Г. Фикера, Ю. М. Сухов, Н. П. Клепиков, И. М. Кричевер, Н. Ф. Морозов, С. И. Похожаев, В. Е. Захаров, Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 2(224), 255–262

1982 г. март—апрель *т. 37, вып. 2 (224)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 21 октября 1981 г.

1. Г. Фикера (Италия, Рим) «Краевые задачи для плюригармонических функций».

Пусть Ω — ограниченная область в декартовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ вещественных переменных $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ $(n > 1)$. Предполагается, что Ω является $2n$-мерной клеткой в $\mathbb{R}^{2n}$. Пусть ее граница $\Sigma = \partial\Omega$ задается уравнением $\rho(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0$. Считаем, что $\rho > 0$ в Ω, $\rho < 0$ в $\mathbb{R}^{2n} \setminus \overline{\Omega}$. Будем предполагать, что $\rho \in C^m$ $(m \geqslant 1)$ и $|\operatorname{grad} \rho| > 0$ на Σ. Положим $z_h = x_h + iy_h$. Пусть u — плюригармоническая функция в Ω, т. е. u является вещественной частью комплекснозначной функции $w(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфной в Ω.

Рассматриваются следующие задачи:

1) Задана $U \in C^0(\Sigma)$; ищется $u \in C^0(\overline{\Omega})$, плюригармоническая в Ω и удовлетворяющая условию $u|_\Sigma = U$ (задача Дирихле для плюригармонических функций).

1′) U задана на $(2n-1)$-мерной клетке $\Delta \subset \Sigma$; ищется u, плюригармоническая в некоторой области Ω^+ $(\Omega^+ \subset \Omega,\ \partial\Omega^+ \supset \Delta)$ и удовлетворяющая условию $u|_\Delta = U$ (локальная плюригармоническая задача).

2) На Σ задана Φ; ищется u, плюригармоническая в Ω и удовлетворяющая условию $\partial u/\partial\nu = \Phi$ на Σ, ν — внутренняя нормаль к Σ (задача Неймана для плюригармонических функций).

При изучении этих задач используются два разных подхода.

Локальный подход состоит в нахождении условий дифференциального характера, которым должна удовлетворять U в окрестности (на Σ) любой точки Σ, для того чтобы U являлась следом на Σ некоторой плюригармонической в Ω функции.

Глобальный подход состоит в определении такого множества Ψ заданных на Σ функций, что U является следом на Σ плюригармонической в Ω функции тогда и только тогда, когда $\int\limits_\Sigma U\psi\, d\sigma = 0$, $\forall\psi \in \Psi$.

Будем говорить, что в точке $z \in \Sigma$ выполняется (L)-*условие*, если существует n таких комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что в точке z справедливы соотношения

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_h}\lambda_h = 0, \qquad \sum_{k,\, h=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_h \partial \bar{z}_k}\lambda_h\bar{\lambda}_k < 0.$$

Пусть Δ является $(2n-1)$-мерной клеткой в $\mathbb{R}^{2n}$. Предположим, что $\overline{\Delta} \in C^l$ $(l \geqslant 1)$. Пусть D — линейный дифференциальный оператор порядка l с коэффициентами, непрерывными в замыкании $\overline{\Omega_0}$ некоторой области Ω_0, такой, что $\Delta \subset \overline{\Omega_0}$. Оператор D назовем *касательным* к Δ, если для любой $u \in C^l(\overline{\Omega}_0)$, равной нулю на Δ, выполняется равенство $Du = 0$ на Δ. Оператор D назовем *плюригармоническим*, если для любого шара I, содержащегося в Ω_0, и для любой плюригармонической в I функции u выполняется равенство $Du = 0$ в I.

Обозначим через $M_l^n(\Delta)$ множество всех (вещественных) плюригармонических операторов порядка l, касательных к Δ. Множество $M_l^n(\Delta)$ имеет структуру C^0-модуля над кольцом непрерывных на Δ вещественнозначных функций. Пусть $l = 3$. Через $P_3^n(\Delta)$ обозначим C^0-модуль, состоящий из операторов $D \in M_l^n(\Delta)$ следующего вида:

$$D = \sum_{k=1}^{s} f_k L_k D_k,$$

где s — произвольное целое положительное число, $f_k \in C^0(\Delta)$, L_k — вещественный оператор первого порядка, касательный к Δ, а $D_k \in M_2^n(\Delta)$. Получаем

$$M_3^n(\Delta) = P_3^n(\Delta) \oplus Q_3^n(\Delta),$$

где $Q_3^n(\Delta)$ — подмодуль в $M_3^n(\Delta)$.

