}$ имеют вид

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i(Ux + Vy + Wt + Z \mid I), \quad \hat{v}_j = \hat{v}_j(Ux + Vy + Wt + Z \mid I). \tag{1.7}$$

Здесь $\hat{u}_i(z_1, \ldots, z_{2g}|I)$, $\hat{v}_j(z_1, \ldots, z_{2g}|I)$ — функции с единичными периодами по переменным z_i. Вещественные координаты вектора Z и комплексные константы Φ_α определяются по набору $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$. В формулах (1.6), (1.7) они могут считаться произвольными.

Чтобы не загромождать изложение излишними техническими деталями, отошлем читателя за подробностями построения явных формул для $\hat{u}_i$, $\hat{v}_j$ к [22].

В качестве примера рассмотрим конечнозонные решения уравнения КП [6]. Решения этого уравнения строятся с помощью функции Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t, Q)$, которая мероморфна на Γ вне P_0, имеет полюсы $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и имеет в окрестности P_0 вид

$$\psi = e^{ikx - \sigma^{-1}k^2y + ik^3t}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, y, t)\, k^{-s}\right), \quad k = k(Q). \tag{1.8}$$

Эта функция имеет вид, аналогичный (1.4.7) (здесь и далее в тройной нумерации формул первая цифра указывает номер главы).

$$\psi = e^{\int_q^Q (x\Omega^{(1)} + y\Omega^{(2)} + t\Omega^{(3)})} \frac{\theta(A(Q) + Ux + Vy + Wt + Z)\,\theta(A(P_0) + Z)}{\theta(A(Q) + Z)\,\theta(A(P_0) + Ux + Vy + Wt + Z)}, \tag{1.9}$$

где $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ — те же, что и в главе I, $\Omega^{(3)}$ — нормированный абелев дифференциал с полюсом в P_0 вида dk^3. Соответствующее конечнозонное решение $u(x, y, t)$ дается формулой

$$(1.10)\quad u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Wt + A(P_0) + Z) + \mathrm{const}.$$

Возвращаясь вновь к конечнозонным решениям общих уравнений (4), определим, следуя [56], понятие двойственной функции Бейкера — Ахиезера. Для любого набора $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$ общего положения существует единственный с точностью до пропорциональности дифференциал $\hat{\omega}$ второго рода с полюсами второго порядка в точках P_α, обращающийся в нуль в точках γ_s. Набор точек $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_{g+l-1}^+$, являющихся остальными нулями $\hat{\omega}$, называется *двойственным* к набору $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$.

Если $\psi(x, y, t, Q)$ — вектор-функция Бейкера — Ахиезера, определенная выше по набору данных (1.3) и полюсам γ_s, то двойственная вектор-функция $\psi^+(x, y, t, Q)$ — это вектор-строка с координатами ψ_α^+, которые мероморфны на Γ вне P_α с полюсами в точках γ_s^+ и имеют в окрестности P_β вид

$$(1.11)\quad \psi_\alpha^+ = \exp\left(i\left(-k_\beta x - R_\beta(k_\beta)\, y - v_m^\beta k_\beta^m t\right)\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^{+\alpha\beta}(x, y, t)\, k_\beta^{-s}\right).$$

В [56] доказано, что ψ^+ удовлетворяет уравнениям

$$(1.12)\quad \psi^+(\partial_y - L) = 0, \quad \psi^+(\partial_t - A) = 0,$$

где операторы L и A — те же, что и в (1.2). Доказательство [56] основано на том, что по определению ψ и ψ^+ дифференциалы

$$(1.13)\quad d\Lambda_{\alpha\beta} = \psi_\alpha(x, y, t, Q)\, \psi_\beta^+(x', y', t', Q)\, \hat{\omega}(Q)$$

голоморфны вне $P_1, \ldots, P_l$, поэтому

$$(1.14)\quad \sum_{\gamma=1}^{l} \mathrm{res}_{P_\gamma} d\Lambda_{\alpha\beta} = 0.$$

Обобщением соотношения (1.14) являются билинейные соотношения, введенные в работах Сато, Мива, Джимбо, Дата (см. [46, 47, 68]) для определения τ-функций.

§ 2. Теория возмущений конечнозонных решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили-2

Рассмотрим задачу построения асимптотических решений уравнения

$$(2.1)\quad \frac{3}{3} u_{yy} + \left(u_t - \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx}\right)_x + \varepsilon K[u] = 0,$$

где ε — малый параметр, $K[u]$ — дифференциальный полином. У этой задачи имеется несколько постановок. Одна из них связана с исследованием влияния возмущающего члена на решения периодической задачи для уравнения КП-2. В этом случае строится асимптотический ряд для решения задачи Коши с начальными условиями $u(x, y, 0)$, принадлежащими окрестности конечнозонного решения уравнения КП-2. Вторая постановка задачи имеет смысл и в случае $K \equiv 0$. В ней ищется асимптотическое решение уравнения КП-2, начальный член которого равен

$$(2.2)\quad u_0(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(\varepsilon^{-1} S(X, Y, T) \mid I(X, Y, T)) + c(X, Y, T),$$

где

$$(2.3)\quad \tilde{u}(z) = 2\partial_x^2 \ln \theta(z \mid I), \quad \partial_x = \sum U_i \partial_{z_i},$$

периодическая функция $z = (z_1, \ldots, z_g)$, параметры которой (т. е. матрица периодов голоморфных дифференциалов на Г) зависят от медленных переменных $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, $T = \varepsilon t$. Вектор-функция S определяется из уравнений

$$(2.4)\qquad \partial_X S = U(X, Y, T), \quad \partial_Y S = V(X, Y, T), \quad \partial_T S = W(X, Y, T),$$

где U, V, W — векторы периодов дифференциалов dp, dE, $d\Omega$. Они зависят от X, Y, T через зависимость от этих переменных основных параметров (Γ, P_0, k^{-1}).

Для пространственно-одномерных систем, в частности, для уравнения КдФ основное внимание уделялось второй постановке задачи [21, 22, 59]. Объединяя обе эти задачи, будем искать решения уравнения (2.1) в виде

$$(2.5)\qquad u(x, y, t) = u_0(x, y, t \mid X, Y, T) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, y, t \mid X, Y, T).$$

В том случае, когда u_0 является периодической функцией переменных x, y, для построения формального ряда (2.5) достаточно построить совокупность решений линеаризованного уравнения (2.1)

$$(2.6)\qquad \frac{3}{4} v_{yy} + \left(v_t - \frac{3}{2} u_0 v_x - \frac{3}{2} u_{0x} v + \frac{1}{4} v_{xxx}\right)_x = 0,$$

образующих при всех t базис в пространстве периодических по x, y функций. Кроме того, необходимо иметь двойственный базис решений сопряженного линейного уравнения

$$(2.7)\qquad \frac{3}{4} \Phi_{yy} + \left(-\Phi_t - \frac{3}{2} u_0 \Phi_x + \frac{1}{4} \Phi_{xxx}\right)_x = 0.$$

Для построения решений уравнения (2.6) воспользуемся тем, что если имеется семейство решений нелинейного уравнения, то производные этих решений по параметрам являются решениями линеаризованного уравнения. Следовательно, функции

$$(2.8)\qquad v_s^+(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial p_{2s}} u_0(x, y, t), \quad v_s^-(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial \gamma_s} u_0(x, y, t),$$

где $u_0(x, y, t) = u_0(x, y, t \mid \gamma_s, p_{2s})$ — конечнозонные решения, заданные формулой (1.10), являются решениями уравнения (2.6).

Рассматривая вариации Г, аналогичные тем, которые были использованы в § 5 и которые соответствуют «вклеиванию ручки» между точками Q и $\tau(Q)$, получим следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функции* (2.9) *являются решениями уравнения* (2.6)

$$(2.9)\qquad v(x, y, t, Q) = 2e^{r(Q)}\partial_x^2 \left[\frac{\theta(Ux + Vy + Wt + Z + A(Q) - A(\tau(Q)))}{\theta(Ux + Vy + Wt + Z)}\right] \times$$
$$\times \exp\{i(p(Q) - p(\tau(Q)))x + (E(Q) - E(\tau(Q)))y + (\Omega(Q) - \Omega(\tau(Q)))t\}.$$

Здесь $r(Q)$ — вещественная функция, определяемая следующим образом. Пусть $\hat{\omega}_Q$ — нормированный дифференциал третьего рода с вычетами $\pm\frac{1}{2\pi i}$ в точках Q, $\tau(Q)$. При $Q' \to Q$ имеем

$$(2.10)\qquad \int_{\tau(Q')}^{Q'} \hat{\omega}_Q = \ln|p(Q') - p(Q)| + 2r(Q) + O((|p(Q) - p(\tau(Q))|)^{-1}).$$

По определению резонансных точек функции $v_{NM}^{\pm} = v(x, y, t, P_{NM}^{\pm})$ являются периодическими решениями уравнения (2.6).

Обозначим через $\Phi_s^{\pm}(x, y, t)$ функции, построенные с помощью $\psi(x, y, t, Q)$ и $\psi^+(x, y, t, Q)$ точно так же, как в последнем параграфе главы I строились функции $\Phi_s^{\pm}(x, y)$. Кроме того, определим периодические функции $\Phi_{NM}^{\pm}(x, y, t) = \Phi(x, y, t, P_{NM}^{\pm})$, где

$$(2.11) \qquad \Phi(x, y, t, Q) = \frac{\psi(x, y, t, Q)\,\psi^+(x, y, t, \tau(Q))}{\langle\psi(x, y, t, Q)\,\psi^+(x, y, t, Q)\rangle_x}.$$

Полностью аналогично результатам § 5 главы I получим теорему.

Теорема 2.1. *Функции $v_s^{\pm}, v_{NM}^{\pm}$ при любом t образуют базис в L_2^0. При этом для них и для $\Phi_s^{\pm}$, $\Phi_{NM}^{\pm}$ имеют место соотношения ортогональности* (1.5.27, 28) *и* (1.5.40, 41, 42).

Следствие. *Функции $\Phi_s^{\pm}$, $\Phi_{NM}^{\pm}$ являются решениями уравнения* (2.7).

