И. М. Кричевер, Периодическая задача для уравнения Кадомцева–Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, 1988, том 298, номер 4, 802–807 цательным индексом, равным -1:

(25) $\operatorname{Re}[\zeta'(s)\psi(\zeta)]_\Gamma = f^*(\zeta)$,

где

$$f^*(\zeta) = F(\zeta) + \frac{3}{2}\operatorname{Re}\zeta'(s)(\zeta - \bar{\zeta})^{1/3}SG + \frac{3C}{2}\operatorname{Re} i\zeta'(s)(\zeta - \bar{\zeta})^{2/3}.$$

Выбрав подходящим образом вещественную постоянную C, можно добиться того, чтобы необходимое и достаточное условие задачи (25) выполнялось без всяких условий на функции $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$, а потому функция $\psi(\zeta)$ однозначно определяется.

Аналогично исследуется задача J_R.

Для уравнения (8) можно рассмотреть задачу, аналогичную задаче D.

З а м е ч а н и е. Вместо уравнений (1), (2), (8), (9) мы могли бы рассматривать более общие уравнения, возмущая их младшими членами вида $a(z)w_x + b(z)w_y + c(z)w + d(z)\bar{w}$. В этом случае можно свести эти задачи к интегральным уравнениям с помощью параметрикса, главную часть которого составляют построенные выше функции $G_j(\zeta;\ \xi_0)$. Однако тогда вместо точных теорем 1 и 2 мы доказываем лишь фредгольмовость указанных выше задач.

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
2 IX 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959. 2. *Джураев А.* – ДАН, 1986, т. 187, № 6, с. 1295–1298.

УДК 513.835 МАТЕМАТИКА

И.М. КРИЧЕВЕР

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

(*Представлено академиком С.П. Новиковым 2 VI 1986*)

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1]

(1) $$\frac{3}{4}\sigma^2 u_{yy} + \left(u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}\right)_x = 0, \qquad \sigma^2 = \pm 1,$$

является одним из фундаментальных уравнений математической физики. В работах [2, 3] для этого уравнения найдено коммутационное представление

$$\sigma A_y - L_t + [L, A] = 0,$$

(2) $$L = -\partial_x^2 + u(x, y, t), \qquad A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u\partial_x - w(x, y, t).$$

С использованием этого представления в [4, 5] решена задача Коши и доказана полная интегрируемость уравнения КП в классе быстро убывающих функций. Схемы интегрирования оказались принципиально различными для двух вариантов уравнения

КП, отвечающих разным знакам σ^2. Еще более разительно отличие периодических задач для уравнения КП–1 ($\sigma^2 = -1$) и КП–2 ($\sigma^2 = 1$). В работе [6] доказана формальная неинтегрируемость периодической задачи для уравнения КП–1 и высказана гипотеза об интегрируемости этой же задачи для уравнения КП–2. Полученный нами результат доказывает (по крайней мере локально) эту гипотезу.

В работе [7] построен широкий класс периодических и квазипериодических решений уравнения (1). Эти так называемые конечнозонные решения определяются произвольной неособой алгебраической кривой Γ с отмеченной точкой P_0 и набором g точек общего положения, где g – род Γ. В общем случае эти решения являются комплексными и мероморфными. Достаточные условия вещественности и неособости u для уравнений КП–1 и КП–2 найдены в работах [8, 9] соответственно. До настоящего времени вопрос о роли и месте конечнозонных решений в общей периодической задаче для уравнения КП оставался открытым.