Локальный подход приводит к следующим теоремам о решениях задач 1) и 1').

I. *Пусть* $\rho \in C^3$. *Предположим, что* (L)*-условие выполняется в каждой точке* Σ. *Пусть* U *— след на* Σ *функции* u, *гармонической в* $\overline{\Omega}$ *и принадлежащей* $C^3(\overline{\Omega})$. *Функция* u *является плюригармонической в* Ω *тогда и только тогда, когда для всякой точки* $z^0 \in \Sigma$ *существует такая* $(2n-1)$*-мерная клетка* $\Delta \subset \Sigma$, *содержащая* z^0, *что при* $z \in \Delta$ *справедливы равенства*

$$(1) \qquad D_2^{(r)} U = 0 \quad (r = 1, \ldots, n^2 - 2n), \qquad D_3^{(s)} U = 0 \quad (s = 1, \ldots, 2n-2),$$

где операторы $D_2^{(r)}$ и $D_3^{(s)}$ *принадлежат соответственно* $M_2^{(n)}(\Delta)$ *и* $Q_3^{(n)}(\Delta)$.

II. *Если заданная* $U \in C^3(\Delta)$ *удовлетворяет* (1) *на* $(2n-1)$*-мерной клетке* Δ *и на* Δ *выполняется* (L)*-условие, то существует функция* u, *плюригармоническая в некоторой области* Ω^+ $(\Omega^+ \subset \Omega,\ \partial\Omega^+ \supset \Delta)$, *непрерывная в* $\Omega^+ \cup \Delta$ *и совпадающая с* U *на* Δ.

Условия (1) при соответствующих предположениях являются также необходимыми для существования решения локальной плюригармонической задачи.

Результаты, к которым приводит *глобальный подход*, имеют совсем иной характер.

Теперь мы предполагаем, что $\rho \in C^{1+h}$. *Не требуется выполнение* (L)*-условия.* Пусть $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ — компоненты вектора единичной внутренней нормали ν к поверхности Σ. Пусть τ — единичный касательный к Σ вектор с компонентами $\beta_1, -\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \beta_n, -\alpha_n$.

III. *Пусть* A, B *— функции класса* $C^1(\overline{\Omega})$, *гармонические в* Ω *и удовлетворяющие условию*

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial B}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Sigma.$$

При заданной $U \in C^0(\Sigma)$ *существует (единственная) плюригармоническая функция* $u \in C^0(\overline{\Omega})$, *совпадающая с* U *на* Σ, *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Sigma} U \left(\frac{\partial A}{\partial \nu} - \frac{\partial B}{\partial \tau} \right) d\sigma = 0$$

для любой пары A, B *с указанными выше свойствами.*

IV. *Пусть* A, B, C *— функции класса* $C^1(\overline{\Omega})$, *гармонические в* Ω. *Пусть*

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial B}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \nu} - \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0 \text{ на } \Sigma.$$

При заданной Φ, *удовлетворяющей условию Гёльдера на* Σ, *существует плюригармоническая в* Ω *функция* $u \in C^1(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющая условию* $\partial u / \partial \nu = \Phi$ *на* Σ, *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Sigma} \Phi (B - C)\, d\sigma = 0$$

для каждой тройки A, B, C *с указанными выше свойствами.*

Заседание 28 октября 1981 г.

1. Ю. М. Сухов «Сходимость к равновесному состоянию в квантовой статистической механике».

1°. Задача о сходимости к равновесному состоянию остается одной из центральных открытых проблем статистической физики. В последнее время стал популярным новый подход, при котором изучается эволюция системы с бесконечным числом частиц. Неожиданным обстоятельством оказалось то, что бесконечномерные варианты вполне интегрируемых систем послужили первыми примерами, в которых оказалось возможным строго доказать сходимость к пределу. В качестве предельных состояний в этих примерах выступают не только «канонические» равновесные распределения Гиббса, связанные с «каноническими» первыми интегралами движения: числом частиц, полным импульсом и полной энергией, но и состояния, связанные с другими интегралами.