Полученные выше формулы для $v(x, y, t, Q)$ и $\Phi(x, y, t, Q)$ позволяют легко определить все члены ряда (2.5) в случае периодического решения u_0. Непосредственный анализ получающихся выражений показывает, что соответствующий ряд может быть определен для всех конечнозонных решений с помощью аппроксимации последних на любом компакте конечнозонными периодическими (по x, y) решениями с периодами l_1, $l_2 \to \infty$. При такой аппроксимации пределом подмножества резонансных точек, дающего нетривиальные вклады в u_i, является множество точек $Q \notin a_s$ таких, что найдутся целые числа $\rho = (r_1, \ldots, r_g)$, для которых

$$(2.12) \quad \operatorname{Re} p(Q) = r_1U_1 + \ldots + r_gU_g, \quad \operatorname{Re} E(Q) = r_1V_1 + \ldots + r_gV_g.$$

Пусть R — подгруппа в Z^g, образованная такими наборами целых чисел, для которых правые части в (2.12) равны нулю, $R = R(U, V)$. Для любого набора $\rho \in Z^g$ через $\bar\rho$ будет обозначаться элемент фактор-группы Z^g/R. Описанные в (2.12) точки однозначно определяются классом $\bar\rho$ (и в дальнейшем обозначаются через $Q_{\bar\rho}$), не равным нулю и ни одному из классов $\bar\rho_s^{\pm}$, где $\rho_s^{\pm}$ — это набор, в котором $r_i = \pm\,\delta_{is}$. Обозначим через $F_i[u_0, \ldots, u_{i-1}]$ «невязку» порядка ε^i, получающуюся подстановкой соответствующей частичной суммы ряда (2.5) в (2.1).

Теорема 2.2. *Член $u_i(x, y, t \mid X, Y, T)$ ряда* (2.5) *равен*

$$(2.13) \quad u_i = \sum_{s=1}^{g} \left(c_{is}^+(t)\,v_s^+(x, y, t) + c_{is}^-(t)\,v_s^-(x, y, t)\right) + \sum_{\bar\rho \neq 0,\ \bar\rho_s^{\pm}} c_i(t, Q_{\bar\rho})\,v(x, y, t, Q_{\bar\rho}), \quad i \geqslant 1.$$

Здесь

$$(2.14) \quad \begin{aligned} c_{is}^{\pm}(t) &= \tilde c_{is}^{\pm} - \int_0^t \langle\langle \Phi_s^{\mp}\partial_x F_i \rangle\rangle\, dt', \\ c_i(t, Q_{\bar\rho}) &= \tilde c_i(Q_{\bar\rho}) - \int_0^t \langle\langle \Phi(x, y, t', Q_{\bar\rho})\,\partial_x F_i \rangle\rangle\, dt'. \end{aligned}$$

Отметим, что в формулах (2.14) указана лишь зависимость всех членов от «быстрых» переменных x, y, t, хотя все они являются функциями и медленных переменных X, Y, T, которые входят в определение $v_s^{\pm}$, v, $\Phi_s^{\pm}$, Φ через зависимость от этих переменных параметров (Γ, P_0, k^{-1}). Кроме того, функциями X, Y, T могут являться и константы интегрирования $\tilde c_{is}^{\pm}$, $\tilde c_i(Q_{\bar\rho})$ в (2.14). Уравнения, определяющие их зависимость от X, Y, T, могут быть получены из требования ограниченности по t члена u_{i+1}.

Наиболее интересным моментом является определение зависимости от X, Y, T основных параметров (Γ, P_0, k^{-1}) конечнозонных решений, исходя из требования равномерной ограниченности по t первого поправочного члена u_1. Этому вопросу посвящен следующий параграф работы.

§ 3. Уравнения Уизема для пространственно-двумерных «интегрируемых систем»

Задача построения асимптотических решений общих пространственно-двумерных уравнений (4) и их возмущений ставится следующим образом. Пусть $K(A)$ — дифференциальный оператор порядка $m-1$, коэффициенты которого являются дифференциальными полиномами от коэффициентов оператора A. Ищутся асимптотические решения

$$\tilde{A} = A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots, \quad \tilde{L} = L_0 + \varepsilon L_1 + \ldots \tag{3.1}$$

уравнения

$$\partial_t L - \partial_y A + [L, A] - \varepsilon K(A) = 0. \tag{3.2}$$

В первом параграфе настоящей главы был указан общий вид конечно зонных решений уравнений (4). В соответствии с общей идеологией метода Уизема (нелинейного ВКБ-метода), мы будем рассматривать асимптотические решения (3.1), старший член которых имеет вид

$$A_0 = G\hat{A}_0 G^{-1}, \quad L_0 = G\hat{L}_0 G^{-1}, \tag{3.3}$$

где $G = \exp(i\varepsilon^{-1}S_0(X, Y, T) + i\Phi(X, Y, T))$, а коэффициенты операторов $\hat{A}_0$, $\hat{L}_0$ равны

$$\hat{v}_i(\varepsilon^{-1}S(X, Y, T) + Z(X, Y, T) \mid I(X, Y, T)), \tag{3.4}$$

$$\hat{u}_i(\varepsilon^{-1}S(X, Y, T) + Z(X, Y, T) \mid I(X, Y, T)). \tag{3.5}$$

Вектор-функция S и диагональная матрица S_0 должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} \partial_X S = U(X, Y, T), & \partial_Y S = V(X, Y, T), & \partial_T S = W(X, Y, T), \\ \partial_X S_0 = a(X, Y, T), & \partial_Y S_0 = b(X, Y, T), & \partial_T S_0 = c(X, Y, T), \end{cases} \tag{3.6}$$

где U, V, W — векторы периодов дифференциалов dp, dE, $d\Omega$, определенных на кривой Γ, отвечающие набору данных (1.3), параметризованных величинами $I(X, Y, T)$; диагональные матрицы a, b, c определены в (1.5).

Полное решение задачи построения всего ряда (3.1) требует, как и в разобранном выше примере уравнения КП-2, построения базисного набора решений линеаризованного уравнения (4). Оказывается, что уравнения на зависимость величин $I(X, Y, T)$ могут быть получены без построения этого базиса, исходя из требования ограниченности u_1.

Рассмотрим многообразие

$$\hat{M}_g = (\Gamma, P_\alpha, [k_\alpha^{-1}]_m, Q \in \Gamma), \tag{3.7}$$

естественно расслаивающееся над M_g. Пусть $(\lambda, I_1, \ldots, I_N)$ — локальная система координат на $\hat{M}_g$ такая, что при фиксированных I_s функция $\lambda(Q)$ параметризует некоторую область кривой $\Gamma = \Gamma(I)$. Любую такую систему координат будем называть *локальной связностью расслоения* $\hat{M}_g \to M_g$, поскольку для любого пути $I(\tau)$ в M_g и точки $Q_0 \in \Gamma(I(\tau_0))$ локально можно определить поднятие этого пути в $\hat{M}_g$, задав точки $Q(\tau) \in \Gamma(I(\tau))$ условием $\lambda(Q(\tau)) = \lambda(Q_0)$.

Многозначные функции p, E, Ω, определенные на каждой кривой, являются многозначными функциями на $\hat{M}_g$, т. е. $p = p(\lambda, I)$, $E = E(\lambda, I)$, $\Omega = \Omega(\lambda, I)$. Если I зависит от X, Y, T, то p, E, Ω являются функциями λ, X, Y, T.

Теорема 3.1 [22]. *Необходимыми условиями существования асимптотического решения* (3.1) *с главным членом вида* (3.3—3.5) *и ограниченными членами* L_1, A_1 *являются уравнения*

$$(3.8)\qquad \frac{\partial p}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial E}{\partial T}-\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right)-\frac{\partial E}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial T}-\frac{\partial\Omega}{\partial X}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial Y}-\frac{\partial E}{\partial X}\right)=\\ =\frac{\langle\psi^+K\psi\rangle_x}{\langle\psi\psi^+\rangle_x}\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

Уравнения (3.8) можно представить в инвариантной форме, не зависящей от фиксации локальной связности λ. Если I зависят от X, Y, T, то прообразом $I(X, Y, T)$ в $\hat{M}_g$ является четырехмерное многообразие $\mathcal{M}^4\subset\hat{M}_g$. Рассмотрим на $\mathcal{M}^4$ 1-форму $\omega = p\,dX + E\,dY + \Omega\,dT$. Тогда уравнения (3.8) в случае $K\equiv 0$ эквивалентны требованию, что на $\mathcal{M}^4$ внешний квадрат дифференциала $d\omega$ (который является 4-формой) должен равняться нулю, т. е.

$$(3.9)\qquad d\omega\wedge d\omega = 0.$$

Изложенная в § 1 конструкция решений уравнений (4) содержит в частном случае и конструкцию решений уравнений Лакса $L_t = [A, L]$. Рассмотрим подмногообразие $M_g^0\subset M_g$ данных (1.3), для которых соответствующий дифференциал dE является точным, т. е. $E = E(Q)$ — однозначная функция на Γ. В этом случае коэффициенты L и A не зависят от y, и (4) переходит в уравнение Лакса. Функцию $E(Q)$ можно использовать в качестве локальной связности. При этом $p = p(E, X, T)$, $\Omega = \Omega(E, X, T)$ и уравнение (3.8) превращается в

$$(3.10)\qquad \partial_T p-\partial_X\Omega = -\frac{\langle\psi^+K\psi\rangle_x}{\langle\psi^+\psi\rangle_x}\frac{\partial p}{\partial E}.$$

При $K\equiv 0$ уравнение (3.10) совпадает с уравнением $\partial_T p - \partial_X\Omega = 0$, впервые полученным в частном случае уравнения КдФ в работе [59] как следствие усредненных законов сохранения.

§ 4. Конструкция точных решений уравнений Уизема

Пусть $n_\alpha\geqslant m+1$ — целые числа такие, что $\sum n_\alpha = g + l(m+1)$. Для любой кривой Γ рода g с отмеченными точками P_α общего положения и с фиксированными в их окрестностях локальными параметрами k_α^{-1} существует единственная с точностью до прибавления констант функция $\lambda(Q)$, имеющая полюсы кратности n_α в P_α, голоморфная вне них и такая, что в окрестности P_α имеет место

$$\lambda^{1/n_\alpha}(Q) = k_\alpha(Q) + O(k_\alpha^{-m}(Q)).$$

В случае общего положения можно считать, что нули q_i, $i = 0, \ldots, N$, дифференциала $d\lambda$ простые. Их число равно $N+1$, где $N = 3g-3+l(m+2)$. Функцию $\lambda(Q)$ можно однозначно определить (т. е. фиксировать неопределенную константу), если потребовать, чтобы было выполнено $\lambda(q_0)\equiv 0$. При этом в качестве локальных координат на M_g можно выбрать величины $\lambda_i = \lambda(q_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Наборы $(\lambda(Q), \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ образуют локальные системы координат на $\hat{M}_g$. Связности на $\hat{M}_g$, задаваемые таким образом, будут называться *каноническими*.