Т е о р е м а 1. *Для любого гладкого вещественного периодического конечнозонного решения $u_0(x, y, t) = u_0(x + L_1, y, t) = u_0(x, y + L_2, t)$ уравнения КП–2 найдется такая константа ϵ, что для любой гладкой вещественной периодической функции $v(x, y)$ и такой, что $|u_0(x, y, 0) - v(x, y)| < \epsilon$, существует единственное решение уравнения КП–2 $u(x, y, t)$, которое при $t = 0$ равно $v(x, y)$. Это решение квазипериодично по t. Кроме того, существует последовательность конечнозонных решений $u_G(x, y, t)$ (отвечающих кривым все более высокого рода), сходящаяся к u вместе с любым числом производных равномерно на любом компакте.*

Ниже будут кратко изложены основные этапы доказательства этого утверждения, в ходе которого в окрестности u_0 строятся переменные типа действие–угол для периодической задачи для уравнения КП–2.

Пусть Γ – неособая алгебраическая кривая рода g, на которой определена антиголоморфная инволюция τ, имеющая $g + 1$ неподвижный овал $a_0, \ldots, a_g$ (такие кривые называются *М*-кривыми) Зафиксируем на Γ точку P_0 такую, что $\tau(P_0) = P_0 \in a_0$. Д и ф ф е р е н ц и а л о м к в а з и и м п у л ь с а dp называется единственный с точностью до пропорциональности дифференциал второго рода с полюсом второго порядка в P_0 с нулевыми периодами по циклам a_i, $\tau^*(dp) = -dp$. Определим на Γ, разрезанной по $a_1, \ldots, a_g$, первообразную $p(Q)$, нормированную условием $p(\widetilde{Q}) = 0$, где $\widetilde{Q}$ – произвольно выбранная начальная точка, $\widetilde{Q} = a_0$.

Для любого набора точек $\gamma_i \in a_i$ существует единственная функция $\psi(x, y, t, Q)$, называемая ф у н к ц и е й Б е й к е р а–А х и е з е р а, которая мероморфна вне P_0 и имеет простые полюсы в $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. В окрестности P_0 функция ψ представима в виде

$$(3)\qquad \psi = \exp(ipx - p^2 y + ip^3 t) \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, y, t) p^{-s}\right), \qquad p = p(Q).$$

В [7] доказано, что ψ удовлетворяет уравнениям

$$(\partial_y + L)\psi = (\partial_t + A)\psi = 0, \qquad u = 2i\xi_{1x},$$

является вещественной неособой и в общем случае квазипериодической функцией переменных x, y, t [7].

Назовем Γ и P_0 п е р и о д и ч е с к и м и, если

$$(4)\qquad \oint_{b_s} dp = 2\pi n_s L_1^{-1}, \qquad \oint_{b_s} dE = 2\pi m_s L_2^{-1}, \qquad n_s, m_s \text{ – целые.}$$

Здесь dE – нормированный абелев дифференциал с единственной особенностью в P_0 вида $dE = i\, dp^2 (1 + O(p^{-3}))$. Если выполнены условия (4), то на Γ корректно определены функции $w_1 = \exp(ipL_1)$, $w_2 = \exp(iEL_2)$. При этом

$$(5) \qquad \psi(x+L_1, y, t, Q) = w_1(Q)\,\psi(x, y, t, Q),$$
$$\psi(x, y+L_2, t, Q) = w_2(Q)\,\psi(x, y, t, Q).$$

Соответствующий потенциал $u(x, y, t)$ имеет периоды L_1 и L_2 по x, y.

Определим двойственную функцию Бейкера–Ахиезера ψ^+ [10]. Пусть $\hat{\omega}$ – единственный дифференциал второго рода на Γ, имеющий полюс второго порядка в P_0 и нули в точках γ_s. Кроме γ_s, у $\hat{\omega}$ имеется еще g нулей $\gamma_s^+ \in a_s$. Через ψ^+ обозначается функция, имеющая полюсы в γ_s^+ и следующий вид в окрестности P_0:

$$(6) \qquad \psi^+ = \exp(-ipx + p^2 y - ip^3 t)\cdot\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(x, y, t)\,p^{-s}\right).$$

Как доказано в [10], ψ^+ удовлетворяет формально сопряженным уравнениям $(-\partial_y + L^+)\psi^+ = (-\partial_t + A^+)\psi^+ = 0$. При сдвигах на периоды по x, y она умножается на $w_1^{-1}(Q)$ и $w_2^{-1}(Q)$ соответственно.

