Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып, 2, 46—63

УДК 517.9

АЛГЕБРЫ ТИПА ВИРАСОРО, РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Введение

Общеизвестна роль алгебры комплекснозначных векторных полей на окружности $\mathcal{L}(S^1)$ (алгебры Витта) и ее центрального расширения $\mathcal{L}^c$ в теории свободной бозонной квантовой струны, особенно в размерности $d=26$. Эти алгебры содержат Z-градуированные подалгебры $L\subset\mathcal{L}(S^1)$ и $L^c\subset\mathcal{L}^c$, где L^c является центральным расширением L и порождена базисом (e_i, t), в котором имеют место соотношения

$$[e_i. e_j]=(j-i)\,e_{i+j}+t\,\frac{i^3-i}{12}\,\delta_{i,-j}. \tag{1}$$

Здесь $e_i=z^{i+1}\dfrac{\partial}{\partial z}$, t — образующая центра. Алгебра L^c называется «алгеброй Вирасоро», а $\mathcal{L}^c$ — «алгеброй Гельфанда — Фукса».

Алгебры L, L^c обладают разложением

$$L^c=L_+ + L_0^c + L_-, \tag{2}$$

где $L_0^c=(e_0, t)$, а подалгебры $L_\pm$ порождены элементами e_i, $i\geqslant 1$ и $i\leqslant -1$ соответственно.

Центральное расширение L^c, $\mathcal{L}^c$ алгебр L, $\mathcal{L}$ задается коциклом Гельфанда — Фукса

$$\gamma(f, g)=\frac{1}{24\pi i}\int_0^{2\pi} f'''g\,d\varphi,\qquad z=e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Здесь поля имеют вид $f(\varphi)\partial_\varphi$, $g(\varphi)\partial_\varphi$.

Наиболее фундаментальный для теории свободной струны класс представлений алгебры L^c — «модулей Верма» — задается порождающим вектором Φ_0 с условиями

$$L_+\Phi_0=0,\ e_0\Phi_0=h\Phi_0,\ t\Phi_0=c\Phi_0 \tag{4}$$

и реализуется на векторах вида

$$e_{i_1,\ldots,i_k}^{n_1,\ldots,n_k}\Phi_0,\ i_1<i_2<\ldots<i_k<0. \tag{5}$$

В частности, вакуумный вектор в фоковском представлении является примером вектора Φ_0, хотя в квантовой теории возникает целый сложный алгебраический агрегат, составленный из различных модулей Верма (см. [1; 2]).

Геометрический подход А. М. Полякова и др. к введению взаимодействия в теории струны с необходимостью приводит к сложным задачам алгебраической геометрии римановых поверхностей ([3; 4]). Однако роль алгебры Вирасоро в этом подходе абсолютно не проглядывается. *Цель данной работы — построение, как мы надеемся, правильных аналогов алгебр Вирасоро и мо-*

дулей Верма, связанных с нетривиальными римановыми поверхностями рода $g > 0$. Неудивительно, что вакуум должен перестроиться и наивные модули Верма замениться на более сложные объекты. На это указывает и работа Грина и Шварца [5] в однопетлевом случае.

Хотя указанная цель является основной, вкратце мы рассмотрим и другой физически важный пример алгебр — «алгебру токов» $G(S^1)$, составленную из функций на окружности со значениями в полупростой алгебре Ли G с естественным коммутатором, и ее центральное расширение. В ней также лежит Z-градуированная подалгебра (алгебра Каца — Муди), состоящая из тригонометрических многочленов. Для таких алгебр также имеется разложение типа (2), где $L_0 = G + C$, а также теория модулей типа Верма.

Исходным пунктом нашей работы является наблюдение, что нетривиальные римановы поверхности порождают в алгебрах векторных полей $\mathcal{L}(S^1)$, алгебрах токов $G(S^1)$ и их центральных расширениях плотные подалгебры, более сложные, чем Вирасоро и Каца — Муди. Эти подалгебры не являются Z-градуированными (см. § 1). Исходя из свойств этих подалгебр естественно возникает важное понятие «обобщенно-градуированных», или «k-градуированных» алгебр и модулей.

Определение. *Алгебра* $G = \sum_{i=-\infty}^{\infty} G_i$ *называется* k*-градуированной, если для всех* G_j, G_i *мы имеем*

$$G_i G_j \subset \sum_{s=i+j-k}^{i+j+k} G_s. \tag{6}$$

При $k = 0$ получаем обычные Z-градуированные алгебры.

Аналогично вводится понятие N-градуированных модулей M над k-градуированными алгебрами

$$G_i M_j = \sum_{s=-k-N}^{s=k+N} M_{i+j-s}. \tag{7}$$

Тривиальный пример. Пусть $k = 0$ и G — алгебра лорановских полиномиальных полей $G = L$ на S^2 (или на S^1, $|z| = 1$). Пусть модуль $M = \sum M_i$ состоит из функций вида

$$P(z, z^{-1}) \exp\Big(\sum_{j=-N}^{N} x_j z^{-j}\Big), \quad M_i = \Big(\lambda z^i \exp\Big(\sum_{j=-N}^{N} x_j z^{-j}\Big)\Big). \tag{8}$$

Здесь P — лорановский многочлен. Имеем

$$L_i M_j \subset \sum_{s=-N}^{N} M_{i+j-s}. \tag{9}$$

Таким образом, модуль M является N-градуированным, хотя сама алгебра 0-градуирована. Этот пример показывает естественность класса N-градуированных модулей в алгебро-геометрических конструкциях теории солитонов типа «функций Бейкера — Ахиезера» (см. § 6).

Введенные здесь понятия легко обобщаются на градуировки со значением в любой абелевой группе (в том числе непрерывной), причем наиболее интересные для нас примеры — это группы Z, Z^k, R, R^k (§ 6).

В § 1 вводятся важные подалгебры в алгебрах векторных полей на окружности, зависящие от римановой поверхности Г, доказывается, что они обладают k-градуировкой, разложением типа (2), где L_+, L_- — подалгебры Ли и размерность L_0 зависит от рода g. Это разложение позволяет ввести аналоги модулей Верма

$$L_+ \Phi_0 = 0, \quad t\Phi_0 = c\Phi_0.$$

Реализация этих модулей, естественно обобщающая реализацию Фейгина—Фукса для $g=0$ (см. [6]), приводится в § 4. Для любых алгебраических кривых рода $g>0$ устанавливается плотность этих подалгебр в алгебре векторных полей на S^1 и важная формула для центрального заряда через тензорный вес модулей, на которых реализовано представление

$$c = -2\,(6\lambda^2 - 6\lambda + 1). \tag{10}$$

Полином (10) возникал у Мамфорда [7] для класса Черна расслоений над пространством модулей, но его связь с алгебрами типа Вирасоро представляется важной.

Отметим, что столь же естественно, как и обобщения алгебр Вирасоро и Каца — Муди, в наших рассмотрениях возникает обобщение алгебры Гейзенберга. Эти результаты приведены в § 3 и 4. Заключительный параграф работы посвящен связям этой теории с теорией солитонов.

Авторы выражают благодарность Альварецу-Гоме, А. Т. Филипову, Б. Л. Фейгину, беседы с которыми стимулировали постановки рассматриваемых задач и идеи данной работы.

§ 1. Алгебры векторных полей на алгебраических кривых

Пусть Г — неособая алгебраическая кривая рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$ общего положения. Обозначим через L^Γ алгебру мероморфных векторных полей на Г, голоморфных вне $P_\pm$. (Для $g=0$, если в качестве $P_\pm$ выбрать на расширенной комплексной плоскости точки $z=0$ и $z=\infty$, то алгебра L^Γ совпадет с обычной алгеброй полей, являющихся лорановскими полиномами.)

Из теоремы Римана — Роха следует, что при $g\geqslant 2$ в L^Γ можно ввести базис e_i полей, которые однозначно с точностью до пропорциональности определяются условиями: e_i имеет нуль кратности $i-g_0+1$ в точке P_+ и полюс кратности $i+g_0-1$ в точке P_-. Здесь $g_0=\frac{3g}{2}$, при четных g индекс i пробегает все целые числа, $i=\ldots,-1,0,1,\ldots$; при нечетных g i пробегает все полуцелые значения $i=\ldots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\ldots$ Если зафиксировать локальные параметры $z_\pm(Q)$, $z_\pm(P_\pm)=0$ в окрестностях точек $P_\pm$, то e_i будет иметь в окрестностях $P_\pm$ вид

$$e_i = a_i^\pm z_\pm^{\pm i-g_0+1}\,(1+O(z_\pm))\,\frac{\partial}{\partial z_\pm}. \tag{1.1}$$

Условимся однозначно нормировать e_i так, чтобы константа $a_i^+=1$.