Зафиксируем на произвольной кривой Γ_0 общего положения какой-либо кусочно-гладкий контур $\mathcal{L}_0$ (не обязательно замкнутый и связный). Используя связность $\lambda(Q)$, можно разнести этот контур на кривые Γ, достаточно близкие к Γ_0. Аналогичным образом можно определить на каждом подобном контуре $\mathcal{L}\in\Gamma$ дифференциал dh, если задать кусочно-гладкий дифференциал dh на начальном контуре $\mathcal{L}_0\subset\Gamma_0$.

Стандартным образом с помощью интегралов типа Коши доказывается, что на Γ существует единственный дифференциал $d\Lambda$, мероморфный вне $\mathcal{L}$ с единственным полюсом в q_0, непрерывно продолжимый на $\mathcal{L}$. Причем его предельные значения на $\mathcal{L}$ должны удовлетворять условию «скачка»

$$(4.1) \qquad d\Lambda^+(\tau) - d\Lambda^-(\tau) = dh(\tau), \quad \tau \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, периоды $d\Lambda$ по всем циклам на Γ должны быть вещественными.

Теорема 4.1 ([22]). *Пусть $\lambda_i = \lambda(q_i)$ так зависят от X, Y, T, что для любого $i = 1, \ldots, N$ выполнено одно из двух условий*:

$$(4.2) \qquad \oint \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_i}} (d\Lambda + X\,dp + Y\,dE + T\,d\Omega) = 0 \quad \text{либо} \quad \lambda_i = \text{const}.$$

Тогда $p = p(\lambda, X, Y, T)$, $E = E(\lambda, X, Y, T)$, $\Omega = \Omega(\lambda, X, Y, T)$ удовлетворяют уравнениям

$$(4.3) \qquad \partial_T p = \partial_X \Omega, \quad \partial_Y p = \partial_X E, \quad \partial_T E = \partial_Y \Omega.$$

Интегралы в (4.2) берутся по малым контурам вокруг точек q_i. Если q_i не лежат на $\mathcal{L}$, то первое из условий (4.2) означает, что дифференциал, стоящий под знаком интеграла, обращается в нуль в точках q_i.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал $d\hat{S} = d\Lambda + Xdp + YdE + Td\Omega$. Из постоянства его скачка на $\mathcal{L}$ следует, что дифференциал $\partial_X d\hat{S}$ мероморфен на Γ. Условия (4.2) гарантируют отсутствие полюсов у $\partial_X d\hat{S}$ в точках q_i. Следовательно, дифференциал $\partial_X d\hat{S} - dp$ голоморфен на Γ (он мог бы иметь полюс (простой) в точке q_0, но это невозможно по теореме о вычетах). Так как по условиям нормировки периоды этого голоморфного дифференциала по любому циклу вещественные, то он равен нулю. Аналогично доказывается, что $dE = \partial_Y d\hat{S}$, $d\Omega = \partial_T d\hat{S}$. Равенства (4.3) являются следствием равенства смешанных производных для $d\hat{S}$. Теорема доказана.

При заданных X, Y, T уравнения (4.2) — это система N уравнений на N неизвестных λ_i. Ее решения $\lambda_i(X, Y, T)$ определяют частные решения уравнений Уизема для невозмущенных уравнений (4) ($K \equiv 0$). Эти решения зависят от dh и от выбора канонической связности. Класс этих решений можно расширить, допуская у $d\Lambda$ постоянные полюсы (см. [22]). Как видно из доказательства теоремы, она останется справедливой, если все нарушения аналитичности $d\Lambda$ не зависят от X, Y, T. По-видимому, наиболее общий класс точных решений можно получить, определяя $d\Lambda$ как решение $\bar\partial$-проблемы с постоянной правой частью. К этому вопросу мы планируем вернуться в отдельной публикации. Кроме обобщений определения $d\Lambda$, можно расширить и способы выбора канонических связностей.

Пусть $\mathfrak{M} \subset M_g$ — подмногообразие M_g (возможно, совпадающее с ним). Будем говорить, что на расслоении $\hat{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{M}$, являющемся ограничением $\hat{M}_g$ на $\mathfrak{M}$, задана допустимая связность, если на каждой кривой Γ, входящей в набор данных Γ, P_α, k_α^{-1}, определяющих точку $\mathfrak{M}$, определена функция $\lambda(Q)$ такая, что для любого числа λ_0, принадлежащего окрестности $\lambda(P_\alpha)$, величины $k_\alpha^i(Q)$, $i = 1, \ldots, m$, где Q определяется из условия $\lambda(Q) = \lambda_0$, являются корректно определенными функциями λ_0, т. е. не зависят от Γ. Отметим, что канонические связности являются допустимыми. Точки q_i, в которых $d\lambda = 0$, являются особенностями связности.

Теорема 4.1. *Пусть* $(\Gamma, P_\alpha, [k_\alpha^{-1}]_m) \in \mathfrak{M}$ *так зависят от X, Y, T, что в каждой из особенностей некоторой допустимой связности выполнено одно из условий* (4.2). *Тогда соответствующие абелевы интегралы* p, E, Ω *удовлетворяют уравнениям* (4.3).

В частном случае подмногообразия данных $M_g^0 \subset M_g$, определяющих решения уравнений типа Лакса, и связности на M_g^0, задаваемой функцией $E(Q)$, сформулированная теорема приводит к уравнениям (если все $\lambda_i =$

$= E(q_i) \neq \text{const})$

$$(4.4)\qquad w_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_1}) + v_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_1})\, T + X = 0, \quad N_1 = \dim M_g^0,$$

где

$$(4.5)\qquad v_i = \frac{d\Omega}{dp}(q_i), \quad w_i = \left(\oint \frac{d\Lambda}{\sqrt{\lambda - \lambda_i}}\right)\left(\frac{dp}{\sqrt{\lambda - \lambda_i}}\right)^{-1}.$$

Уравнения (4.4) были предложены в работе [23] как обобщение метода «годографа». Следует отметить, что в [23] отсутствовала эффективная конструкция функций w_i. Вторая из формул (4.5) дополняет схему работы [23].

В отличие от общего пространственно-двумерного случая, где наша конструкция дает пока лишь частные решения соответствующих уравнений Уизема, уравнения (4.4) позволяют решить задачу Коши для уравнений Уизема для параметров конечнозонных решений уравнений типа Лакса. Дифференциал dh, входящий в определение $d\Lambda$, и контур $\mathscr{L}$ выражаются через начальные значения $\lambda_i(X, 0)$.

Дадим краткий набросок построения dh в случае уравнения КдФ (общий случай уравнений типа Лакса практически ничем принципиальным не отличается от этого частного случая). Вещественные конечнозонные решения уравнения КдФ задаются гиперэллиптической кривой Γ: $y^2 = R(E) = \prod_i (E - \lambda_i)$, $i = 0, \ldots, 2g$, λ_i — вещественные, и набором полюсов γ_s. Дифференциалы dp и $d\Omega$ имеют вид

$$(4.6)\qquad dp = (E^g + r_1 E^{g-1} + \ldots + r_g)\frac{dE}{\sqrt{R(E)}},$$

$$d\Omega = (E^{g+1} - s_1 E^g + \tilde{r}_1 E^{g-1} + \ldots + \tilde{r}_g)\frac{dE}{\sqrt{R(E)}},$$

где константы r_i, $\tilde{r}_i$ определяются из условий нормировки

$$(4.7)\qquad \int_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} dp = 0, \quad \int_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} d\Omega = 0, \quad j = 1, \ldots, g, \quad s_1 = \frac{1}{2}\sum \lambda_i.$$

Рассмотрим дифференциал

$$(4.8)\qquad d\hat{S}(X, E) = \int_0^X dp(X', E)\, dX' + d\hat{S}_0, \quad d\hat{S}_0 = d\hat{S}_0(E).$$

Если $d\hat{S}_0 \equiv 0$, то этот дифференциал аналитичен вне вещественной оси и имеет скачок на прообразе вещественной оси, который мы обозначим через $dh(E)$. Наличие этого скачка связано с тем, что на вещественной оси мы не можем выбрать однозначную ветвь $dp(X, E)$ при всех X. По теореме 4.1′ дифференциал dh задает решение уравнений Уизема

$$(4.9)\qquad \lambda_{iT} + v_i \lambda_{iX} = 0,$$

которое по построению dh имеет нужное начальное значение.

В отдельных случаях можно, выбирая постоянный дифференциал $d\hat{S}_0$ (со скачками и полюсами), добиться того, что $d\hat{S}$ будет мероморфен. Приведем в качестве примера такой ситуации конструкцию «усредненно n-зонных решений» уравнений (4.9).

Пусть $d\Omega^{(n)}$ — нормированный дифференциал на Γ с единственной особенностью в бесконечности вида $d\Omega^{(n)} = dk^n(1 + O(k^{-n}))$.

С л е д с т в и е. *Уравнения* (4.4), *где* $w_i = \frac{d\Omega^n}{dp}(\lambda_i)$, *задают автомодельные решения* $\lambda_i = t^\nu \lambda_i(x/t^{1+\nu})$ *уравнений Уизема* (4.9) *с показателем автомодельности* $\nu = \frac{2}{n-3}$.

В работе [62] численно было найдено автомодельное решение с показателем $\gamma = {}^1/_2$ при $g = 1$, которое удовлетворяло граничным условиям $\lambda_2(z^+) = \lambda_3(z^+)$, $\lambda_1(z^+) = u_+$, $\lambda_1(z^-) = \lambda_2(z^-)$, $\lambda_3(z^-) = u_-$, $z^\pm = u_\pm - u_\pm^3$. Это решение описывает при $t \gg 0$ структуру ударной волны, возникающей после «момента опрокидывания». В недавней работе Г. М. Потемина было показано, что усредненно 7-зонное решение, построенное в силу приведенного выше следствия, удовлетворяет требуемым граничным условиям. Границы области осцилляций оказались равными $z^+ = \frac{\sqrt{10}}{27}$, $z^- = -\sqrt{2}$ (приближенные значения этих величин, найденные численно в [62], были равны $z^+ \cong 0{,}117$, $z^- \cong -1{,}41$; равенство $z^- = -\sqrt{2}$ было отмечено в работе [64]). Важным следствием этого результата является гладкость автомодельного решения во всей области $z^- < z < z^+$, хотя из схемы численного решения [62] следовало, что это решение возможно имеет слабый разрыв внутри области.