Для любого комплексного числа w_{10} обозначим через Q_n множество таких точек, что

$$(7) \qquad w_1(Q_n) = w_{10}.$$

Для всех, кроме конечного числа, n точки Q_n однозначно определяются равенством $p(Q_n) = p_0 + 2\pi n L_1^{-1}$. При $n \to \pm\infty$ $Q_n \to P_0$.

Т е о р е м а 2. *Для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ такой, что $f(x + L_1) = w_{10} f(x)$, ряд*

$$(8) \qquad \sum_n \frac{\langle \psi_n^+ f\rangle_x}{\langle \psi_n^+ \psi_n\rangle_x}\,\psi_n(x, y, t)$$

сходится к $f(x)$. (Условия сходимости (8) те же, что и у обычного ряда Фурье.)

Здесь для краткости обозначено $\psi_n = \psi(x, y, t, Q_n)$, а $\langle\,\cdot\,\rangle_x$ означает среднее по x. Эта теорема позволяет строить формально блоховские решения уравнения

$$(9) \qquad (\partial_y - \partial_x^2 + u_0(x, y, t) + \delta u(x, y, t))\,\tilde{\psi} = 0,$$

где $\delta u(x, y, t)$ – непрерывно дифференцируемая функция с периодами L_1 и L_2 по x, y.

Пусть Q_0 – точка Γ такая, что для Q_n, определенных в (7), где $w_{10} = w_1(Q_0)$, имеет место $w_{2n} = w_2(Q_n) \neq w_2(Q_0) = w_{20}$, $n \neq 0$.

Определим формальный ряд $\tilde{\psi}(x, y, t, Q_0)$ равенствами

$$(10) \qquad \tilde{\psi} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(x, y, t, Q_0), \qquad \varphi_0 = \psi_0 = \psi(x, y, t, Q_0);$$

$$(11) \qquad \varphi_s = \sum_n \left[c_n^{(s)}(t) + \int_0^y \frac{\langle \psi_n^+ \delta u \varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle \psi_n^+ \psi_n\rangle_x}\,dy'\right]\psi_n(x, y, t), \qquad s \geqslant 1;$$

$$(12) \qquad c_n^{(s)} = \left(\int_0^{L_2} \frac{\langle \psi_n^+ \delta u \varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle \psi_n^+ \psi_n\rangle_x}\,dy'\right)\frac{w_{2n}}{w_{20} - w_{2n}} + \frac{w_{20}}{w_{2n} - w_{20}} \sum_{i=1}^{s-1} c_n^{(s-i)} e_i, \quad n \neq 0;$$

$$(13) \qquad c_0^{(s)} = -\sum_{n\neq 0} c_n^{(s)}, \qquad e_s(Q_0, t) = \sum_{i=1}^{s-1} c_0^{(s-i)} e_i + \int_0^{L_2} \frac{\langle \psi_0^+ \delta u \varphi_{s-1}\rangle_x}{\langle \psi_0^+ \psi_0\rangle_x}\,dy'.$$

Л е м м а 1. *Ряд* (10) *является формально блоховским решением уравнения* (9). *При сдвигах на периоды по* x *и* y *он умножается соответственно на* w_{10} *и на*

(14) $$\tilde{w}_2(Q_0, t) = w_{20}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} e_s(Q_0, t)\right).$$

Назовем пару точек Q и Q' р е з о н а н с н о й, если $w_i(Q) = w_i(Q')$, $i = 1, 2$. Описание множества таких точек дается следующей леммой.

Обозначим через Γ^+ ту из двух открытых областей, на которые циклы $a_0, \ldots, a_g$ разбивают Γ и на которой $\operatorname{Re} p > 0$.