З а м е ч а н и е. В случае $g=1$ условия нормировки e_i для $|i|>\frac{1}{2}$ такие же, как и в общем случае, и несколько отличны для $|i|=\frac{1}{2}$. Мы подробнее вернемся к этому в § 5, где будут приведены явные формулы для e_i в эллиптическом случае.

Л е м м а 1. *Относительно базиса e_i алгебра L^Γ является k-градуированной, где $k=g_0$*:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{ij}^s e_{i+j-s}. \tag{1.2}$$

(Суммирование в (1.2) идет при четных g по целым s, а при нечетном g по полуцелым.)

Доказательство леммы почти очевидно и вытекает из простого подсчета кратностей нулей и полюсов $[e_i, e_j]$ в $P_\pm$.

Замечание. Сравнение главных частей в $P_\pm$ разложений правых и левых частей (1.2) дает

$$c_{ij}^{g_0} = (j - i), \quad c_{ij}^{-g_0} = (i - j)\,\frac{a_i^- a_j^-}{a_{i+j+g_0}^-}. \tag{1.3}$$

Обозначим через $L_\pm^{(s)}$ подпространства в L^Γ, порожденные векторными полями e_i с номерами $\pm i \geqslant g_0 + s$, $s \in Z$. Подпространства $L_\pm^{(s)}$ с $s \geqslant -1$ являются, как следует из (1.2), подалгебрами в L^Γ. В частности, $L_\pm^{(-1)}$ — это подалгебры векторных полей из L^Γ, которые в точках $P_\pm$ (соответственно) голоморфны.

Определим на Γ однопараметрическое семейство C_τ контуров. Пусть dp-дифференциал третьего рода на Γ с полюсами первого порядка в точках $P_\pm$ с вычетами ± 1 соответственно. Его можно однозначно нормировать, потребовав, чтобы его периоды по всем циклам были мнимыми. Тогда на Γ корректно определена гармоническая функция $\operatorname{Re} p(Q)$, где $p(Q) = \int\limits_{Q_0}^{Q} dp$ и Q_0 — произвольная начальная точка. Контуры C_τ — это линии уровня этой функции $C_\tau = \{Q\colon \operatorname{Re} p(Q) = \tau\}$. При $\tau \to \pm\infty$ контуры C_τ представляют собой малые окружности, охватывающие точки $P_\mp$.

Ограничение любого векторного поля из L^Γ на C_τ определяет гомоморфизм алгебры L^Γ в алгебру гладких векторных полей на C_τ — $\mathcal{L}(C_\tau)$, которая для достаточно больших τ изоморфна алгебре гладких векторных полей на окружности $\mathcal{L}(S^1)$.

Теорема 1. *Образ $i_\tau(L^\Gamma)$ всюду плотен в $\mathcal{L}(C_\tau)$.*

Доказательство. Рассмотрим векторное поле e_0. Оно имеет вне точек $P_\pm$ ровно g нулей $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, которые в общем положении можно считать различными. Обозначим через $\psi_n(Q)$ мероморфную функцию на Γ, имеющую вне $P_\pm$ простые полюсы в $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и вид (1.4) в окрестностях $P_\pm$:

$$\psi_n = b_n^\pm z_\pm^{\pm n}(1 + O(z_\pm)), \quad z_\pm = z_\pm(Q), \quad b_n^+ = 1 \tag{1.4}$$

(такие функции вводились в [8] для построения коммутирующих разностных операторов). Кроме того, нам потребуется «двойственный» набор функций $\psi_n^+(Q)$, определяемый следующим образом.

Пусть $d\omega$ — единственный дифференциал третьего рода с полюсами в точках $P_\pm$ с вычетами ± 1, обращающийся в нуль в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Кроме них, он имеет еще g нулей $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$. Обозначим через $\psi_n^+(Q)$ мероморфную функцию на Γ, имеющую вне $P_\pm$ полюсы в точках $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$ и вид (1.5) в окрестностях $P_\pm$:

$$\psi_n^+ = (b_n^\pm)^{-1} z_\pm^{\mp n}(1 + O(z_\pm)), \quad z_\pm = z_\pm(Q). \tag{1.5}$$

Существование и единственность ψ_n и ψ_n^+ являются простым следствием теоремы Римана — Роха.

Лемма 2. *Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ на $C_\tau \ni t$ имеет место равенство*

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(t)\left[\oint_{C_\tau} \frac{F(t')\,\psi_n^+(t')}{\langle \psi_n(t')\,\psi_n^+(t')\rangle}\,dp(t')\right], \tag{1.6}$$

где $\langle \psi_n \psi_n^+\rangle$ означает среднее по n (это среднее существует, так как $\psi_n \psi_n^+$ является квазипериодической функцией n).

Отметим, что в целом условия сходимости и зависимость скорости убывания коэффициентов при ψ_n от гладкости F такие же, как и у обычного преобразования Фурье.

Доказательство леммы в значительной степени повторяет ход доказательства в случае обычного ряда Фурье. Аналогично доказательству соотношения (30) работы [9] можно показать, что

$$d\omega = \frac{dp}{\langle \psi_n \psi_n^+ \rangle}. \tag{1.7}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\tau} \psi_n^+ (t') \frac{dp(t')}{\langle \psi_n (t') \psi_n^+ (t') \rangle} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\tau} \psi_n^+ \, d\omega = \delta_{n,0}. \tag{1.8}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку по определению ψ_n^+ и $d\omega$ дифференциал $\psi_n^+ d\omega$ голоморфен вне $P_\pm$ и интеграл в (1.8) равен вычету этого дифференциала в P_+ либо с противоположным знаком вычету в P_-.

Обозначим через S_N частную сумму ряда (1.6), в которой n меняется от $-N$ до N. Тогда из (1.8) следует, что

$$S_N - F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\tau} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\psi_n (t) \psi_n^+ (t')}{\langle \psi_n (t') \psi_n^+ (t') \rangle} (F(t') - F(t)) \, dp(t'). \tag{1.9}$$

Обозначим через $\lambda(Q)$ функцию на Γ, имеющую простой нуль в точке P_+ и полюс порядка $g+1$ в точке P_-. Тогда частным случаем утверждения работы [8] является равенство

$$\lambda(Q) \psi_n(Q) = \sum_{i=1}^{g+1} h_n^i \psi_{n+i}(Q). \tag{1.10}$$

Аналогично случаю дифференциальных операторов [10] доказывается, что ψ_n^+ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\lambda(Q') \psi_n^+(Q') = \sum_{i=1}^{g+1} h_{n-i}^n \psi_{n-i}^+. \tag{1.11}$$

Отсюда

$$\sum_{n=-N}^{N} (\lambda(Q) - \lambda(Q')) \, \psi_n(Q) \psi_n^+(Q') = \sum_{i=1}^{g+1} \left(\sum_{n=N-i}^{N} h_n^i \psi_{n+i} \psi_n^+ - \sum_{n=-N-i}^{-N} h_n^i \psi_{n+i} \psi_n^+ \right). \tag{1.12}$$

Ставшие стандартными выражения для ψ_n через тэта-функции Римана [8; 14] имеют вид

$$\psi_n(Q) = e^{np(Q)} \varphi_n(Q), \quad \psi_n^+(Q) = e^{-np(Q)} \varphi_n^+(Q). \tag{1.13}$$

Точные выражения φ_n и φ_n^+ через тэта-функции нам не потребуются. Достаточно лишь того, что они квазипериодичны по n и равномерно ограничены на C_τ, если C_τ не проходит через точки γ_s, γ_k^+. (Равенство (1.6) справедливо и в том случае, когда C_τ проходит через γ_s, γ_k^+, надо лишь изменить нормировку $\psi_n(Q)$.)

Отсюда и из (1.12) вытекает

$$S_N - F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\tau} dp \frac{F(t') - F(t)}{\lambda(t') - \lambda(t)} \left[\Phi_N (t, t') \, e^{N(p(t) - p(t'))} - \Phi_{-N}(t, t') \, e^{-N(p(t) - p(t'))} \right], \tag{1.14}$$

где функции $\Phi_\pm$ равномерно ограничены на C_τ. Поскольку на C_τ $\mathrm{Re}\,(p(t) - p(t')) = 0$, то в (1.14) стоит интеграл ограниченной быстро осциллирующей функции. Интегрируя в (1.14) один раз по частям, получим $S_N - F(t) \to 0$ и лемма доказана.