§ 5. Квазиклассический предел двумерных интегрируемых уравнений. Уравнение Хохлова — Заболотской

Простейшими решениями нелинейных уравнений (4) являются «нуль-зонные» решения, отвечающие в нашей конструкции кривым Γ рода $g = 0$. Они имеют вид (1.6), где $\hat{u}_i$ и $\hat{v}_j$ — постоянные матрицы. Оказывается, что уравнения Уизема даже в этом случае являются нетривиальными и, как будет видно в дальнейшем, в ряде случаев представляют самостоятельный физический интерес. Эти уравнения совпадают с квазиклассическим пределом (4). Из результатов § 3 следует, что они могут быть представлены в виде

$$(5.1)\qquad \left(\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\frac{\partial p}{\partial k} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\frac{\partial E}{\partial k} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial E}{\partial x}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial k} = 0,$$

где $p = p(k, x, y, t)$, $E = E(k, x, y, t)$, $\Omega = \Omega(k, x, y, t)$ — рациональные функции переменной k.

Пример 1. Пусть $p = k$, $E = \sigma^{-1}(k^2 - u)$, $\Omega = k^3 - \frac{3}{2}uk - w$. В этом случае уравнение (5.1) эквивалентно системе

$$(5.2)\qquad w_x = \sigma\frac{3}{4}u_y, \quad \sigma w_y = u_t + \frac{3}{2}uu_x.$$

Исключая w из (5.2), получим уравнение Хохлова — Заболотской.

Пример 2. В случае $p = k$,

$$(5.3)\qquad E = k + \sum_{i=1}^{N}\frac{\eta_i}{k - v_i}, \quad \Omega = k^2 + u,$$

уравнение (5.1) приводит к системе

$$(5.4)\qquad \begin{cases} v_{it} - 2v_i v_{ix} - u_x = 0, & \eta_{it} - 2(v_i\eta_i)_x = 0, \\ u_x - u_y - \sum\limits_{i=1}^{N}\eta_{ix} = 0. & \end{cases}$$

Решения системы (5.4), не зависящие от y, соответствуют квазиклассическому пределу векторного нелинейного уравнения Шредингера, который, как было впервые замечено в [60], описывает N-слойные решения уравнения Бенни. В работе [60] были рассмотрены квазиклассические пределы общих уравнений Лакса и показано, что они являются условием совместности алгебраического и обыкновенного дифференциального уравнений. Из этого следовала конструкция интегралов этих уравнений. При этом вопрос о построении решений оставался открытым. Схема решения задачи Коши для системы (5.4), основанная на развитии идей работы [60], была предложена в [61]. Отметим, что эта схема может быть легко получена как частный случай нашей конструкции решений уравнений (5.1), вытекающей из результатов предшествующего параграфа.

Рассмотрим в качестве примера конструкцию решений уравнений (5.2). Она будет приведена в замкнутой форме без прослеживания буквальных соответствий ее элементов элементам конструкции предшествующего параграфа.

Определим полином

$$\lambda(k) = k^4 - 2uk^2 - \frac{4}{3}wk - \lambda_0, \tag{5.5}$$

где константа $\lambda_0 = \lambda_0(u, w)$ выбирается так, чтобы $\lambda(q_0) = 0$, где q_0, q_1, q_2 — это нули дифференциала $d\lambda$. Для дальнейшего удобно перейти от u, w к переменным q_1, q_2 с помощью соотношений

$$u = q_1q_2 - (q_1 + q_2)^2, \quad w = 3q_1q_2(q_1 + q_2). \tag{5.6}$$

Тогда

$$\lambda_0 = (q_1 + q_2)^4 - 2u(q_1 + q_2)^2 + \frac{4}{3}w(q_1 + q_2). \tag{5.7}$$

(Отметим, что выбор $\lambda(k)$ в виде (5.5) соответствует в терминологии § 4 фиксации канонической связности.) В этом случае

$$p = \lambda^{1/4}(k) + O(k^{-1}), \quad E = \lambda^{1/2}(k) + O(k^{-1}), \quad \Omega = \lambda^{3/4}(k) + O(k^{-1}).$$

Зададим произвольный контур $\mathscr{L}$ в k-плоскости и гладкий дифференциал $dh(\tau)$ на нем. Определим функцию $\mathscr{F}(k)$ формулой

$$\mathscr{F}(k) = \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{dh(\tau)}{k - \xi(\tau)}, \tag{5.8}$$

где $\xi(\tau)$ является одним из корней уравнения $\lambda(\xi) = \tau^4$. Эта функция зависит как от параметров от величин q_1, q_2. Это мы отразим в записи $\mathscr{F} = \mathscr{F}(k \mid q_1, q_2)$.

В рассматриваемом случае уравнения (4.2) имеют вид

$$0 = \frac{\partial\mathscr{F}}{\partial k}(q_i|q_1, q_2) + x + \sigma^{-1}(2q_i - u)y + \left(3q_i^2 - \frac{3}{2}u\right)t, \quad i = 1, 2. \tag{5.9}$$

Система (5.9) задает неявным образом функции $q_1(x, y, t)$, $q_2(x, y, t)$.

Следствие. *Если функции $q_i(x, y, t)$, $i = 1,2$, определены из системы* (5.9), *то $u = u(x, y, t)$ и $w = w(x, y, t)$, заданные соотношениями* (5.6), *удовлетворяют уравнениям* (5.2).

Уравнения (5.2) имеют автомодельные решения

$$t^\gamma u(x/t^{1+\gamma}, y/t^{1+\gamma/2}),$$

и аналогично для w. Подобные решения можно получить, выбирая в качестве $\mathscr{F}(k \mid q_1, q_2) = \Phi_n$, где Φ_n — полином по k степени n, однозначно определяемый соотношением

$$\Phi_n(k \mid q_1, q_2) = \lambda^{n/4}(k \mid q_1, q_2) + O(k^{-1}).$$

Показатель автомодельности соответствующих решений равен $\gamma = 2/(n - 3)$.

Для получения не зависящих от y решений уравнений (5.4) следует поступить следующим образом. Определим функцию $\mathscr{F}$ формулой (5.8), где $\lambda(k) = E(k)$ и ξ определяется из соотношения $\lambda(\xi) = \varphi(\tau)$ ($\varphi(\tau)$ — некоторая параметризация контура $\mathscr{L}$). Функция $\mathscr{F}(k \mid \eta_i, v_i)$ зависит как от параметров от величин η_i, v_i. Если $\eta_i(x, t)$, $v_i(x, t)$ определить из системы уравнений

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial k}(\varkappa_j|\eta_i, v_i) + x + 2t\varkappa_j = 0, \quad j = 1, \ldots, 2N, \tag{5.10}$$

где $\varkappa_j$ — корни уравнения

$$dE(\varkappa_j)=0 \Leftrightarrow 1=\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta_i}{(\varkappa_j-v_i)^2}, \tag{5.11}$$

то они будут удовлетворять системе (5.4).

ГЛАВА III

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРИ ОДНОМ УРОВНЕ ЭНЕРГИИ ДВУМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Основной целью настоящей главы является построение спектральной теории оператора

$$H=-\partial_x^2-\partial_y^2+u(x,\ y) \tag{0.1}$$

с периодическим гладким потенциалом u. Из результатов [30] следует, что спектральное множество Флоке $M^2\subset C^3$ (определяемое как множество троек комплексных чисел, для которых уравнение

$$H\psi(x,\ y,\ t,\ Q)=E\psi(x,\ y,\ t,\ Q),\ Q=(E,\ w_1,\ w_2), \tag{0.2}$$

имеет блоховское решение $\psi(x,\ y,\ t,\ Q)$, $Q\subset M^2$, с «мультипликаторами» w_1, w_2) является аналитическим подмногообразием в C^3. *Комплексной ферми-кривой* Γ_{E_0}, *отвечающей «уровню энергии* E_0», называется сечение $M^2\subset C^3$ гиперплоскостью $E=E_0$. Как и в случае оператора (1.1.1), явное построение Γ_E и вытекающее из него детальное описание структуры этой римановой поверхности основано на конструкции с помощью теории возмущений формально блоховских решений уравнения (0.2).

§ 1. Теория возмущений для формально блоховских решений

Пусть $u_0(x,\ y)$ — произвольный гладкий периодический потенциал. Зафиксируем комплексное число w_{10}. Совокупность решений $\psi_\nu(x,\ y)$ уравнения

$$(-\partial_x^2-\partial_y^2+u_0(x,\ y))\psi_\nu=0 \tag{1.1}$$

будет называться *базисной*, если

$$\psi_\nu(x+l_1,\ y)=w_{10}\psi_\nu(x,\ y);\quad \psi_\nu(x,\ y+l_2)=w_{2\nu}\psi_\nu(x,\ y), \tag{1.2}$$

и если выполнены следующие условия:

1^0 существует «двойственная» совокупность решений $\psi_\nu^+(x,\ y)$ того же уравнения такая, что

$$\psi_\nu^+(x+l_1,\ y)=w_{10}^{-1}\psi_\nu^+(x,\ y);\quad \psi_\nu^+(x,\ y+l_2)=w_{2\nu}^{-1}\psi_\nu^+(x,\ y), \tag{1.3}$$

$$\langle\psi_{\nu y}\psi_\mu^+-\psi_\nu\psi_{\mu y}^+\rangle_x=r_\nu\delta_{\nu,\mu},\quad r_\nu\neq 0 \tag{1.4}$$

(т. к. $\psi_\nu\psi_\mu^+$ удовлетворяют (1.1,2,3), то r_ν не зависит от y);

2^0 для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ такой, что

$$f(x+l_1)=w_{10}f(x), \tag{1.5}$$

ряды (1.6) и (1.7) сходятся и равны

$$0=\sum_\nu\frac{\langle\psi_\nu^+f\rangle_x}{r_\nu}, \tag{1.6}$$

$$f(x)=\sum_\nu\psi_{\nu y}\frac{\langle\psi_\nu^+f\rangle_x}{r_\nu}=-\sum_\nu\psi_\nu\frac{\langle\psi_{\nu y}^+f\rangle_x}{r_\nu}. \tag{1.7}$$