2°. Доклад посвящен изложению результатов о сходимости к предельному состоянию для двух моделей эволюции квантовых систем с бесконечным числом частиц. Первая из этих моделей — свободный (идеальный) газ в евклидовом пространстве R^ν (она была рассмотрена ранее О. Лэнфордом и Д. Робинзоном [1]). Вторая модель — движение одномерной системы твердых стержней. n-частичный гамильтониан свободного газа имеет вид

$$H_{(0)}^{(n)} = -1/2 \sum_{j=1}^{n} \Delta_j, \qquad \Delta_j = \sum_{\mu=1}^{\nu} \partial^2/\partial (x_j^\mu)^2,$$

а системы твердых стержней длины $a > 0$ —

$$H_{(a)}^{(n)} = -1/2 \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2 + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n} \Phi(|x_{j_1} - x_{j_2}|),$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leqslant r < a, \\ 0, & r \geqslant a. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}(R^\nu)_\pm$ C^*-алгебры ККС(+) и КАС(—) в R^ν. Знак «+» соответствует бозонам, «—»— фермионам. Состоянием бесконечной системы частиц в R^ν (кратко: состоянием) называется линейный положительный нормированный функционал на $\mathfrak{A}(R^\nu)_\pm$.

Временной эволюцией состояния G при свободном движении называется семейство состояний $\{G_t^{(0)},\ t \in R^1\}$ с $G_0^{(0)} = G$, дающее (слабое) решение уравнения Лиувилля

$$(d/dt)\, G_t^{(0)}(A) = G_t^{(0)}(\delta_{H_{(0)}} A),$$

где $\delta_{H_{(0)}}$ — неограниченное дифференцирование в $\mathfrak{A}(R^\nu)_\pm$, порожденное $H_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ При $\nu = 1$ аналогичным образом, с заменой $H_{(0)}$ на $H_{(a)}$, определяется временная эволюция $\{G_t^{(a)},\ t \in R^1\}$ состояния G при движении твердых стержней.

Основной результат: при широких условиях на начальное состояние G имеет место сходимость

$$\lim_{t \to \pm\infty} G_t^{(0)} = P^{(0)}, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} G_t^{(a)} = P^{(a)}.$$

Предельное состояние $P^{(0)}$ является так называемым квазисвободным состоянием. Предельное состояние $P^{(a)}$ связано с $P^{(0)}$ некоторым преобразованием «разжатия». Эти результаты обобщают на квантовый случай теоремы, доказанные в [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. E. Lanford, D. W. Robinson. Approach to equilibrium of free quantum systems.— Comm. Math. Phys., 1972, **24**, p. 193—210.

[2] Р. Л. Добрушин, Ю. М. Сухов. Временная асимптотика для некоторых вырожденных моделей эволюции систем с бесконечным числом частиц.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 14.— М.: ВИНИТИ, 1979, с. 147—254.

Заседание 11 ноября 1981 г.

1. Н. П. Клепиков «Релятивистская классическая механика систем взаимодействующих частиц».

Релятивистская классическая (неквантовая) механика призвана описывать физические ситуации, в которых быстрые частицы длительно взаимодействуют между собой и, возможно, также с внешним полем, а расстояния между частицами велики по сравнению с длинами их дебройлевских волн.

Основной принцип механики заключается в отождествлении пространства эволюции системы n частиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле с потенциалами $A_i(x)$, с характеристиками пфаффова уравнения $dS+\sum_{a=1}^{n}(p_{ai}=e_aA_i(x_a))dx_a^i=0$, лежащими в пространстве $8n+1$ переменных S, p_{ia}, x_a^i, $i=0, 1, 2, 3$, на поверхности размерности $7n+1$, выделяемой n связями $f_a=0$, $f_a=p_{ia}p_a^i-\mathfrak{m}_a^2$, $\mathfrak{m}_a$— пуанкаре-инвариантные динамические массы частиц, зависящие от характера взаимодействия между ними (все векторы четырехмерны, метрика псевдоевклидова). Согласно теории пфаффовых уравнений, эти характеристики n-мерны. На них действие S, $4n$ импульсов p_{ia} и $3n$ пространственных координат частиц $\mathbf{r}_a$ являются функциями n независимых времен t_a. Уравнения движения имеют вид $dp_{ia}=e_aF_{ik}(x_a)dx_a^k-\sum_{b=1}^{n}\mu_b\,\partial f_b/\partial x_a^i$, $dx_a^i=$ $=\sum_{b=1}^{n}\mu_b\,\partial f_b/\partial p_{ia}$ величины μ_b выражаются линейно через дифференциалы времен; F_{ik} — тензор поля.