Из ее утверждения непосредственно следует утверждение теоремы. Пусть $E \subset \mathcal{L}(C_\tau)$ — любое гладкое поле на C_τ. Тогда $F(t) = E/e_0$ является гладкой функцией на C_τ. Отсюда, если S_N — частная сумма ряда (1.6), построенного по F, то $S_N e_0 - E \to 0$. В силу выбора точек γ_s векторное поле $\psi_n e_0$ для любой ψ_n голоморфно вне $P_\pm$ и, значит, принадлежит L^Γ. Отсюда $S_N e_0$ принадлежит L^Γ и теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что для любого контура C, не содержащего точки $P_\pm$, ограничение L^Γ на C плотно в подалгебре векторных полей, голоморфно продолжимых в «кольцо» между двумя ближайшими контурами C_{τ_1}, C_{τ_2}, заключающими между собой C.

Доказанное предложение устанавливает связь теории представлений алгебр мероморфных векторных полей с теорией представлений $\mathcal{L}(S^1)$.

В заключение параграфа приведем интерпретацию подпространства $\widetilde{L}_0 \subset L^\Gamma$, порожденного (для $g \geqslant 2$) полями e_i, $|i| \leqslant g_0 - 2$. Пусть D — группа диффеоморфизмов окружности. Она действует на многообразии модулей кривых рода g с отмеченными жордановым параметризованным контуром C. Для определения ее действия достаточно переклеить Γ вдоль C с помощью любого диффеоморфизма. Получится новая алгебраическая кривая Γ' с контуром $C' = C$. Обозначим через $D_\pm$ подгруппы в D, образованные диффеоморфизмами, голоморфно продолжимыми на $\Gamma^\pm$ соответственно.

Двусторонние классы смежности D по $D_\pm$ представляют точки многообразия модулей кривых рода g с отмеченным контуром. Для случая, когда C — малый контур, окружающий точку P_+, эта конструкция сообщена авторам А. И. Бондалом, А. А. Бейлинсоном и М. Л. Концевичем.

Любопытно, что эта же категория является геометрической основой метода конечнозонного интегрирования $(2+1)$-систем типа КП.

Подалгебры $L_\pm^{(-1)}$ являются алгебрами Ли подгрупп $D_\pm$. Поэтому подпространство $\widetilde{L}_0$, имеющее при $g \geqslant 2$ размерность $3g - 3$, естественно отождествляется с касательным пространством к многообразию модулей кривых рода g.

§ 2. Обобщенно-градуированные модули над алгебрами L^Γ

Алгебра L^Γ естественно действует на пространстве мероморфных форм веса λ на Γ, голоморфных вне точек $P_\pm$. Это пространство в дальнейшем будет обозначаться через $\mathcal{F}_\lambda^\Gamma = \mathcal{F}_\lambda^\Gamma(P_\pm)$ — ($P_\pm$ — точки общего положения).

Замечание. В настоящей работе мы ограничимся случаем целых λ. Все конструкции переносятся и на случай произвольных λ, если рассмотреть кусочно-мероморфные формы, аналогично тому, как это будет сделано в лемме 4.

По теореме Римана — Роха существуют единственные формы $f_j \in \mathcal{F}_\lambda^\Gamma$ (здесь $\lambda \neq 0$; важный случай $\lambda = 0$ рассмотрен отдельно в § 3), имеющие в окрестности $P_\pm$ вид

$$f_j = \varphi_j^\pm z_\pm^{\pm j - S(\lambda)} (1 + O(z_\pm)) (dz_\pm)^\lambda, \quad \varphi_j^+ = 1. \tag{2.1}$$

Здесь j, как и ранее, пробегает в зависимости от четности g целые либо полуцелые значения. Величина $S(\lambda)$ равна

$$S(\lambda) = \frac{g}{2} - \lambda(g+1). \tag{2.2}$$

Лемма 3. *Модули $\mathcal{F}_\lambda^\Gamma$ являются обобщенно-градуированными:*

$$e_i f_j = \sum_{s=-g_0}^{g_0} r_{ij}^s f_{i+j-s}. \tag{2.3}$$

Доказательство леммы стандартно. Заметим, что из (1.1) и (2.1) следует

$$r_{ij}^{\pm g_0} = (\pm j - S(\lambda) + \lambda(\pm i - g_0 + 1))\left(\frac{\varphi_j^{\pm} a_i^{\pm}}{\varphi_{i+j\mp g_0}^{\pm}}\right). \tag{2.4}$$

Опишем теперь более общие модули над L^{Γ}. Зафиксируем набор чисел $(x_{-N}, \ldots, x_N) = x$ и какую-либо жорданову кривую σ, соединяющую $P_{\pm}$.

Лемма 4. *Существует единственная форма $f_j(x)$ веса λ на Γ, которая голоморфна на Γ вне точек $P_{\pm}$ и разреза σ. Она непрерывно продолжима на σ, где ее граничные значения удовлетворяют условию*

$$f_j^{+} = e^{2\pi i x_0} f_j^{-}. \tag{2.5}$$

В окрестности точек $P_{\pm}$ форма f_j представима в виде

$$f_j = \varphi^{\pm}(x)\, z_{\pm}^{\pm j \pm x_0 - S(\lambda)} \exp\left(\sum_{k=1}^{N} x_{\pm k} z_{\pm}^{-k}\right)(1 + O(z_{\pm}))(dz_{\pm})^{\lambda}, \quad \varphi_j^{+} \equiv 1. \tag{2.6}$$

Пространство $\mathcal{F}_{\lambda}^{\Gamma, N}(x)$, порожденное формами $f_j(x)$, описанного типа обладает естественной структурой L^{Γ} модуля.

Лемма 5. *Действие e_i на $f_j(x)$ имеет вид*

$$e_i f_j = \sum_{s=-g_0-N}^{g_0+N} R_{ij}^{s}(x) f_{i+j-s}. \tag{2.7}$$

Если $N \geqslant 1$

$$R_{ij}^{\pm g_0 \pm N} = -(N x_{\pm N}) \frac{\varphi_j^{\pm} a_i^{\pm}}{\varphi_{i+j\mp(g_0+N)}^{\pm}}. \tag{2.8}$$

Если $N = 0$, *то*

$$R_{ij}^{\pm g_0} = (\pm j \pm x_0 - S(\lambda) + \lambda(\pm i - g_0 + 1)) \frac{\varphi_j^{\pm} a_i^{\pm}}{\varphi_{i+j\mp g_0}^{\pm}}. \tag{2.9}$$

Замечание. При $g = 0$, $N = 0$ модули $\mathcal{F}_{\lambda}^{\Gamma,0}(x_0)$ совпадают с $\mathcal{F}_{\lambda, x_0}$ — основными модулями над алгеброй Витта, введенными в [6].

При $\lambda = 0$ функции f_j описанного типа, являются частным случаем так называемых функций типа Гордана — Клебша — Бейкера — Ахиезера в теории конечнозонного интегрирования (обзоры можно найти в [11—16]). При $\lambda = 1$ формы, определенные в лемме 3, являются частным случаем форм, введенных в [17] для построения асимптотически конечнозонных решений уравнений типа уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Мы будем называть модули $\mathcal{F}_{\lambda}^{\Gamma, N}(x)$ модулями типа Клебша — Гордана — Бейкера — Ахиезера (КГБА), $x = (x_{-N}, \ldots, x_N)$.

Доказательства лемм 3, 4 легко сводится к утверждению о существовании и единственности функций типа Бейкера — Ахиезера. Мы их подробно не приводим, так как теперь они стали абсолютно стандартны. Схема такова. Из теории краевых задач следует, что существует единственная форма $\tilde{f}_j(x_0)$, удовлетворяющая условиям леммы 3 при $x_{\pm k} = 0$, $k \neq 0$. Эта форма имеет вне $P_{\pm}$ ровно g нулей $\gamma_1^{j, x_0}, \ldots, \gamma_g^{j, x_0}$. Как известно, существует единственная функция Бейкера — Ахиезера $\psi_{j, x_0}(\tilde{x}, P)$, имеющая полюсы в точках $\gamma_1^{j, x_0}, \ldots, \gamma_g^{j, x_0}$ и вид

$$\psi_{j, x_0} = \varphi_{j, x_0}^{\pm} \exp\left(\sum_{k=1}^{N} x_{\pm k} z_{\pm}^{-k}\right)(1 + O(z_{\pm})), \quad \tilde{x} = (x_{\pm k}), \tag{2.10}$$

в окрестностях $P_{\pm}$. Отсюда

$$f_j(x) = \psi_{j, x_0}(\tilde{x}, Q)\, \tilde{f}_j(x_0). \tag{2.11}$$

§ 3. Особый случай $\lambda = 0$, $x_0 = 0$. Дополнительные структуры на модулях $\mathcal{F}_\lambda^\Gamma(x_0)$

В дальнейшем мы будем обозначать пространство $\mathcal{F}_0$-мероморфных функций на Γ, имеющих полюсы лишь в точках $P_\pm$, через $\mathcal{A}^\Gamma$. Оно обладает естественной кольцевой структурой. Его аддитивный базис можно определить следующим образом.