Пример. Пусть $u_0 = 4$. Тогда для любого k функции

(1.8) $$\psi(x,\ y,\ k)=\exp\left(\left(k+\frac{1}{k}\right)x+i\left(k-\frac{1}{k}\right)y\right)$$

являются блоховскими решениями (1.1) с мультипликаторами

(1.9) $$w_1(k)=\exp\left(\left(k+\frac{1}{k}\right)l_1\right),\quad w_2(k)=\exp\left(i\left(k-\frac{1}{k}\right)l_2\right).$$

Непосредственно проверяется, что для любого

(1.10) $$w_{10} = w_1(k_0) \neq \exp(\pm 2l_1)$$

последовательность

(1.11) $$\psi_\nu(x,\ y) = \psi(x,\ y,\ k_\nu)$$

является базисной. Здесь k_ν определяются из уравнения $w_1(k_\nu) = w_{10}$ и равны

(1.12) $$k_\nu=\frac{\pi i n}{l_1}+\frac{1}{2}\left(k_0+\frac{1}{k_0}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\pi i n}{l_1}+\frac{1}{2}\left(k_0+\frac{1}{k_0}\right)\right)^2-1}$$

(индексы ν, нумерующие k_ν, — это пара $(n,\ \pm)$, состоящая из целого числа и знака). Двойственным набором являются функции

(1.13) $$\psi_\nu^+(x,\ y)=\psi(x,\ y,\ -k_\nu).$$

Замечание. По самому определению совокупность базисных функций «переопределена», и поэтому нельзя однозначно разложить $f(x)$ по ψ_ν или $\psi_{\nu y}$. Вместе с тем, для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$, удовлетворяющих (1.5), существуют *единственные* константы $c_\nu(y)$ такие, что

(1.14) $$f(x)=\sum_\nu c_\nu(y)\,\psi_{\nu y}(x,\ y),\quad g(x)=\sum_\nu c_\nu(y)\,\psi_\nu(x,\ y).$$

Из (1.4) следует, что эти константы равны

(1.15) $$c_\nu(y)=\frac{\langle f\psi_\nu^+-g\psi_{\nu y}^+\rangle_x}{r_\nu}.$$

Обозначим через «0» какой-либо из индексов ν и будем предполагать, что

(1.16) $$w_{20} \neq w_{2\nu},\quad \nu \neq 0.$$

Лемма 1.1. *Если выполнено условие* (1.16), *то для любой непрерывно дифференцируемой функции $\delta u(x,\ y)$ (с теми же периодами, что и $u_0(x,\ y)$) существуют единственные формальные ряды*

(1.17) $$F(y,\ Q_0)=\sum_{s=1}^{\infty} F_s(y,\ Q_0),$$

(1.18) $$\Psi(x,\ y,\ Q_0)=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x,\ y,\ Q_0),\quad \varphi_0=\psi_0(x,\ y)$$

такие, что выполнено уравнение

(1.19) $$(-\partial_x^2-\partial_y^2+u_0+\delta u)\,\Psi=2F\Psi_y+(F_y+F^2)\,\Psi$$

и следующие условия:

(1.20) $$\Psi(x + l_1, y,\ Q_0) = w_{10}\Psi(x,\ y,\ Q_0),\quad \Psi(x,\ y + l_2,\ Q_0) = w_{20}\Psi(x,\ y,\ Q_0),$$

(1.21) $$\langle\Psi_y\psi_0^+ - \Psi\psi_{0y}^+\rangle_x + F\,\langle\Psi\psi_0^+\rangle_x = r_0 = \langle\psi_{0y}\psi_0^+ - \psi_0\psi_{0y}^+\rangle_x$$

(*пока здесь Q_0 условно обозначает пару* $(w_{10},\ w_{20})$).

Доказательство. Уравнение (1.19) эквивалентно системе

(1.22) $$(-\partial_x^2-\partial_y^2+u_0)\,\varphi_s= -\delta u\varphi_{s-1}+\sum_{i=1}^{s}\left(2F_i\varphi_{s-i,\,y}+F_{iy}\varphi_{s-i}+\sum_{l=1}^{s-i}F_iF_l\varphi_{s-i-l}\right).$$

Будем искать решения (1.22) в виде суммы

$$\varphi_s = \sum_\nu c_\nu^s(y)\,\psi_\nu(x, y), \tag{1.23}$$

полагая, что c_ν^s выбраны так, что

$$\varphi_{sy} = \sum_\nu c_\nu^s(y)\,\psi_{\nu y}(x, y). \tag{1.24}$$

Из сделанного выше замечания следует, что это можно сделать однозначно. Из (1.23) и (1.24) следует

$$\sum_\nu c_{\nu y}^s \psi_\nu = 0. \tag{1.25}$$

Подставляя (1.24) и (1.23) в (1.22), получим, что

$$-\sum_\nu c_{\nu y}^s \psi_{\nu y} = R_s, \tag{1.26}$$

где R_s — правая часть (1.22). Из (1.25) и (1.26) следует

$$-c_{\nu y}^s = \langle R_s \psi_\nu^+\rangle_x / r_\nu. \tag{1.27}$$

Эти уравнения вместе с условием

$$c_\nu^s(y + l_2) = \frac{w_{20}}{w_{2\nu}}\, c_\nu^s(y) \tag{1.28}$$

позволяют однозначно определить c_ν^s для $\nu \neq 0$. Условие (1.21) достаточно для существования у (1.27) при $\nu = 0$ периодического решения. Это условие однозначно определяет F_s. Окончательные формулы имеют вид

$$F_s = \frac{\langle\psi_0^+ \delta u \varphi_{s-1}\rangle_x}{r_0} - \sum_{i=1}^{s-1}\left(F_i c_0^{s-i} - \sum_{l=1}^{s-i} \frac{F_i F_l \langle\varphi_{s-i-l}\psi_0^+\rangle_x}{r_0}\right); \tag{1.29}$$

$$c_0^0 = 1, \quad c_0^s = -\frac{1}{r_0}\sum_{i=1}^{s} F_i\langle\varphi_{s-i}\psi_0^+\rangle_x, \quad s \geqslant 1. \tag{1.30}$$

Для $\nu \neq 0$ $c_\nu^0 = 0$, а при $s \geqslant 1$ имеем

$$c_\nu^s = -r_\nu^{-1}\left(\sum_{i=1}^{s} F_i\langle\varphi_{s-i}\psi_\nu^+\rangle_x + \frac{w_{2\nu}}{w_{20} - w_{2\nu}}\int_y^{y+l_2} dy'\left(\frac{\langle\psi_\nu^+\delta u\varphi_{s-1}\rangle_x}{r_\nu} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{s}\left(F_i c_\nu^{s-i} - \sum_{l=1}^{s-i}\frac{F_i F_l\langle\varphi_{s-i-l}\psi_\nu^+\rangle_x}{r_\nu}\right)\right)\right). \tag{1.31}$$

Следствие. *Формула*

$$\tilde\psi(x, y, Q_0) = \exp\left(\int_0^y F(y', Q_0)\,dy'\right)\Psi(x, y, Q_0)\,\Psi^{-1}(0, 0, Q_0) \tag{1.32}$$

определяет формально блоховское решение уравнения

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x, y))\,\tilde\psi = 0, \quad u = u_0 + \delta u, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} \tilde\psi(x + l_1, y, Q_0) &= w_{10}\tilde\psi(x, y, Q_0), \\ \tilde\psi(x, y + l_2, Q_0) &= \tilde w_{20}\tilde\psi(x, y, Q_0), \end{aligned} \tag{1.34}$$

где

$$\tilde w_{20} = w_{20}\exp\left(\int_0^{l_2} F(y', Q_0)\,dy'\right). \tag{1.35}$$

Для резонансного случая (т. е. когда не выполнено условие (1.16)) поступим полностью аналогично тому, как это делалось в главе I. Обозначим через I произвольное конечное подмножество индексов ν такое, что

$$w_{2\alpha} \neq w_{2\nu}, \quad \alpha \in I, \quad \nu \notin I. \tag{1.36}$$

Лемма 1.2. *Существует единственный матричный формальный ряд*

$$F(y, w_{10}) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(y, w_{10}), \quad F = (F_\beta^\alpha), \quad \alpha, \beta \in I, \tag{1.37}$$

такой, что уравнение (1.19) (*где теперь F — матрица, а Ψ — вектор*) *имеет формальное решение Ψ, компоненты которого удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \Psi^\alpha(x + l_1, y, w_{10}) &= w_{10}\Psi^\alpha(x, y, w_{10}), \\ \Psi^\alpha(x, y + l_2, w_{10}) &= w_{2\alpha}\Psi^\alpha(x, y, w_{10}), \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\langle \Psi_y^\alpha \psi_\beta^+ - \Psi^\alpha \psi_{\beta y}^+ \rangle_x + \sum_{\gamma \in I} F_\gamma^\alpha \langle \Psi^\gamma \psi_\beta^+ \rangle_x = \delta_{\alpha\beta} r_\alpha. \tag{1.39}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.1. Соответствующие рекуррентные формулы для коэффициентов F_s и $c_\nu^{s,\alpha}$ для краткости опустим, поскольку они являются полными матричными аналогами формул нерезонансного случая.

Определим матрицу $T(y, w_{10})$ из уравнения

$$\partial_y T + TF = 0, \quad T_\beta^\alpha(0, w_{10}) = \delta_\beta^\alpha. \tag{1.40}$$

Тогда компоненты $\hat{\Psi}^\alpha$ вектора $\hat{\Psi} = T\Psi$ являются решениями уравнения (1.33). Как и в главе I, доказывается справедливость утверждения следствия леммы 1.1.3, т. е. что каждой точке поверхности, заданной характеристическим уравнением (1.1.49), отвечает единственное блоховское решение $\tilde{\psi}$ уравнения 1.33.

Замечание. Полностью переносятся на рассматриваемый случай и утверждения § 1 главы I о построении «двойственных» функций $\tilde{\psi}^+(x, y, Q_0)$, которые определены на тех же поверхностях, что и $\tilde{\psi}(x, y, Q_0)$.