Каждой совокупности вариаций δx_a^i, δp_{ia}, δS, $\delta A_i=\partial\,\delta\Lambda/\partial x^i$, оставляющей инвариантными как пфаффову форму, так и функции f_a, сопоставляется интеграл движения

$$\sum_{a=1}^{n}(p_{ia}+e_aA_i(x_a))\,\delta x_a^i+\delta\Lambda-\delta S\quad\text{(теорема Нётер).}$$

Поскольку характеристическая система любой пфаффовой системы вполне интегрируема, из определения вполне интегрируемой системы и свойств ее интегральных поверхностей следует, что n-мерная характеристика, определяемая заданием $7n+1$ начальных данных в точке с n начальными временами, единственна. Тогда все $7n+1$ переменных, вычисленные в некоторой точке характеристики (конечная точка), не зависят от пути движения в пространстве времен между начальной и конечной точками. Присоединяя независимость импульсов частиц от точки на начальной и конечной асимптотиках, где все частицы свободны, находим, что результат расчета рассеяния частиц не зависит от выбора произвольных функций, выделяющих одномерную характеристику из n-мерной.

Взаимодействие в системе частиц не может зависеть от движения системы как целого. Поэтому совершается каноническое преобразование в $8n$-мерном фазовом пространстве, отделяющее движение центра инерции, не содержащее масс частиц и не зависящее от наличия взаимодействия, но имеющее правильный нерелятивистский предел. Для двух частиц вместо p_{ia}, x_a^i, $a=1, 2$, вводятся переменные P_i, R^i, $\mathbf{k}$, q, $\mathbf{r}$, τ, причем P_i и R^i, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$, $-q$ и τ канонически сопряжены. При преобразованиях Лоренца P_i преобразуется как импульс системы в целом, R^i (координаты центра инерции) испытывают, кроме того, сдвиг, ортогональный вектору P_i, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ поворачиваются на один и тот же угол, а q и τ инвариантны. Поэтому динамические массы могут зависеть от $\mathbf{k}^2$, $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{L}^2$ и τ, где $\mathbf{L}=$ $=[\mathbf{rk}]$. Пфаффова форма и функции f_a инвариантны относительно преобразований группы Пуанкаре. Для системы частиц без внешнего поля P_i постоянно, а для центра инерции находим $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0+\mathbf{P}/\mathscr{E}(T-T_0)$.

Теория может быть сформулирована в виде n уравнений Гамильтона — Якоби путем замены импульсов p_{ia}, входящих в условия связи, на выражения $\partial S/\partial x_a^i - e_a A_i(x_a)$. Для угла рассеяния в системе двух частиц могут быть написаны явные формулы при известном взаимодействии. Подробности см. в [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Клепиков, А. Н. Шатний. О формулировке релятивистской механики систем взаимодействующих частиц.— Теор. и матем. физика, 1981, 46, с. 50—63.

Заседание 18 ноября 1981 г.

1. И. М. Кричевер «Спектральная теория разностных операторов, алгебраическая геометрия и модель Пайерлса».

Развитая в последнии годы теория «конечнозонного» или алгебро-геометрического интегрирования естественно объединяет идеи теории нелинейных уравнений, спектральной теории линейных операторов с периодическими коэффициентами и методы алгебраической геометрии (см. обзоры [1] — [4]). Особенно тесной эта связь была в начальный период, когда для построения периодических (и квазипериодических) решений уравнения Кортевега — де Фриза был использован алгебро-геометрический подход к спектральной теории периодического оператора Шрёдингера. Впоследствии успехи алгебро-геометрического языка (особенно для двумерных уравнений) привели к тому, что спектральная теория отошла в тень. Приблизительно полтора года тому назад была обнаружена возможность приложения алгебро-геометрического подхода к спектральной теории в некоторых задачах статистической физики (см., например, [5]).

В докладе излагались результаты, полученные Бразовским, Дзялошинским и докладчиком при интегрировании модели Пайерлса (полный текст работы будет вскоре опубликован в ЖЭТФ). На основе модели Пайерлса строится теория, описывающая характерные особенности органических проводников (наличие периодических сверхструктур, волн зарядовой плотности, пайерлсовская неустойчивость металлической фазы).