Пусть $A_j, |j| \geqslant \frac{g}{2}+1$ — единственные функции, $A_j \in \mathcal{A}^\Gamma$, имеющие в окрестностях $P_\pm$ вид

$$A_j = \alpha_j^\pm z_\pm^{\pm j - g/2}(1+O(z_\pm)), \quad \alpha_j^+ = 1 \tag{3.1}$$

(j — по-прежнему целые или полуцелые в зависимости от четности g). При $j = -\frac{g}{2}, \ldots, \frac{g}{2}-1$ обозначим через $A_j \in \mathcal{A}^\Gamma$ функцию, имеющую в окрестности $P_\pm$ вид

$$A_j = \alpha_j^\pm z_\pm^{\pm j - g/2 \pm 1/2 - \varepsilon}(1+O(z_\pm)), \quad \alpha_j^+ = 1, \quad \varepsilon = 1/2. \tag{3.2}$$

Этими условиями A_j определены однозначно с точностью до прибавления константы, которую мы обозначим через $A_{g/2} \equiv 1$.

Структура A^Γ как модуля над L^Γ несколько более сложная, чем в общем случае $\lambda \neq 0$.

Если $|i+j+g_0+n| > g/2$, то

$$e_i A_j = \sum_{s=-g_0-n}^{g_0} \tilde{r}_{ij}^s A_{i+j-s}, \tag{3.3}$$

где n (здесь и в (3.4)) равно 0, если $|j| > g/2$, и 1, если $|j| \leqslant g/2$.

В тех случаях, когда $|i+j+g_0+n| \leqslant g/2$, имеем

$$e_i A_j = \sum_{s=-g_0-n+1}^{g_0} \hat{r}_{ij}^s A_{i+j-s} + \tilde{r}_{ij} A_{g/2}. \tag{3.4}$$

Отметим еще, что $e_i A_{g/2} = 0$ для всех i.

Аналогичный вид имеет и мультипликативная структура коммутативного кольца $\mathcal{A}^\Gamma$.

При $|i+j+g/2+m| > g/2$ (где m здесь и в (3.5), (3.6) равно 0, если оба числа $|i|$, $|j| > g/2$, $m=1$, 2, если одно или соответственно два из этих чисел $\leqslant g/2$) имеет место равенство

$$A_i A_j = \sum_{s=-g/2-m}^{g/2} \alpha_{ij}^s A_{i+j-s}. \tag{3.5}$$

Для $|i+j+g/2+m| \leqslant g/2$

$$A_i A_j = \sum_{s=-g/2-m+1}^{g/2} \tilde{\alpha}_{ij}^s A_{i+j-s} + \tilde{\alpha}_{ij} A_{g/2}. \tag{3.6}$$

Кольцо A^Γ является с точки зрения данного выше определения g_0-градуированным, хотя по существу степень «размытости» градуировки у него для почти всех i, j равна $g/2$. В частности, подкольца $\mathcal{A}_\pm^\Gamma$, порожденные A_j с $\pm j > g/2$, являются $g/2$-градуированными. Подкольца $\mathcal{A}_\pm^\Gamma$ вместе с $(g+1)$-мерными подпространством $\mathcal{A}_0^\Gamma$, порожденным A_j с $|j| \leqslant g/2$, задают разложение $\mathcal{A}^\Gamma$ в прямую сумму

$$\mathcal{A}^\Gamma = \mathcal{A}_+^\Gamma + \mathcal{A}_0^\Gamma + \mathcal{A}_-^\Gamma, \tag{3.7}$$

аналогичную разложению (2).

Мультипликативная структура $\mathcal{A}^\Gamma$ позволяет определить для любой полупростой алгебры Ли G алгебру

$$G^\Gamma = G \otimes \mathcal{A}^\Gamma, \tag{3.8}$$

являющуюся обобщением на случай произвольных римановых поверхностей рода $g > 0$ алгебр Каца — Муди. Элементами этой алгебры являются мероморфные функции на Γ, голоморфные вне $P_\pm$ и принимающие значения в G. Связь G^Γ с алгеброй токов $G(S^1)$ дает теорема 2.

Теорема 2. *Для любого контура C_τ ограничение G^Γ на C_τ определяет плотную подалгебру в алгебре гладких функций на C_τ со значениями в G:*

$$G(C_\tau) \approx G(S^1).$$

Здесь контуры C_τ те же, что и в § 1. Доказательство теоремы может быть получено полностью аналогично доказательству леммы 2. Отметим, что ψ_n переходят в A_n при стремлении дивизора $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ к $P_\pm$.

Пространства $\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma, N}(x)$ являются модулями над $\mathcal{A}$. Умножение A^Γ на f_i представимо в виде

$$A_i f_j = \sum_{s=-g/2}^{g/2} \beta_{ij}^s f_{i+j-s}, \quad \text{при} \quad |i| > g/2, \tag{3.9}$$

$$A_i f_j = \sum_{s=-g/2-1}^{g/2} \beta_{ij}^s f_{i+j-s} \quad \text{при} \quad |i| \leqslant g/2. \tag{3.10}$$

Отдельно имеем $A_{g/2} f_j = f_j$.

Пространства $\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma, N}$ являются модулями над кольцом дифференциальных операторов по переменным $x_{\pm k}$. Действие образующих имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{\pm k}} f_j = \sum_{s=0}^{k} F_{kj}^s(x) f_{j\pm s}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{3.11}$$

Подробнее к этому мы вернемся в заключительном параграфе.

§ 4. «Локальное» центральное расширение алгебры L^Γ и аналоги модулей Верма

Как следует из утверждения леммы 5 (при $N = 0$), действие операторов e_i на f_j задает гомоморфизм алгебры L^Γ в алгебру разностных операторов $\mathfrak{Gl}^\infty$ конечного порядка. Последняя алгебра представима в виде алгебры бесконечных матриц, имеющих лишь конечное число ненулевых диагоналей. Подалгебры матриц из $\mathfrak{Gl}^\infty$, имеющих ненулевые элементы лишь над или под главной диагональю, обозначаются через $\mathfrak{Gl}_+^\infty$ или $\mathfrak{Gl}_-^\infty$ соответственно.

Из (2.7) следует, что образы подалгебр $L_\pm^\Gamma$, порожденных e_i с $\pm i > g_0$, принадлежат $\mathfrak{Gl}_\pm^\infty$. Разложение

$$L^\Gamma = L_+^\Gamma + L_0^\Gamma + L_-^\Gamma, \quad L_0^\Gamma = \{e_{-g_0}, \ldots, e_{g_0}\}, \tag{4.1}$$

является аналогом разложения 2 для случая алгебр, порожденных римановыми поверхностями произвольного рода $g > 0$.

Алгебра $\mathfrak{Gl}^\infty$ имеет единственное центральное расширение $\widehat{\mathfrak{Gl}}^\infty$. Представление этого расширения можно построить, исходя из пространства полубесконечных форм над модулями $\mathcal{F}_\lambda^\Gamma(x_0)$, $N = 0$. Базис в этом пространстве $H_\lambda^\Gamma(x_0)$ образуют выражения вида

$$f_{i_0} \wedge f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_{m-1}} \wedge f_m \wedge f_{m+1} \wedge f_{m+2} \wedge \ldots, \quad f_j \in \mathcal{F}_\lambda^\Gamma(x_0), \tag{4.2}$$

где $i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < m$ (см. [6] для случая $g = 0$).

Для любого оператора D из $\mathfrak{Gl}_{\pm}^{\infty}$, в частности, $e_i \in L_{\pm}^{\Gamma}$ корректно определено действие этого оператора на $H_{\lambda}^{\Gamma}(x_0)$. Действие $e_i \in L_{\pm}^{\Gamma}$ на образующих (4.2) определяется с помощью формулы Лейбница. Так как в (4.2), начиная с какого-то места, все номера стоят подряд, то в результате действия e_i с $|i| > g_0$ получится конечная сумма выражений вида (4.2). Естественное действие $\mathfrak{Gl}_{\pm}^{\infty}$ на $H_{\lambda}^{\Gamma}(x_0)$ продолжается до представления центрального расширения $\widehat{\mathfrak{Gl}}^{\infty}$. Тем самым гомоморфизм $L^{\Gamma} \to \mathfrak{Gl}^{\infty}$ индуцирует представление некоторого центрального расширения $\hat{L}^{\Gamma}$ алгебры L^{Γ} на $H_{\lambda}^{\Gamma}(x_0)$.