§ 2. Структура комплексных «ферми-кривых»

Пусть $u_0 = 4$. Тогда, как уже было сказано ранее, для любого $w_{10} \neq e^{\pm 2l_1}$ уравнение (1.1) имеет базисную последовательность блоховских решений. Поэтому формулы леммы 1.1 определяют формально блоховские решения $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ уравнения (0.2), если в них положить $\delta u = u - E - 4$, и если k_0 удовлетворяет условию отсутствия резонансов (1.16). Из (1.8) следует, что резонансные пары точек имеют вид (k_{NM}^+, k_{NM}^-), $(\tilde{k}_{NM}^+, \tilde{k}_{NM}^-)$, где

$$k_{NM}^\pm = \pm z_{NM}\left(1 \pm \sqrt{1 + |z_{NM}|^{-2}}\right), \tag{2.1}$$

$$\tilde{k}_{NM}^\pm = \pm z_{NM}\left(1 \mp \sqrt{1 + |z_{NM}|^{-2}}\right), \tag{2.2}$$

$$z_{NM} = \frac{\pi i N}{2l_1} + \frac{\pi M}{2l_2}, \quad N, M \text{ — целые.} \tag{2.3}$$

Множество таких точек имеет лишь две предельные точки $k = 0$, $k = \infty$.

Дальнейшие построения и утверждения практически полностью повторяют свои аналоги в § 2 главы I. Поэтому мы ограничимся лишь их краткими формулировками, указывая по мере надобности на те незначительные изменения, которые надо внести в доказательства и конструкции § 2 главы I.

Зафиксировав h, можно выбрать окрестности $R^{\pm}_{NM}$ и $\tilde{R}^{\pm}_{NM}$ резонансных точек (2.1, 2.2) таким образом, что для любого k_0, не принадлежащего им, имеют место неравенства

$$|w_{20}w_{2\nu}^{-1}-1|>h, \quad |w_{20}^{-1}w_{2\nu}-1|>h. \tag{2.4}$$

Можно считать, что h выбрано достаточно малым, чтобы эти окрестности не пересекались. Предположим, что периодическая функция $u(x, y)$ аналитически продолжима в окрестность вещественных значений x, y (т. е. удовлетворяет неравенствам (1.2.13) для некоторых U, τ_1, τ_2).

Лемма 2.1. *Существует константа N_0 такая, что для k_0, не принадлежащих $R^{\pm}_{NM}$ и $\tilde{R}^{\pm}_{NM}$ и удовлетворяющих условию $|k_0|+|k_0|^{-1}>N_0$, ряды теории возмущений, построенные в силу леммы 1.1 (для $u_0=4$, $\delta u = u - E - 4$) и ее следствия, равномерно абсолютно сходятся и определяют блоховское решение $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ уравнения (0.2), аналитическое (по x, y, k_0) и не обращающееся в нуль.*

Замечание. Полностью аналогично предыдущему можно построить ряды теории возмущений для формально сопряженной функции $\tilde{\psi}^{+}(x, y, k_0)$, которая, как и ψ, аналитична в нерезонансной области.

Рассмотрим теперь $k_0 \in R^{+}_{NM}$ (или $\tilde{R}^{+}_{NM}$) и $|k_0|+|k_0^{-1}|>N_0$. В качестве множества резонансных индексов выберем $\nu=0$ и ν_0 такое, что $k_{\nu_0} \in R^{-}_{NM}$ (или $\tilde{R}^{-}_{NM}$ соответственно). Тогда для $w_{10} \in W_{NM} = w_1(R^{\pm}_{NM})$ (или $w_{10} \in \tilde{W}_{NM} = w_1(\tilde{R}^{\pm}_{NM})$) ряды теории возмущений леммы 1.2 определяют двумерное квазиблоховское решение уравнения (0.2). Соответствующая матрица $\hat{T} = T(l_2, w_{10})$ монодромии определяет двулистное накрытие $\hat{R}_{NM}$ или $\hat{\tilde{R}}_{NM}$ над областями W_{NM} и $\tilde{W}_{NM}$. Вновь назовем пару N, M *отмеченной*, если дискриминант характеристического уравнения для $\hat{T}$ имеет двукратный нуль.

Лемма 2.2. *Для неотмеченных пар N, M блоховская функция $\tilde{\psi}$ продолжается на $\hat{R}_{NM}(\hat{\tilde{R}}_{NM})$ и имеет там один простой полюс.*

Для повторения хода доказательства леммы 1.2.3 достаточно вместо леммы 1.1.1 воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 2.3. *Пусть $\psi(x, y, Q)$ и $\psi^{+}(x, y, Q)$ — блоховские решения уравнения (0.2), где Q — неособая точка поверхности Γ_E, тогда имеет место равенство*

$$dp_x\,\langle\psi_x\psi^{+}-\psi_x^{+}\psi\rangle_y+dp_y\,\langle\psi_y\psi^{+}-\psi\psi_y^{+}\rangle_x=0. \tag{2.5}$$

Функции $\langle\psi_x\psi^{+}-\psi\psi_x^{+}\rangle_y$ и $\langle\psi_y\psi^{+}-\psi\psi_y^{+}\rangle_x$ не имеют общих нулей в неособой части Γ_E.

Равенство (2.5) доказывается аналогично доказательству (1.1.6). Второе утверждение леммы вытекает из того, что при вариации δu потенциала u оператора (0.1) имеем

$$i\delta p_x\,\langle\psi_x\psi^{+}-\psi\psi_x^{+}\rangle_y+i\delta p_y\,\langle\psi_y\psi^{+}-\psi\psi_y^{+}\rangle_x=\langle\langle\psi^{+}\delta u\psi\rangle\rangle. \tag{2.6}$$

Аналогично лемме 1.2.4 строится продолжение $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ внутрь «центральной резонансной области» R_0: $|k_0|+|k_0|^{-1}\leqslant N_0$, которая заменяется на конечнолистное накрытие $\hat{R}_0$ области $W_0=w_1(R_0)$.

Обозначим через Γ_E риманову поверхность, полученную «вклейкой» $\hat{R}_{NM}$ и $\hat{\tilde{R}}_{NM}$ вместо вырезанных окрестностей неотмеченных резонансных точек и «вклейкой» $\hat{R}_0$ вместо R_0.

Теорема 2.1. *Риманова поверхность* Γ_E *изоморфна «спектральной ферми-кривой» оператора* (0.1). *Блоховские решения* $\psi(x, y, Q)$, $Q \in \Gamma_E$, *этого уравнения, нормированные условием* $\psi(0, 0, Q) \equiv 1$, *мероморфны на* Γ_E. *Полюсы* ψ *не зависят от* x, y. *В каждой из областей* $\hat{R}_{NM}$, $\hat{\tilde{R}}_{NM}$ (N, M — *неотмеченная пара*) *функция* ψ *имеет по одному простому полюсу. В области* $\hat{R}_0$ *она имеет* g_0 *полюсов, где* g_0 *в общем положении, когда* $\hat{R}_0$ *неособая, равно роду* $\hat{R}_0$. *Вне* $\hat{R}_0$, $\hat{R}_{NM}$, $\hat{\tilde{R}}_{NM}$ *функция* ψ *голоморфна.*

Все утверждения теоремы, кроме первого, следуют из самого построения Γ_E. Каждой точке Q поверхности Γ_E соответствуют мультипликаторы $w_i(Q)$, $i = 1, 2$. Они определяют отображение Γ_E в соответствующую «ферми-кривую». То, что это отображение устанавливает изоморфизм, вытекает из утверждения следующей леммы.

Для любого комплексного числа w_{10} обозначим через $Q_\nu \in \Gamma_E$ решения уравнения

$$w_1(Q_\nu) = w_{10}, \tag{2.7}$$

а через $\psi_\nu(x, y)$ — функции $\psi(x, y, Q_\nu)$.

Лемма 2.4. *Если уравнение* (2.7) *имеет простые корни, то совокупность функций* $\psi_\nu(x, y)$ *является базисной (в смысле данного в начале § 1 определения).*

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что дифференциал

$$d\Omega = -dp_x\,(\langle\psi_y\psi^+ - \psi\psi_y^+\rangle_x)^{-1} = dp_y\,(\langle\psi_x\psi^+ - \psi\psi_x^+\rangle_y)^{-1} \tag{2.8}$$

голоморфен на Γ_E и имеет нули в полюсах ψ и ψ^+. Утверждение леммы следует из рассмотрения контурных интегралов

$$S_{1N} = \int_{C_N} d\Omega \int_0^{l_1} f(x')\,\frac{\psi(x, y, Q)\,\psi^+(x', y, Q)}{1 - w_{10}w_1^{-1}(Q)}\,dx', \tag{2.9}$$

$$S_{2N} = \int_{C_N} d\Omega \int_0^{l_1} f(x')\,\frac{\psi_y(x, y, Q)\,\psi^+(x', y, Q)}{1 - w_{10}w_1^{-1}(Q)}\,dx', \tag{2.10}$$

где C_N — это объединение двух контуров, охватывающих точки $P_\pm$, которые имеют радиусы порядка N и N^{-1} и не проходят через резонансные области. Эти интегралы при $N \to \infty$ сходятся к нулю и $f(x)$ соответственно. Так как вычеты подынтегральных выражений совпадают с членами рядов (1.6) и (1.7), то лемма доказана.

Следствие 1. *Соответствие*

$$(w_1, w_2) \to (w_1^{-1}, w_2^{-1}) \tag{2.11}$$

определяет голоморфную инволюцию σ: $\Gamma_E \to \Gamma_E$ *ферми-кривых.*

Доказательство. Каждой точке $Q \in \Gamma_E$ отвечает блоховское решение $\psi(x, y, Q)$ с мультипликаторами $w_1(Q)$, $w_2(Q)$ и «двойственная» функция $\psi^+(x, y, Q)$ с мультипликаторами $w_1^{-1}(Q)$, $w_2^{-1}(Q)$. Так как ψ^+ есть блоховское решение того же уравнения (0.2), а точки Γ_E параметризуют все блоховские решения, то пара $w_1^{-1}(Q)$, $w_2^{-1}(Q)$ принадлежит ферми-кривой и лемма доказана. Одновременно мы получаем, что

$$\psi^+(x, y, Q) = \psi(x, y, \sigma(Q)). \tag{2.12}$$

Следствие 2. *Если потенциал* $u(x, y)$ *вещественный, то на кривой* Γ_E *определена антиголоморфная инволюция* τ, *индуцированная соответствием*

$$(w_1, w_2) \to (\overline{w}_1, \overline{w}_2), \tag{2.13}$$

при этом

$$\overline{\psi}(x,\ y,\ Q) = \psi(x, y, \tau(Q)). \tag{2.14}$$

Определение. Потенциал u называется *конечнозонным относительно уровня* E_0, если для него все пары N, M, кроме конечного числа, являются при построении Γ_{E_0} отмеченными, т. е. когда Γ_{E_0} имеет конечный род.