Л е м м а 2. *Для любой М-кривой* Γ *отображение*

(15) $$\Gamma^+ \ni Q \to (\operatorname{Re} p(Q), \operatorname{Re} E(Q))$$

является вещественным диффеоморфизмом Γ^+ *на правую полуплоскость в* R^2 *с* g *выколотыми точками. Пара* Γ *и* P_0 *является периодической тогда и только тогда, когда координаты этих выкинутых точек имеют вид* $(\pi n_s L_1^{-1}, \pi m_s L_2^{-1})$, *где* $n_s > 0$, m_s *целые. Все пары резонансных точек суть точки* $P^{\pm}_{nm} \in \Gamma^{\pm}$ *такие, что* $P^-_{nm} = \tau(P^+_{nm})$, *а* P^+_{nm} *является прообразом при отображении* (15) *точки с координатами* $(\pi n L_1^{-1}, \pi m L_2^{-1})$, n, m *целые и* $n > 0$, $(n, m) \neq (n_s, m_s)$.

З а м е ч а н и е. Принципиальное отличие спектральных теорий операторов $\sigma\partial_y - \partial_x^2 + u$ при $\sigma^2 = \pm 1$ связано именно со структурами множеств резонансных точек на соответствующих кривых. В случае $\sigma = i$ множество резонансных точек всюду плотно на неподвижных овалах антиинволюции на соответствующей кривой Γ, в то время как в рассматриваемом случае $\sigma = 1$ единственной предельной точкой служит P_0.

Обозначим через p_j нули dp, $j = 1, \ldots, 2g$. Из леммы 2 следует, что точки $P^{\pm}_{nm}$ и точки p_j можно покрыть окрестностями $D^{\pm}_{nm}$, D_j так, что для Q_0, не принадлежащих этим областям, имеют место равномерные оценки

$$|w_{20}w_{2n}^{-1} - 1| \geqslant h_0 > 0.$$

Л е м м а 3. *Существует константа* ϵ *такая, что для* $|\delta u| < \epsilon$ *ряд* (10) *равномерно сходится на* $\Gamma \backslash P_0 \cup D_j \cup D^{\pm}_{nm} \cup \tilde{D}_s$ *и определяет там голоморфное блоховское решение* $\tilde{\psi}(x, y, t, Q_0)$ *уравнения* (9) (*здесь* $\tilde{D}_s$ – *некоторые окрестности полюсов* γ_s *функции* $\psi(x, y, t, Q)$). *Функция* $\tilde{\psi}$ *аналитически продолжается в* $\tilde{D}_s$, *где она имеет простой полюс* $\tilde{\gamma}_s \in a_s$, $s = 1, \ldots, g$.

Пусть индекс α обозначает либо одно из чисел $j = 1, \ldots, 2g$, либо одну из пар целых $(n > 0, m)$, $(n, m) \neq (n_s, m_s)$. Обозначим через $\hat{D}_\alpha$ образы при отображении $w_1(Q)$ областей D_j и $D^{\pm}_{nm}$ соответственно. Модифицируя формулы (10)–(13), можно для каждого $w_1 \in \hat{D}_\alpha$ определить формальные ряды $\tilde{\psi}_l^{(\alpha)}(x, y, t, w_1)$, $l = 1, 2$, являющиеся формальными решениями (9), которые при сдвиге на L_1 по x умножаются на w_1, а при сдвиге на L_2 по y преобразуются следующим образом:

(16) $$\psi_l^{(\alpha)}(x, y + L_2, t, w_1) = \sum_{k=1}^{2} T^{\alpha}_{lk}(w_1, t)\,\psi_k^{(\alpha)}(x, y, t, w_1),$$

где $T^{\alpha}_{lk}(w_1, t)$ задаются формальными рядами, аналогичными (13).