Зададим на Γ «проективную» структуру, где допустимые системы локальных координат отличаются проективной заменой. Если $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ и $g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ — представления двух векторных полей в допустимой системе координат, то форма $\tilde{\chi}(f, g) = f'''g\,dz$ корректно определена. Любой замкнутый контур C на Γ, не проходящий через $P_{\pm}$, определяет двумерный коцикл на алгебре L^{Γ}:

$$\chi_C(e_i, e_j) = \frac{1}{24\pi i}\oint_C \tilde{\chi}(e_i, e_j). \qquad (4.4)$$

Центральные расширения L^{Γ}, задаваемые коциклами (4.3),— это алгебры, порожденные элементами e_i и центральным элементом t со следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{ij}^{s} e_{i+j-s} + t\chi_C(e_i, e_j), \quad [e_i, t] = 0. \qquad (4.4)$$

Стандартные вычисления двумерных когомологий алгебр позволяют доказать, что (4.3) и (4.4) задают все центральные расширения L^{Γ}.

Лемма 6. *Существует единственное «локальное» центральное расширение L^{Γ}, обладающее свойством*

$$\chi_0(e_i, e_j) = 0, \ |i + j| > 3g. \qquad (4.5)$$

Это расширение отвечает единственному классу гомологий несамопересекающегося контура, разбивающего Γ на $\Gamma^{\pm}$ так, что $P_{\pm} \subset \Gamma^{\pm}$. Оно сохраняет свойство g_0-градуированности.

В дальнейшем это «локальное» расширение будет обозначаться через $\hat{L}^{\Gamma}$.

Доказательство. Предположим, что коцикл χ_C удовлетворяет (4.5) и получен интегрированием $\tilde{\chi}$ вдоль какого-либо негомологичного нулю цикла C.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ (как и в доказательстве леммы 2) — нули e_0 вне точек $P_{\pm}$. Тогда $e_n = \psi_n e_0 = e^{np}\varphi_n e_0$, где $\varphi_n(Q)$ — квазипериодическая функция n. Интеграл

$$\chi_C(e_n, e_0) = \oint_C \psi_n(Q)\,\tilde{\chi}(e_0, e_0)$$

можно при больших n вычислить методом перевала. Получим, что из (4.5) следует, что один из нулей ψ_n экспоненциально стремится к точке Q_0, в которой имеет максимум на C функция $p(Q)$. Поскольку класс эквивалентности дивизоров нулей ψ_n равномерно распределен на якобиане Γ, то этого быть не может. Это рассуждение не проходит только в том случае, когда C гомологичен одной из негомологичных нулю компонент контура C_{τ} для какого-то значения τ. Пусть C' — дополнение C до C_{τ}, $C_{\tau} = C \cup C'$. В этом случае из (4.5) и хода доказательства леммы 2 следует, что функция $F(t)$, равная $\tilde{\chi}(e_0, e_0)/d\omega$ на C и нулю на C', разлагается в конечную сумму функций ψ_k^{+}, $|k| < 3g$. Но этого быть не может, потому что любая конечная сумма таких функций мероморфна на Γ и не может равняться тождественному нулю на C'. Лемма доказана.

Теорема 3. *Действие подалгебр* $L_{\pm}^{\Gamma}$ *на* $H_{\lambda}^{\Gamma}(x_0)$ *продолжается до представления центрального расширения* $\widehat{L}^{\Gamma}$. *При этом вектор*

$$\Phi_0 = f_{\varepsilon} \wedge f_{\varepsilon+1} \wedge f_{\varepsilon+2} \wedge \ldots, \quad \begin{cases} \varepsilon = 0, & g \equiv 0 \pmod 2, \\ \varepsilon = 1/2, & g \equiv 1 \pmod 2) \end{cases} \tag{4.6}$$

является особым для подалгебры L_+,

$$L_+\Phi_0 = 0. \tag{4.7}$$

Кроме того, имеют место равенства

$$e_{g_0}\Phi_0 = h\Phi_0, \quad t\Phi_0 = c\Phi_0. \tag{4.8}$$

Здесь

$$c(\lambda) = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1), \quad h = \frac{1}{2}(x_0 - S(\lambda))(S(\lambda) + 1 - x_0 - 2\lambda). \tag{4.9}$$

Равенства (4.7), (4.8) определяют аналоги модулей Верма. Величина h называется «старшим весом», а c — «центральным зарядом».

Дадим доказательство теоремы. Первая часть утверждений следует из того, что по свойству локальности расширение $\widehat{L}^{\Gamma}$ индуцировано расширением $\widehat{\mathfrak{Gl}}^{\infty}$ при гомоморфизме L^{Γ} в $\mathfrak{Gl}^{\infty}$. Поэтому ограничение представления $\widehat{\mathfrak{Gl}}^{\infty}$ в $H_{\lambda}^{\Gamma}(x_0)$ на $\widehat{L}^{\Gamma}$ задает продолжение действия $L_{\pm}^{\Gamma}$. Единственные утверждения, которые нуждаются в доказательстве,— это формулы (4.9), выражающие старший вес и центральный заряд представления через тензорный вес λ и параметр x_0.

Из вида (1.1) полей e_i и e_{-i+2g_0} в окрестности $P_{\pm}$ следует, что

$$\chi_0(e_i, e_{-i+2g_0}) = \frac{1}{12}((i - g_0)^3 - (i - g_0)). \tag{4.10}$$

Применим оператор $[e_i, e_{-i+2g_0}]$ к особому вектору Φ_0, $i > g_0$. Получим

$$[e_i, e_{-i+2g_0}]\Phi_0 = e_i e_{-i+2g_0}\Phi_0 = \sum_{j=\varepsilon}^{i-g_0+\varepsilon-1} (R^{g_0}_{-i+2g_0,\, j} R^{g_0}_{i,\, j-i+g_0})\Phi_0 = \tilde{c}\Phi_0, \tag{4.11}$$

где $\varepsilon = 0$ или $1/2$ в зависимости от четности g. Из (2.9) следует, что

$$\tilde{c} = -[(i - g_0)^3 - (i - g_0)]\,(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) - \\ - (i - g_0)(x_0 - S)(S + 1 - 2\lambda - x_0). \tag{4.12}$$

Так как $L_+\Phi_0 = 0$, то из (4.4) вытекает

$$[e_i, e_{-i+2g_0}]\Phi_0 = c^{g_0}_{i,\,-i+2g_0} e_{g_0}\Phi_0 + \chi_0(e_i, e_{-i+2g_0})c\Phi_0 = \tilde{c}\Phi_0 \tag{4.13}$$

и равенства (4.9) доказаны, а вместе с ними и теорема.

Рассмотрим всевозможные линейно независимые векторы вида

$$\Phi^{n_1,\ldots,n_k}_{i_1,\ldots,i_k} = e_{i_1}^{n_1} \ldots e_{i_k}^{n_k}\Phi_0, \quad -\infty < i_s < g_0, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k. \tag{4.14}$$

Лемма 7. *Условия* (4.7), (4.8) *вместе с условием*

$$t\Phi^{n_1\ldots n_k}_{i_1\ldots i_k} = c\Phi^{n_1\ldots n_k}_{i_1\ldots i_k}$$

однозначно и непротиворечиво определяют представление $U^{\Gamma}_{h,c}$ *алгебры* $\widehat{L}^{\Gamma}$ *с центральным зарядом* c.

Доказательство леммы 7 основано на «фильтрации» элементов — $n = -\sum n_j(i_j - g_0)$, где фильтрация Φ_0 равна 0. При этом используются формулы (1.2) и (1.3), а также (4.5). По существу доказательство не отличается от соответствующего элементарного рассуждения для обычных модулей Верма над алгеброй Вирасоро. Если для всех $m < n$ действие $\widehat{L}_+$ и e_{g_0} построено на элементах фильтрации m, то необходимо непротиворечиво продолжить его на элементы фильтрации n. Это делается исходя из коммутаторных соотношений, позволяющих ограничиться мономами, такими, что $n_1 = \ldots = n_k = 1$. Положим $\bar{e}_i = e_{i-g_0}$. Тогда мы имеем, согласно (1.2) и (4.5),

$$[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = (j - i)\, \bar{e}_{i+j} + \beta\,(i, j), \tag{4.15}$$

где фильтрация элемента $\beta\,(i, j)$ не превосходит $i + j - 1$ (фильтрация элемента t равна нулю). Никаких других соотношений нет. Поэтому набор элементов $\Phi^{n_1\ldots n_k}_{i_1\ldots i_k}$ не подвергается факторизации. Тот факт, что совокупность элементов $(\bar{e}_i)$, $i < 0$, не образует подалгебру, не играет роли. Лемма 7 доказана.