По определению отмеченных пар, для конечнозонных потенциалов относительно уровня E_0 поверхность Γ_{E_0} вне некоторой конечной области $|k_0| + |k_0|^{-1} \leqslant N_1$ совпадает с окрестностями точек $k = 0$ и $k = \infty$ на обычной комплексной плоскости. Поэтому она может быть компактифицирована двумя «бесконечно удаленными» точками $P_\pm$. В дальнейшем мы сохраним обозначение Γ_{E_0} для соответствующей компактной римановой поверхности.

Теорема 2.2. *Блоховские решения уравнения* (0.2) *при* $E = E_0$ *для потенциалов* u, *конечнозонных относительно* E_0, *определены вне двух точек* $P_\pm$ *компактной римановой поверхности* Γ_{E_0}, *на которой существует голоморфная инволюция* σ, $\sigma(P_\pm) = P_\pm$. *В окрестности* $P_\pm$ *эта функция* $\psi(x, y, Q)$, $Q \in \Gamma_{E_0}$, *имеет вид*

$$\psi(x,\ y,\ Q) = \exp\left((x \pm iy)\, k_\pm\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^\pm(x,\ y)\, k_\pm^{-1}\right), \tag{2.15}$$

где $k_\pm^{-1} = k_\pm^{-1}(Q)$ — *локальные параметры в окрестностях* $P_\pm$ (*причем* $k_\pm(\sigma(Q)) = -k_\pm(Q)$). *Вне* $P_\pm$ *функция* ψ *мероморфна, имеет* g *не зависящих от* x, y *полюсов, где* g — *в общем положении, когда* Γ_{E_0} *неособая, равно роду* Γ_{E_0}. *В этом случае полюсы* γ_s *и* $\gamma_s^+ = \sigma(\gamma_s)$ *являются нулями дифференциала третьего рода* $d\Omega$ *с простыми полюсами в точках* $P_\pm$ *и голоморфного вне них. Если потенциал* $u(x, y)$ *вещественный, то на* Γ_{E_0} *имеется антиголоморфная инволюция, коммутирующая с* σ *и такая, что* $\tau(P_\pm) = P_\mp$, $k_\pm(\tau(Q)) = \overline{k_\mp}(Q)$. *При этом набор полюсов* ψ *инвариантен относительно* τ.

Полностью аналогично теореме 1.3.1 доказывается и следующее утверждение.

Теорема 2.3. *При любом* E_0 *гладкий периодический потенциал* $u(x, y)$ *оператора* (0.1), *аналитически продолжимый в некоторую окрестность вещественных* x, y, *равномерно с любым числом производных аппроксимируется потенциалами* $u_G(x, y)$, *«конечнозонными относительно уровня* E_0*»*.

§ 3. Спектральная теория «конечнозонных относительно уровня E_0» двумерных периодических операторов Шредингера

Важным отличием спектральной теории нестационарного оператора Шредингера (1.1.1) с $\sigma = 1$ и двумерного оператора Шредингера в случае вещественных гладких периодических потенциалов $u(x, y)$ является то, что в первом случае соответствующая спектральная кривая Γ всегда неособая, а во втором случае «комплексная ферми-кривая» Γ_{E_0} может иметь конечное число особых точек. Полного описания возможных типов особенностей пока не получено.

Мы начнем этот параграф с краткого изложения обратной задачи восстановления «конечнозонных относительно уровня E_0» потенциалов $u(x, y)$ в случае неособых «ферми-кривых» Γ_{E_0} ([28, 29]).

Пусть Γ — неособая алгебраическая кривая рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, в окрестностях которых фиксированы локальные параметры $k_\pm^{-1}(Q)$, $k_\pm^{-1}(P_\pm) = 0$. Для любого набора g точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ общего положения существует единственная функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x,\ y,\ Q)$, мероморфная на Г вне $P_\pm$, имеющая полюсы в точках j_s и асимптотики

$$(3.1)\qquad \psi = e^{k_+ z}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^+(x,\ y)\,k_+^{-s}\right),\quad k_\pm = k_\pm(Q),\quad Q\to P_\pm,$$

$$(3.2)\qquad \psi = e^{k_-\bar z}c(x,\ y)\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^-(x,\ y)\,k_-^{-s}\right),\quad z=x+iy,\quad \bar z = x-iy.$$

В работе [27] было доказано, что такая функция ψ удовлетворяет уравнению

$$(3.3)\qquad \tilde H\psi = 0,\quad \tilde H = -\partial^2_{z\bar z} + A_{\bar z}\partial_{\bar z} + u,$$

где

$$(3.4)\qquad A_{\bar z}(x,\ y) = \partial_z \ln c(x,\ y),\quad u(x,\ y) = \partial_{\bar z}\xi_1^+(x,\ y).$$

Для функции ψ и соответственно для $A_{\bar z}$ и u были получены явные тэта-функциональные формулы.

В работах [28, 29] были найдены достаточные условия, которым должны удовлетворять данные (Г, $P_\pm$, $k_\pm$, γ_s) для того, чтобы соответствующий им оператор $\tilde H$ был чисто потенциальным, т. е. $A_{\bar z}\equiv 0$. Эти условия таковы:

1) на кривой Г существует инволюция σ: $\Gamma\to\Gamma$, имеющая две неподвижные точки $P_\pm$;

2) локальные параметры $k_\pm^{-1}$ должны удовлетворять условию $k_\pm(\sigma(Q)) = -k_\pm(Q)$;

3) точки γ_s и $\gamma_s^+ = \sigma(\gamma_s)$ образуют дивизор нулей дифференциала третьего рода $d\Omega$ с единственными простыми полюсами в точках $P_\pm$.

Достаточность этих условий следует из того, что если они выполнены, то дифференциал (3.5) голоморфен на Г вне $P_\pm$, где он имеет простые полюсы.

$$(3.5)\qquad d\tilde\Omega = \psi(x,\,y,\,Q)\psi^+(x,\,y,\,Q)d\Omega(Q),\quad \psi^+(x,\,y,\,Q) = \psi(x,\,y,\,\sigma(Q)).$$

Равенство нулю суммы вычетов этого дифференциала приводит к тому, что $c^2\equiv 1$ (т. к. $c(0,\ 0) = 1$, то $c(x,\ y)\equiv 1$). Последнего достаточно для равенства $A_{\bar z} = 0$.

Теорема 3.1. *Приведенные выше условия* (1—3) *на данные обратной задачи* (Г, $P_\pm$, $k_\pm$, γ_s) *являются необходимыми для того, чтобы соответствующий им оператор* (3.3) *был потенциальным* (*т. е. имел вид* (0.1)), *а потенциал* $u(x,\ y)$ *был гладким. Если потенциал и периодичен, то* Г *изоморфна «комплексной ферми-кривой»* $\Gamma_{E=0}$.

Доказательство. В общем случае оператор $\tilde H$, соответствующий данным (Г, $P_\pm$, $k_\pm$, γ_s), является квазипериодическим. Условия периодичности формулируются точно так же, как и для случая конечнозонных нестационарных операторов Шредингера. Определим дифференциалы квазиимпульсов dp_x, dp_y как дифференциалы второго рода на Г с единственными полюсами в точках $P_\pm$ вида

$$(3.6)\qquad dp_x = -i\,dk_\pm(1+O(k_\pm^{-2})),\quad dp_y = \pm\,dk_\pm(1+O(k_\pm^{-2}))$$

и однозначно нормированные условиями *вещественности* их периодов по всем циклам на Г. Если эти периоды кратны $2\pi/l_1$ для dp_x и $2\pi/l_2$ для dp_y, то оператор $\tilde H$ имеет периоды l_1, l_2 по x, y соответственно. Для периодических потенциальных операторов последнее утверждение теоремы доказывается точно так же, как и первое утверждение теоремы 2.1. После этого необходимость условий (1—3) для периодических операторов вытекает из теоремы 2.2. Вещественные матрицы периодов дифференциалов dp_x, dp_y являются невырожденными функциями параметров (Г, $P_\pm$, $[k_\pm^{-1}]_1$). Поэтому множество периодических операторов при $l_1, l_2\to\infty$ плотно среди всех конечнозонных относительно фиксированного уровня операторов (отвечающих гладким кривым). Это позволяет завершить доказательство теоремы.

Аналогичным образом доказывается, что для вещественности $u(x, y)$ необходимо существование на Γ антиинволюции τ такой, что $\tau(P_\pm) = P_\mp$, $k_+(\tau(Q)) = \overline{k_-(Q)}$, и инвариантность дивизора полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ относительно τ. Инволюция σ и антиинволюция τ коммутируют между собой.

В работе [29] были сформулированы достаточные условия на параметры (Γ, σ, τ, $P_\pm$, $k_\pm$, γ_s), гарантирующие гладкость соответствующего им потенциала u оператора (0.1). Помимо перечисленных требований, достаточно, чтобы Γ была относительно τ M-кривой, причем среди ее $g+1$ неподвижных овалов $a_0, a_1, \ldots, a_g$ было g овалов таких, что $\sigma(a_i) = a_{g_0+i}$ (здесь g_0 — род кривой Γ/σ; т. к. σ имеет две неподвижные точки, то $g = 2g_0$), $i = 1, \ldots, g_0$. Если точки γ_s выбраны по одной на каждом из овалов a_s, $s = 1, \ldots, g$, то соответствующий потенциал u будет гладким.

Кроме этих условий имеется и другой тип достаточных условий. Если антиинволюция $\tau\sigma$ является антиинволюцией разделяющего типа и дифференциал $d\Omega$ положителен на всех неподвижных овалах $\tau\sigma$ относительно ориентации, заданной на этих овалах как на границе одной из областей, на которые они разбивают Γ, то потенциал u будет гладким.

Приведенные два типа достаточных условий аналогичны условиям, гарантирующим гладкость конечнозонных потенциалов оператора (1.1.1) с $\sigma = 1$ и $\sigma = i$ соответственно. Полностью аналогичны и доказательства этих утверждений (см. [52]).