Л е м м а 4. *Для* $|\delta u| < \epsilon$ *существуют голоморфные* (*по* w_1) *решения уравнения* (9), *удовлетворяющие условию* (16).

Блоховские решения уравнения (9) для $w_1 \in \hat{D}_\alpha$ определены на $\hat{\hat{D}}_\alpha$ – двулистной накрывающей $\hat{D}_\alpha$, заданной уравнением

(17) $$\det(z_\alpha - T^{\alpha}_{lk}(w_1, t)) = z_\alpha^2 - (\operatorname{Sp} T(w_1, t))z_\alpha + \det(T(w_1, t)) = 0.$$

Пусть $w_{1\alpha}$ равно либо $w_1(p_j)$, либо $w_1(P^{\pm}_{nm})$. Определим

(18) $d_\alpha(t) = (\mathrm{Sp}\, T(w_{1\alpha}, t))^2 - 4 \det T(w_{1\alpha}, t)$.

Лемма 5. *Числа d_{nm} являются вещественными и неотрицательными. Если δu l раз непрерывно дифференцируема, то найдется константа h такая, что*

(19) $d_{nm} \leqslant h \cdot (|n| + |m|)^{-2l-2}$.

Отметим, что $\hat{D}_{nm}$ неприводима тогда и только тогда, когда $d_{nm} > 0$. Соответствующие пары (n, m) будут называться отмеченными. (В общем положении все пары (n, m) являются отмеченными.)

Обозначим через $\hat{\Gamma}$ риманову поверхность, полученную из $\Gamma \backslash P_0$ простейшей перестройкой, при которой "вырезаются" области D_j и те из областей $D^{\pm}_{nm}$, для которых $d_{nm} > 0$. Вместо них "вклеиваются" соответствующие области $\hat{D}_\alpha$. Инволюция τ продолжается на $\hat{\Gamma}$, где она имеет, кроме неподвижных овалов $\tilde{a}_s$, совпадающих вне D_j со старыми овалами a_s, еще новые "запрещенные" овалы $\tilde{a}_{nm}$, соответствующие отмеченным парам (n, m).

Теорема 3. *На $\hat{\Gamma}$ определена блоховская функция $\tilde{\psi}(x, y, t, Q)$, являющаяся решением уравнения* (9). *Эта функция имеет по одному простому полюсу на каждом из неподвижных овалов $\gamma_s \in \tilde{a}_s$, $\tilde{\gamma}_{nm} \in a_{nm}$.*

Замечание. Недавно И.К.Таймановым доказано существование римановой поверхности блоховских функций у уравнения $(\partial_y - \partial_x^2 + u)\tilde{\psi} = 0$ с любым гладким периодическим потенциалом u. Однако при этом отсутствовало какое бы то ни было эффективное описание $\hat{\Gamma}$, что не позволило автору получить теорему аппроксимации.

До сих пор t играло роль параметра. Положив $t = 0$, получим, что любой непрерывно дифференцируемой функции $\delta u(x, y)$ сопоставляются следующие "спектральные данные":

(20) $\delta u \to (d_{2s-1}, \tilde{\gamma}_s, \ s = 1, \ldots, g; \ d_{nm}, \tilde{\gamma}_{nm})$

(индексы (n, m) здесь являются отмеченными).

Теорема 4. *Существует константа ϵ_1 (зависящая лишь от u_0) такая, что для любого набора спектральных данных* (20), *удовлетворяющих условию* (19) *с $h \leqslant \epsilon_1$, существует единственная периодическая l раз непрерывно дифференцируемая функция δu, для которой данный набор является образом при отображении* (20).

Потенциал u является конечнозонным тогда и только тогда, когда разности $\delta u = u - u_0$ соответствует лишь конечное число ненулевых величин d_{nm}. Для любого u, принадлежащего ϵ-окрестности u_0, обозначим через u_G конечнозонный потенциал, соответствующий конечному отрезку, $|n| + |m| < G$, данных (20). При $G \to \infty$ последовательность u_G сходится к u.