Таким образом, построенный выше модуль, натянутый на вектор Φ_0 из пространства $H^\Gamma_\lambda(x_0)$, является фактор-модулем (гомоморфным образом) универсального «модуля Верма» $U^\Gamma_{h,c}$.

Рассмотрим присоединенную Z-градуированную алгебру $\dot{\bar{L}}^\Gamma$ по фильтрации, указанной в доказательстве леммы 7 с базисом $\bar{e}_i$. Коммутатор в этой алгебре, согласно (1.3), совпадает с коммутатором в алгебре Вирасоро. Значит, $\bar{L}^\Gamma$ просто совпадает с алгеброй Вирасоро.

Аналогично, исходя из базиса $\bar{\bar{e}}_i = e_{-g_0-i}$, мы получим вторую фильтрацию, убывающую в противоположную сторону. Коммутатор в присоединенной по этой фильтрации алгебре $\bar{\bar{L}}^\Gamma$ имеет вид

$$[\bar{\bar{e}}_i, \bar{\bar{e}}_j] = (j - i)\, \frac{b_i b_j}{b_{i+j}}\, \bar{\bar{e}}_{i+j}, \tag{4.16}$$

где $b_i = a^{-g_0}_{-g_0-i}$. Замена $\bar{\bar{e}}_i = b_i \tilde{e}_i$ показывает, что $\bar{\bar{L}}^\Gamma$ изоморфна алгебре Вирасоро.

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, на модулях $\mathscr{F}^\Gamma_\lambda(x_0)$ действует также коммутативная алгебра $\mathscr{A}^\Gamma$. Ее центральные расширения описываются с помощью коциклов вида

$$\gamma\,(A_i, A_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C A_i\, dA_j,$$

где C — замкнутый контур на Γ, не проходящий через точки $P_\pm$. При этом имеется представление (3.9), (3.10) алгебры $\mathscr{A}^\Gamma$ в алгебру разностных операторов $\mathfrak{Gl}^\infty$. Действие подалгебр $\mathscr{A}^\Gamma_\pm$ корректно определено на пространствах $H^\Gamma_\lambda(x_0)$ и продолжается до действия центрального расширения $\widehat{\mathscr{A}}^\Gamma$ всей алгебры $\mathscr{A}^\Gamma$. Это центральное расширение порождено A_i и t с коммутационными соотношениями

$$[A_i, A_j] = \gamma_0\,(A_i, A_j)\, t, \quad [A_i, t] = 0. \tag{4.17}$$

Здесь γ_0, как и в случае алгебры L^Γ, единственный «локальный» коцикл

$$\gamma_0\,(A_i, A_j) = 0, \quad |\, i + j \,| > g, \tag{4.18}$$

отвечающий контуру C_0 (вернее его классу гомологий), который разделяет Γ на две части $\Gamma^\pm$ так, что $P_\pm \subset \Gamma^\pm$. «Центральный заряд» в этом случае равен для всех λ и x_0 единице, т. е.

$$t\Phi_0 = \Phi_0. \tag{4.19}$$

Для рода $g = 0$ алгебра $\widehat{\mathscr{A}}^\Gamma$ совпадает с алгеброй Гейзенберга p_i, q_j, t:

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, q_j] = i\delta_{i,j} t, \tag{4.20}$$

где $p_i = A_i$, $q_i = A_{-i}$.

§ 5. Случай эллиптических кривых ($g = 1$)

Пусть Γ — эллиптическая кривая с периодами 2ω и $2\omega'$. Все необходимые для дальнейшего сведения из теории эллиптических функций можно найти в книге [18], обозначений которой мы детально придерживаемся.

На Γ векторное поле $\frac{\partial}{\partial z}$ не имеет ни нулей ни полюсов. Поэтому L^Γ и $\mathcal{A}^\Gamma$, как линейные пространства, изоморфны. Их базисы e_i и A_i связаны следующим образом:

$$e_i = A_i(z)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.1}$$

Для всех полуцелых i, кроме $i \neq -1/2$, базисные функции $A_i \in \mathcal{A}^\Gamma$ задаются формулой

$$A_i(z) = \frac{\sigma^{i-1/2}(z-z_0)\,\sigma(z+2iz_0)}{\sigma^{i+1/2}\,(z+z_0)\,\sigma((2i+1)z_0)}\,\sigma^{i+1/2}(2z_0). \tag{5.2}$$

Здесь $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса. Функция $A_{-1/2}$, дополняющая (5.2) до базиса в $\mathcal{A}^\Gamma$ может быть выбрана в виде

$$A_{-1/2} = \frac{\sigma^2(z)\,\sigma(2z_0)}{\sigma(z+z_0)\,\sigma(z-z_0)\,\sigma^2(z_0)}. \tag{5.3}$$

Коммутационные соотношения в L^Γ имеют вид, слегка отличающийся от общего случая $g \neq 1$, и вследствие (5.1) в значительной степени напоминают по структуре формулы (3.3) и (3.4).

Для $|i| \neq 1/2$, $|j| \neq 1/2$ и таких, что $i + j \neq -2$,

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{ij}^s e_{i+j-s}, \quad g_0 = 3/2. \tag{5.4}$$

Для $|i| \neq 1/2$, $|j| \neq 1/2$ и $i + j = -2$

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-1/2}^{g_0} c_{ij}^s e_{-2-s} + \tilde{c}_{ij} e_{1/2}. \tag{5.5}$$

Коммутаторы e_i с $e_{1/2} = \frac{\partial}{\partial z}$ имеют вид

$$[e_{1/2}, e_i] = \sum_{s=-1/2}^{g_0} c_{1/2,\,i}^s e_{i+1/2-s}, \quad i \neq -\frac{3}{2}, -1/2, \tag{5.6}$$

$$[e_{1/2}, e_{-3/2}] = \sum_{s=1/2}^{g_0} c_{1/2,\,-3/2}^s e_{-1-s} + \tilde{c}_{1/2,\,-3/2} e_{1/2}, \tag{5.7}$$

$$[e_{1/2}, e_{-1/2}] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{1/2,\,-1/2}^s e_s. \tag{5.8}$$

Наконец,

$$[e_{-1/2}, e_i] = \sum_{s=-5/2}^{g_0} c_{-1/2,\,i}^s e_{i-1/2-s}, \quad i \neq -\frac{5}{2}, \tag{5.9}$$

$$[e_{-1/2}, e_{-5/2}] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{-1/2,\,-5/2}^s e_{-3-s} + \tilde{c}_{-1/2,\,-5/2} e_{1/2}. \tag{5.10}$$

Найдем коэффициенты c_{ij}^s сначала в общем случае (5.4). Для этого, как, впрочем, и в случае всех остальных формул (5.5) — (5.10), достаточно найти выражения для коэффициентов $a_i = \alpha_i^-$ и $\xi_i^\pm$ в разложениях e_i, $|i| \neq 1/2$, в окрестностях точек $z = \pm z_0$:

$$e_i = \alpha_i^{\pm} z_{\pm}^{\pm i - 1/2}\left(1 + \xi_i^{\pm} z_{\pm} + O(z_{\pm}^2)\right)\frac{\partial}{\partial z_{\pm}}, \quad z_{\pm} = z \mp z_0, \tag{5.11}$$

и коэффициенты $\xi_{-1/2}^{\pm}$ в аналогичном разложении

$$e_{-1/2} = \pm z_{\pm}^{-1}\left(1 + \xi_{-1/2}^{\pm} z_{\pm} + O(z_{\pm}^2)\right)\frac{\partial}{\partial z_{\pm}}. \tag{5.12}$$