В недавней работе [64] была найдена целая серия достаточных условий, среди которых приведенные нами занимают крайние противоположные положения. Метод [64] основан на анализе тэта-функциональных формул для $u(x, y)$ и принципиально отличается от развиваемого нами подхода. Пока переформулировка всей серии условий [64] в нужную нам форму не получена. Как показано в [64], приведенные условия не только достаточны, но и необходимы для гладкости потенциалов u, отвечающих гладким кривым $\Gamma_{E=0}$. Эти потенциалы имеют вид ([29])

$$u(x, y) = -2\partial_z\partial_{\bar z} \ln\theta\,(U_1 z + U_2\bar z + \zeta_0) + c, \tag{3.7}$$

где константа c зависит от Γ, $P_\pm$ (ее явный вид найден в [65]), а тэта-функция θ является тэта-функцией Прима, т. е. построена по матрице периодов, нечетных относительно σ голоморфных дифференциалов. При определенных типах вырождения кривой Γ примиан кривой может оставаться невырожденным (в отличие от якобиана, который всегда вырождается). Это обстоятельство и обуславливает возможность существования гладких квазипериодических конечнозонных потенциалов, отвечающих особым кривым. Наиболее интересный случай, дающий основное состояние соответствующего оператора H, приведен в [29, 66]. Более общие примеры можно построить, используя хорошо известную технику построения «многосолитонных на фоне конечнозонных потенциалов» (см. для случая операторов типа (1.1.1) в [52]). Мы опустим детальное описание этих примеров, поскольку нам в настоящее время полного описания допустимых типов вырождения не известно. Для получения ответа на этот вопрос требуется более детальное исследование прямой спектральной задачи, которая была рассмотрена в предшествующем параграфе. Обратим внимание, что родственный вопрос об описании возможных типов вырождений обсуждается в письме Шиоты, помещенном в конце русского издания книги [67].

Из результатов предшествующего параграфа видно, что потенциалы, отвечающие гладким кривым, т. е. имеющие вид (3.7), плотны среди всех конечнозонных потенциалов (отвечающих кривым с возможными особенностями), поэтому утверждение теоремы о плотности конечнозонных потенциалов означает, что плотны и потенциалы вида (3.7).

В заключение мы отметим, что ограниченность объема статьи заставляет нас отказаться от обсуждения приложений спектральной теории периодических двумерных операторов Шредингера к теории нелинейных уравнений. Построение теории возмущений периодических решений уравнения Новикова — Веселова, получение уравнений Уизема для них (которые, кстати, имеют тот же вид (2.3.8) после замены $dp = dp_x$, $dE = dp_y$) полностью аналогично построениям главы II. Аналогично § 5 главы I можно доказать полноту в пространстве периодических по x, y функций произведений блоховских решений ψ, ψ^+ в резонансных точках и произведений $\psi(x, y, Q)$, $\psi^+(x, y, Q)$, а также ряд других утверждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия//УМН. — 1976. — Т. 31, вып. 1. — С. 55—136.

[2] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.

[3] McKean H., van Moerbeke P. The spectrum of Hill's equation//Invent. Math. — 1975. — V. 30. — P. 217—274.

[4] Lax P. D. Periodic solutions of Korteweg — de Vries equation//Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — V. 28. — P. 141—188.

[5] McKean H., Trubovitz E. Hill's operator and hyperelliptic functions theory in the presence of infinetely many branch points//Comm. Pure and Appl. Math. — 1977. — V. 29. — P. 143—226.

[6] Кричевер И. М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений//ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2.

[7] Кричевер И. М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии//Функцион. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 15—31.

[8] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений//УМН. — 1977. — Т. 32, вып. 6. — С. 180—208.

[9] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения//УМН. — 1981. — Т. 36, вып. 2. — С. 11—80.

[10] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения//УМН. — 1980. — Т. 35, вып. 6.

[11] Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ. — 1983. — Т. 23.

[12] Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ. — 1983. — Т. 23.

[13] Новиков С. П. Двумерные операторы Шредингера в периодических полях// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ. — 1983. — Т. 23. — С. 3—32.

[14] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I //Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ. — 1985. — Т. 4. — С. 179—285.

[15] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I //Функцион. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 43—53.

[16] Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза//Письма в ЖЭТФ. — 1974. — Т. 19, № 12. — С. 219—225.

[17] Захаров В. Е., Шульман Е. И. Вопросы интегрируемости пространственно-двумерных систем//ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 6. — С. 1325—1329.

[18] Кричевер И. М. Периодическая задача для уравнения КП-2//ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 4.

[19] Krichever I. M., Grinevich P. G. Algebraic Geometry Methods in soliton theory//Physica D, Nonlinear phenomena. — Manchester: University Press, 1988.

[20] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях //Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ. — 1980. — Т. 15. — С. 3—94.

[21] Dobrokhotov S. Y., Maslov V. P. Multiphase asymptotics of non-linear partial differential equations with a small parameter//Sov. Scien. Reviews. Math. Phys. Rev. — 1982. — V. 3. — P. 221—280.

[22] Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений// Функцион. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, вып. 3. — С. 37—52.

[23] Царев С. П. О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа//ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 3. — С. 534—537.

[24] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова — Уизема//ДАН СССР. — 1983. — Т. 270, № 3. — С. 781—785.

[25] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа//ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 294—297.

[26] Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. — М.: Наука, 1982.

[27] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности//ДАН СССР. — 1976. — Т. 229, № 1. — С. 15—18.

[28] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные периодические операторы Шредингера: явные формулы и эволюционные уравнения//ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 1. — С. 20—24.

[29] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные периодические операторы Шредингера: потенциальный случай//ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 784—788.

[30] Кучмент П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных//УМН. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 3—52.

[31] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза// Функцион. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54—66.

[32] Burchnall J. L., Chaundy T. W. Commutative ordinary differential operators. I //Proc. London Math. Soc. — 1922. — V. 21. — P. 420—440.

[33] Burchnall J. L., Chaundy T. W. Commutative ordinary differential operators. II //Proc. London Math. Soc. — 1928. — V. 118. — P. 557—583.

[34] Baker H. F. Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators»//Proc. Royal Soc. London. — 1928. — V. 118. — P. 584—593.

[35] Baker H. F. Abelian functions. — Cambridge, 1897.

[36] Дринфельд В. Г. О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец//Функцион. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 11—15.

[37] Кричевер И. М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов//Функцион. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. — С. 20—31.

[38] Mumford D. An algebro-geometrical construction of commutative operators and of solutions to the Toda lattice, KdV equation and related non-linear equations//Symp. Alg. Geom., Kyoto. — 1977. — Kinokunia — Tokyo, 1978.

[39] Тюрин А. Н. Классификация векторных расслоений над алгебраический кривой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — Т. 29. — С. 658—680.

[40] Родин Ю. Л. Краевая задача Римана для дифференциалов на римановых поверхностях //Уч. зап. Перм. ун-та. — 1980. — Т. 17, вып. 2. — С. 83—85.

[41] Koppelman W. Singular integral equations, boundary value problem and Riemann — Roch theorem//J. Math. and Mech. — 1961. — V. 10, n° 2. — P. 247—277.

[42] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили//Функцион. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 4. — С. 41—52.

[43] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967.

[44] Гриневич П. Г., Новиков С. П. О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами//Функцион. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. — С. 25—26.

[45] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2//ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 1.

[46] Sato M., Sato Y. Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold//Non-linear partial differential equations in applied science. — Amsterdam, New York: North Holland, 1983. — P. 259—271.

[47] Segal G., Wilson G. Loop groups and equations of KdV type//IHES Publ. Math. — 1985. — V. 61. — P. 5—65.

[48] Кричевер И. М. Метод Лапласа, алгебраические кривые и нелинейные уравнения//Функцион. анализ и его прил. — 1984. — Т. 18, № 3. — С. 43—56.

[49] Кричевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов//Функцион. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, № 2. — С. 46—63.

[50] Дубровин Б. А. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 19, № 2. — С. 285—296.

[51] Shiota T. Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations// Invent. Math. — 1986. — V. 83. — P. 333—382.

[52] Кричевер И. М. Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса//Функцион. анализ и его прил. — 1986. — Т. 20, № 3. — С. 42—54.

[53] Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1977.

[54] Фирсова Н. Е. Риманова поверхность квазиимпульса и теория рассеяния для возмущенного оператора Хилла//Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1975. — Т. 51, № 7.

[55] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза//Теорет. и мат. физика. — 1975. — Т. 23, № 1. С. 51—67.

[56] Чередник И. В. Эллиптические кривые и матричные солитонные дифференциальные уравнения//Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология. — ВИНИТИ. — 1984. — Т. 22. — С. 205—265.

[57] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные тэта-функциональные решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 2. — С. 267—286.

[58] Fay J. Theta-functions on Riemann surfaces//(Lect. Notes Math.) — 1973. — V. 352.

[59] Flashka H., Forest M. G., McLaughlin D. W. Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg — de Vries equation//Comm. Pure Appl. Math. — 1980. — V. 33, N 6. — P. 739—794.

[60] Захаров В. Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи//Функцион. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, № 2. — С. 15—24.

[61] Геогджаев В. В. Решение уравнений Бенни//Теорет. и мат. физ. — 1988. — Т. 73, № 2. — С. 225—263.

[62] Гуревич Л. П., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны//ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65, № 3. — С. 590—604.

[63] Авилов В. П., Кричевер И. М., Новиков С. П. Эволюция уитемовской зоны в теории Кортевега — де Фриза//ДАН СССР. — 1987. — Т. 295, № 2.

[64] Натанзон С. М. Несингулярные конечнозонные двумерные операторы Шредингера и примианы вещественных кривых//Функцион. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 1. — С. 79—80.

[65] Тайманов И. К. Блоховские собственные функции для некоторых двумерных периодических линейных операторов//ДАН СССР. — 1986. — Т. 289, № 5.

[66] Veselov A. P., Krichever I. M., Novikov S. P. Two-dimensional periodic Schrödinger operators and Prym's theta-functions//Geom. Today Int. Conf, Rome, June 4—11, 1984. — Boston, 1985. — P. 283—301.

[67] Mumford D. Tata Lectures on Theta I, II. — Boston; Basel, 1983, 1984. Рус. пер. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. — М.: Мир, 1988.

[68] Date E., Jimbo M., Kashivara, Miva T. Transformation groups for soliton equations. I//Proc. Japan Acad. — 1981. — V. 57 A. — P. 342—347; III//J. Phys. Soc. Japan. — 1981. — V. 50. — P. 3806—3812.

Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию 13 июля 1988 г.