Для произвольной функции $\delta u(x, y, t)$ кривая $\hat{\Gamma}$ и дивизор полюсов $\tilde{\gamma}_s, \tilde{\gamma}_{nm}$ зависят от t.

Теорема 5. *Функция $u = u_0 + \delta u$ является решением уравнения КП–2 тогда и только тогда, когда $\hat{\Gamma}$ и $\{\gamma\}$ не зависят от t.*

**Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г.М. Кржижановского
Москва**

**Поступило
17 VI 1986**

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадомцев В.Б., Петвиашвили В.И.* – ДАН, 1970, т. 192, № 4, с. 753. 2. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* – Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 43. 3. *Дрюма В.С.* – Письма ЖЭТФ, 1974, т. 19, № 12, с. 753. 4. *Manakov S.V.* – Fisika D, 1981, vol. 3, № 2, p. 420. 5. *Ablovitz M., Fokas A.* Lect. on the inverse scatering transform for multidimensional (2 + 1) problems. Inst. for nonlinear studies, preprint, 1982, № 28. 6. *Захаров В.Е., Шульман Е.И.* – ДАН, 1985, т. 283, № 6, с. 1325. 7. *Кричевер И.М.* – ДАН, 1976, т. 227, № 2, с. 291. 8. *Дубровин Б.А.* В сб.: Современные проблемы математики. М., 1983, т. 23, с. 45. 9. *Кричевер И.М.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 180. 10. *Чередник И.В.* – Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 4, с. 56.

УДК 519.95 МАТЕМАТИКА

С.А. ЛОЖКИН, М.А. КОШКИН

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ КОНТАКТНЫМИ МНОГОПОЛЮСНИКАМИ

(*Представлено академиком А.Н. Тихоновым 23 V 1986*)

В работе устанавливается асимптотика сложности минимальных контактных многополюсников для некоторых систем функций алгебры логики (ф.а.л.) от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и, в частности, для системы P_2^n из всех различных ф.а.л. от переменных $x_1, \ldots, x_n$ (ср. [1, с. 75]).

Будем рассматривать контактные схемы (к.с.), которые реализуют систему ф.а.л. $F = (f_1, \ldots, f_p)$ как систему функций проводимости между некоторой фиксированной вершиной, называемой входом к.с., и различными вершинами $v_1, \ldots, v_p$, называемыми выходами к.с. Сложность к.с. S, т.е. число контактов в ней, будем обозначать $L(S)$, а сложность системы F, т.е. минимальную из сложностей к.с., ее реализующих, – $L(F)$. Обозначим, как обычно: B^n – множество всех наборов из нулей и единиц длины n. Будем называть подмножество наборов A^n множества B^n равномерным, если для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ число тех наборов A^n, которые имеют в j-м разряде нуль, равно половине всех наборов A^n.

Теорема 1. *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_p)$ – система из p ф.а.л. от переменных $x_1, \ldots, x_n$, A^n – некоторое равномерное множество наборов, и пусть для $m = 1, 2, \ldots$ $\delta_m(F, A^n)$ – доля тех ф.а.л. из F, в сокращенных конъюнктивных нормальных формах (к.н.ф.) которых есть хотя бы одна элементарная дизъюнкция (э.д.) ранга не больше m, не равная тождественно единице на A^n, а*

$$\nu(F, A^n) = \frac{\sum\limits_{\tilde\sigma \in A^n} \sum\limits_{f \in F} f(\tilde\sigma)}{p\,|A^n|}.$$

Тогда

$$L(F) \geqslant 2p\left(1 - \frac{4}{\sqrt{m}} - \delta_m(F, A^n) - \frac{1}{p}\right), \tag{1}$$

$$L(F) \geqslant 2p\,\nu(F, A^n). \tag{2}$$