Из (5.2) следует, что

$$a_i = (-1)^{i-1/2}\frac{\sigma^{2i}(2z_0)\,\sigma((2i-1)z_0)}{\sigma((2i+1)z_0)}, \tag{5.13}$$

$$\xi_i^{+} = \zeta((2i+1)z_0) - (i+1/2)\,\zeta(2z_0), \tag{5.14}$$

$$\xi_i^{-} = \zeta((2i-1)z_0) - (i-1/2)\,\zeta(2z_0). \tag{5.15}$$

Для $i = -1/2$ имеем

$$\xi_{-1/2}^{\pm} = 2\zeta(z_0) - \zeta(2z_0). \tag{5.16}$$

Коэффициенты $c_{ij}^{3/2}$ во всех формулах равны, как и в общем случае,

$$c_{ij}^{3/2} = (j - i). \tag{5.17}$$

Для того чтобы найти c_{ij}^{s} в (5.4), надо подставить разложения (5.11) в (5.4) и приравнять коэффициенты при $z_{\pm}^{\pm i \pm j - 2}$ и $z_{1}^{\pm i \pm j - 1}$ в обеих частях равенств. Получим

$$c_{ij}^{-3/2} = (i - j)\frac{a_i a_j}{a_{i+j+3/2}}, \tag{5.18}$$

где a_i даются формулой (5.13). Кроме того,

$$c_{ij}^{1/2} = (i - j)\,\xi_{i+j-3/2}^{+} + (j - 1/2)\,\xi_j^{+} - (i - 1/2)\,\xi_i^{+}.$$

Для $i + j \neq 1$, подставляя (5.14), получим

$$c_{ij}^{1/2} = (i - j)\left(\zeta((2i + 2j - 2)z_0) + \zeta(2z_0)\right) + \left(j - \frac{1}{2}\right)\zeta((2j+1)z_0) - \\ - \left(i - \frac{1}{2}\right)\zeta((2i+1)z_0). \tag{5.19}$$

Аналогично $c_{ij}^{-1/2}$ для $|\, i + j + 3/2 \,| \neq -1/2$

$$c_{ij}^{-1/2} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j+1/2}}\Big[(j - i)\left(\zeta((2i + 2j + 2)z_0) - \zeta(2z_0)\right) - \\ - \left(j + \frac{1}{2}\right)\zeta((2j-1)z_0) + \left(i + \frac{1}{2}\right)\zeta((2i-1)z_0)\Big]. \tag{5.20}$$

В случае $i + j = 1$, $|i| \neq 1/2$, $|j| \neq 1/2$ имеем, используя то, что $\xi_{1/2}^{\pm} = 0$,

$$c_{i,\,1-i}^{1/2} = (4i - 2)\,\zeta(z_0) + \left(\frac{1}{2} - i\right)\zeta((3 - 2i)z_0) - \left(i - \frac{1}{2}\right)\zeta((2i - 1)z_0), \tag{5.21}$$

$$c_{i,\,1-i}^{-1/2} = -\,a_i a_{1-i}\Big[(4i + 2)\,\zeta(z_0) - \left(\frac{1}{2} + i\right)\zeta((3 + 2i)z_0) + \\ + \left(i + \frac{1}{2}\right)\zeta((2i + 1)z_0)\Big]. \tag{5.22}$$

Аналогичным же образом находятся коэффициенты и в формулах (5.5)—(5.8). Мы их не приводим здесь лишь в целях сокращения объема статьи.

В формулах (5.9) и (5.10) имеется отличие. Они содержат в правой части не четыре, как в остальных случаях, а пять слагаемых. Коэффициенты

$c^s_{-1/2,\,i}$ при $s=3/2,\ 1/2,\ -3/2,\ -5/2$ в (5.9) и $c^s_{-1/2,\,-5/2}$ при $s=3/2,\ 1/2,\ -3/2$ и $\tilde{c}_{-1/2,\,-5/2}$ в формуле (5.10) выражаются по-прежнему через соответствующие a_i и $\xi_i^{\pm}$. Для нахождения $c^{-1/2}_{-1/2,\,i}$ можно было бы найти выражение через следующий коэффициент разложения e_i в окрестности $\pm z_0$, но этого можно избежать, если воспользоваться тем, что $e_{-1/2}$ имеет двукратный нуль в точке $z=0$. Поэтому левая часть (5.9) обращается в нуль в $z=0$ и $c^{-1/2}_{-1/2,\,i}$ для (5.9) находится из дополнительного равенства

$$\sum_{s=-5/2}^{3/2} c^s_{-1/2,\,i} A_i(0)=0. \tag{5.23}$$

Аналогично $c^{-1/2}_{-1/2,\,-5/2}$ находится и в случае (5.10).

§ 6. Структуры теории солитонов

Обобщением конструкции § 4 является реализация представлений $\hat{L}^\Gamma$ в пространстве $H_\lambda^{\Gamma,N}(x)$ полубесконечных форм вида (4.2), где $f_j(x)\in \in \mathcal{F}_\lambda^{\Gamma,N}(x)$. Здесь и далее $x=(x_{-N},\ \ldots,\ x_N)$.

Согласно лемме 5 действие e_i на $f_j(x)$ задает при каждом x гомоморфизм L^Γ в алгебру разностных операторов. Как следует из (2.7), на $H_\lambda^{\Gamma,N}(x)$ корректно определено действие подалгебр $L_{\pm}^{(N+1)}\subset L^\Gamma$, порожденных (в соответствии с определением § 1) элементами e_i с $\pm i\geqslant g_0+N+1$. Как и в случае $N=0$, это действие продолжается до представления алгебры $\hat{L}^\Gamma$ такого, что

$$L_+^{(N+1)}\Phi_0=0, \tag{6.1}$$

$$t\Phi_0=c\Phi_0,\quad e_{g_0+N}\Phi_0=h\Phi_0. \tag{6.2}$$

Указанное семейство представлений $\hat{L}^\Gamma$ (в которых центральный заряд и аналог «старшего веса» h могут зависеть от x) нуждается в более детальном анализе, к которому мы предполагаем вернуться в дальнейшем.

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}_{-1}^{\Gamma,N}(x)$. По определению это пространство векторных полей на Γ, голоморфных вне $P_\pm$ и имеющих на линии σ, соединяющей $P_\pm$, скачок (2.5) и экспоненциальную особенность в $P_\pm$. Прямой интеграл таких пространств обладает естественной структурой алгебры Ли и будет обозначаться через $L^{\Gamma,N}$.

Базис в этом пространстве образует векторные поля $e_i(x)$ вида (2.6).

Лемма 8. *Коммутатор двух базисных полей имеет вид*

$$[e_i(x),e_j(y)]=\sum_{s=-g_0-N}^{g_0+N} c_{ij}^s(x,y)\,e_{i+j-s}(x+y). \tag{6.3}$$

Доказательство равенства (6.3) стандартно и использует лишь единственность $e_i(x)$, обладающих аналитическими свойствами, перечисленными в утверждении леммы 4.

Равенства (6.3) показывают, что $L^{\Gamma,N}$ является «обобщенно-мультиградуированной» алгеброй. В роли «мультииндексов» выступают $(i,\ x)$, причем «размытость» градуировки имеет место лишь по индексу i. Градуировка по непрерывному векторному индексу x соблюдается точно. В алгебре $L^{\Gamma,N}$ можно выделить подалгебры $L_\pm^{\Gamma,N,(S)}$, порожденные полями $e_i(x^\pm)$ с $\pm i\geqslant \geqslant g_0+N+s$, $s\geqslant -1$. Здесь $x^\pm$ — это векторы вида $x^+=(0,\ \ldots,\ 0,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)$, $x^-=(x_{-N},\ \ldots,\ x_0,\ 0,\ \ldots)$.

Пространства $\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma,N}$ — прямые интегралы $\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma,N}(x)$ являются «обобщенно-мультиградуированными» модулями над $L^{\Gamma,N}$:

$$e_i(x)\,f_j(y)=\sum_{s=-g_0-N}^{g_0+N} R_{ij}^s(x,y)\,f_{i+j-s}(x+y). \tag{6.4}$$

До сих пор мы использовали представления L^Γ в алгебре разностных операторов (для $L^{\Gamma,N}$ в алгебре «обобщенно-разностных операторов» (6.4)). Вместе с тем L^Γ допускает и представления в виде дифференциальных операторов.

Лемма 9. *Пусть* $f_j \in \mathcal{F}_\lambda^{\Gamma,N}(x)$ — *форма веса* λ, *определенная в лемме* 4. *Тогда для любого* $e_i \in L^\Gamma$ *существует единственный оператор по переменным* x_{-1} *и* x_1

$$D_i^j = \sum_{s=0}^{+N-i+g_0} u_{is}^j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^s + \sum_{s=1}^{N+i+g_0} v_{is}^j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_{-1}}\right)^s \tag{6.5}$$

такой, что

$$e_i f_j = D_i^j f_j \tag{6.6}$$

(*суммирования по* j *в* (6.6) *нет*).

В силу (2.11) и результатов работы [19] имеем, что f_j удовлетворяет двумерному уравнению Шредингера

$$\widehat{H}_j f_j = 0, \quad \widehat{H}_j = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{-1}} + v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_-} + u_j(x) \tag{6.7}$$

и идеал, порожденный $\widehat{H}_j$ в кольце дифференциальных операторов по переменным x_1, x_{-1}, совпадает с идеалом операторов, аннулирующих f_j. Из (6.5) и (6.7) следует, что операторы D_i^j реализуют алгебру L^Γ на пространстве решений уравнения $\widehat{H}_j\psi = 0$. В [20] было доказано, что аналогичное представление имеет место и для коммутативного кольца $\mathcal{A}^\Gamma$.

Рассмотрим теперь формы $f_j^+ = f_j(x^+)$, $x^+ = (0, 0, \ldots, x_1, \ldots, x_N)$ — это формы, имеющие экспоненциальные особенности лишь в одной точке P_+.

В работе [20] было доказано, что каждая функция Бейкера — Ахиезера порождает гомоморфизм кольца $\mathcal{A}_-^\Gamma \in \mathcal{A}^\Gamma$ функций на Г, имеющих полюсы в точке P_+, в кольцо обыкновенных дифференциальных операторов. Из (2.11) и этого утверждения следует, что для любого A_i с $-i \geqslant \frac{g}{2}+1$ существуют единственные операторы

$$M_i^j = \sum_{s=0}^{g/2-i} w_{is}^j(x^+)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^s \tag{6.8}$$

такие, что $M_i^j f_j^+ = A_i f_j^+$.

В случае рассматриваемых форм f_j^+ действие e_i на f_j^+ также эквивалентно при $i \leqslant -g_0$ действию обыкновенного дифференциального оператора

$$D_i^{j+} f_j^+ = e_i f_j^+, \quad D_i^{j+} = \sum_{s=0}^{-i+N+g_0} u_{is}^j(x^+)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^s. \tag{6.9}$$

Предложение. *Операторы* D_i^{j+}, $i \leqslant -g_0$, *задают расширение коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов* M_i^j. *Это расширение порождает представление* Z_2-*градуированной алгебры Ли* $W^\Gamma = W_0^\Gamma + W_1^\Gamma$, *где* W_0^Γ — *это алгебра* $L_-^{\Gamma,(-1)} \subset L^\Gamma$, *а* $W_1^\Gamma = \mathcal{A}_-^\Gamma$ — *коммутативная алгебра функций на* Г *с полюсом в* P_+. *Произведение* $[W_0^\Gamma, W_1^\Gamma]$ *естественно.*

Замечание. В работах [21; 22] построены представления алгебры гладких векторных полей на S^1 в алгебру симметрий нелинейных уравнений, допускающих представление нулевой кривизны. Поля из $\mathcal{L}(S^1)$, являющиеся ограничением алгебры L^Γ на контур, отвечают симметриям, оставляющим инвариантным многообразие конечнозонных решений, отвечающих кривой Г (в силу результатов нашей работы).

Пример. Пусть Г — эллиптическая кривая и f_n — функция Бейкера — Ахиезера, имеющая вид

$$f_n(z) = z_+^n e^{z_+^{-1}x}(1 + O(z_+))$$

в окрестности z_0 и такая, что $f_n = O(z_-^{-n})$ в окрестности $-z_0$.

Хорошо известно, что операторы

$$L_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\wp(x + 2nz_0), \quad \tilde{A}_n = -2\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6\wp(x + 2nz_0) + 3\wp'(z + 2nz_0) \tag{6.10}$$

удовлетворяют условию

$$L_n f_n = \wp(z - z_0) f_n, \quad \tilde{A}_n = \wp'(z - z_0) f_n \tag{6.11}$$

и порождают тем самым коммутативное подкольцо в кольце обыкновенных дифференциальных операторов. Действие $e_{1/2}$ на f_n равно

$$e_{1/2} f_n = D_{1/2} f_n = \left(-x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\wp(x + 2nz_0)\right) - \frac{\partial}{\partial x} - \zeta(x + 2nz_0)\right) f_n. \tag{6.12}$$

Коммутационные соотношения между L_n и $\tilde{A}_n$, $D_{1/2}$ легко найти:

$$[L_n, D_{1/2}] = +\tilde{A}_n, \quad [D_{1/2}, \tilde{A}_n] = -6L_n^2 + \frac{1}{2}g_2.$$

В заключение мы кратко сформулируем результаты, показывающие, что рассмотрение форм произвольного веса λ на Г позволяет расширить классы точных решений пространственно-двумерных уравнений типа уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Зафиксируем на Г произвольный набор точек общего положения $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$. Если $M \geqslant 2S(\lambda)$, то размерность пространства форм веса λ на Г, мероморфных вне P_+, где они имеют полюсы в $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$, и имеющих вид

$$\Psi = \exp(z^{-1}x + z^{-2}y + z^{-3}t)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s z^s\right)(dz)^\lambda \tag{6.13}$$

в окрестности P_+, равна $M - 2S + 1$. Доказательство этого факта, аналогично доказательству леммы 4, сводится к подобному утверждению для функций Бейкера — Ахиезера [13] (здесь, как и ранее, $2S = g - 2\lambda(g - 1)$).

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_{M-2S}$ — произвольный набор контуров на Г. Зададим на них $M - 2S$ форм h_k веса $1 - \lambda$, тогда можно определить форму Ψ из условий

$$\oint_{\sigma_k} \Psi h_k = 0, \quad k = 1, \ldots, M - 2S, \tag{6.14}$$

и ξ_0 в (6.13) равен единице: $\xi_0 \equiv 1$.

Теорема 4. *Существуют единственные операторы*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t), \quad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t) \tag{6.15}$$

такие, что

$$(\partial_y - L)\Psi = (\partial_t - A)\Psi = 0. \tag{6.16}$$

Коэффициент $u(x, y, t)$, являющийся вследствие (6.16) *решением уравнения Кадомцева — Петвиашвили, представляет собой «асимптотически конечнозонное» решение*

Для случая $\lambda = 1$ утверждение этой теоремы получено в [17], где можно найти точное значение термина «асимптотически конечнозонное». Доказательство теоремы для всех λ практически не отличаются.

Подобным же образом можно использовать формы типа Бейкера — Ахиезера для построения решений общих уравнений, допускающих коммутационное представление, не содержащее явно спектрального параметра. Это уравнения типа КП или уравнения, имеющие L, A, B-тройки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandelstam S.* Dual resonance models // Phys. Rep.— 1974.— V. 13.— P. 259—353.
2. *Belavin A., Zamolodchkov A., Polyakov A.* An infinite conformal group in quantum field theory // Preprint Inst. of Theor. Phys. M., 1983.
3. *Friedan D.* // in «Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics» // Les Houches.— North-Holland.— 1984.
4. *Белавин А. А., Книжник В.* // Комплексная геометрия и теория квантовых струн // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 2 (8).— С. 364—391.
5. *Shwartz J. N.* Superstring theory // Phys. Reports—1982.—89.— P. 223—322.
6. *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 2.— С. 47—63.
7. *Mamford D.* On the stability of the algebraic variaters // Math. E'ns L'Ens.— 1977.— V. 23.— P. 39—55.
8. *Кричевер И. М.* Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН.— 1978.— Т. 33, вып. 4.— С. 215—216.
9. *Кричевер И. М.* Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, вып. 2.— С. 42—54.
10. *Чередник И. В.* Дифференциальные уравнения для функций Бейкера — Ахиезера // Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, вып. 3.— С. 45—54.
11. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН.— 1976.— Т. 31, вып. 1.— С. 55—136.
12. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
13. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН.— 1977.— Т. 32, вып. 6.— С. 183—208.
14. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН.— 1981.— Т. 36, вып. 2.— С. 11—80.
15. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН.— 1980. Т. 35, вып. 6— С. 47—68.
16. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. Т. 4. С. 210—315.
17. *Кричевер И. М.* Метод Лапласа, алгебраические кривые и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил.— 1984. Т. 18, вып. 3.— С. 43—56.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1974.
19. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // ДАН СССР.— 1976.— Т. 229, вып. 1.— С. 15—18.
20. *Кричевер И. М.* Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова—Шабата и их периодических решений // ДАН СССР.— 1976.— Т. 227, вып. 2.— С. 291—294.
21. *Орлов А. Ю., Шульман Е. И.* Дополнительные симметрии интегрируемых систем и представления конформной алгебры // Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР. Новосибирск. Препринт № 217, 1984.
22. *Орлов А. Ю., Шульман Е. И.* Дополнительные симметрии двумерных интегрируемых систем // Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР. Новосибирск. Препринт № 277, 1985.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау

Поступило в редакцию
14 ноября 1986 г.