Модель описывает самосогласованное поведение электронов и атомов ионного остова. Состояние атомов характеризуется их координатами на прямой x_n, $x_n < x_{n+1}$, и внутренними координатами v_n. Уровни энергии электронов определяются периодическим спектром $E_1 \leqslant E_2 \leqslant \ldots \leqslant E_N$ разностного оператора Шрёдингера

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1} = E\psi_n;$$

$$c_n = c_{n+N}, \quad v_n = v_{n+N}, \quad c_n = e^{x_n - x_{n+1}}.$$

Энергия системы при нулевой температуре равна

$$W\{c_n, v_n\} = \sum_{i=1}^{m} E_i + \varkappa \sum_{n=0}^{N-1} \left(c_n^2 + \frac{v_n^2}{2}\right) - P \sum_{n=0}^{N-1} \ln c_n,$$

где $m/N = \rho$ — плотность электронов наряду с $\varkappa$ и P — внешние фиксированные параметры.

С чисто математической точки зрения задача состоит в минимизации функционала $W\{c_n, v_n\}$ по всем наборам c_n и v_n.

Теорема 1. *Экстремалям функционала, т. е. наборам c_n, v_n, для которых $\frac{\partial W}{\partial c_n} = \frac{\partial W}{\partial v_n} = 0$, соответствуют операторы L, имеющие не более трех разрешенных зон спектра на всей прямой.* (*Общий оператор с периодом N имеет N разрешенных зон.*)

При доказательстве теоремы используются многочисленные алгебро-геометрические соотношения для спектральной плотности и ее вариаций.

Теорема 2. *В термодинамическом пределе, $N \to \infty$, минимуму W отвечает оператор L, имеющий две разрешенные зоны спектра. При этом все уровни энергии, лежащие в нижней зоне $e_1 \leqslant E \leqslant e_2$, заполнены, а в верхней $e_3 \leqslant E \leqslant e_4$ пусты, $e_2 < e_3$.* (*Последнее означает, что в основном состоянии система является диэлектриком.*) *Концы* *зон* $e_1, \ldots, e_4$ *определяются из уравнений*

$$(1)\qquad \begin{cases} \varkappa=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\dfrac{dE}{\sqrt{-R}}\;;\; 0=\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\dfrac{E-\frac{s_1}{2}}{\sqrt{R}}\,dE;\; R=R(E)=\prod_{i=1}^{4}(E-E_i), \\ P=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\dfrac{E^2-\frac{s_1}{2}E+\frac{s_2}{2}-\frac{s_1^2}{8}}{\sqrt{-R}}\,dE;\; s_1=\sum e_i,\quad s_2=\sum_{i>j} e_ie_j, \\ \rho=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\dfrac{E+a}{\sqrt{-R}}\,dE;\; 0=\displaystyle\int_{e_2}^{e_3}\dfrac{E+a}{\sqrt{R}}\,dE. \end{cases}$$

Уравнения (1) существенно упрощаются при переходе к эллиптическим функциям Вейерштрасса. Через эти же функции явно выражаются соответствующие значения v_n и c_n. Из-за недостатка места, здесь эти окончательные выражения и формулы не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, **31**:1, с. 55—136.

[2] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, **32**:6, с. 183—208.

[3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, 35:6, с. 47—68.

[4] Б. А. Дубровин. Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, **36**:2, с. 11—80.

[5] С. А. Бразовский, С. А. Гордюнин, Н. Н. Кирова. Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку.— Письма в ЖЭТФ, 1980, 31:8, с. 486—490.

Заседание 25 ноября 1981 г.

1. Н. Ф. Морозов (Ленинград) «Математические аспекты теории хрупкого разрушения».

Излагаются основы математического аппарата, применяемого в современной теории хрупкого разрушения.

Рассматривается анализ напряженного состояния в окрестности вершины трещины в линейной и нелинейной постановках. Обсуждается возможный вид инвариантов типа джи-интеграла в теории упругости.

Рассматриваются формы математической интерпретации реальных трещин и особенности, вносимые различными формами представления в описание процесса хрупкого разрушения.

Предлагается учитывать зернистость материала с помощью привлечения моментной теории упругости. Демонстрируются преимущества моментной теории упругости; в частности, рассматривается задача Карозерса на основе моментной теории.

В заключение формулируются математические нерешенные актуальные задачи хрупкого разрушения, в том числе

1. Вопрос о числе независимых инвариантов типа джи-интеграла.

2. О возможности применения методики Райса вычисления сингулярности в вершине трещины к углам, не равным 2π.

3. Определение асимптотики в окрестности вершины трещины в плоском геометрически нелинейном случае.

4. Построение общей теории устойчивости и определение форм равновесия плоских трещин по аналогии с теорией тонких стержней.

5. Определение точек бифуркации в задаче о растяжении нелинейной пластинки Кармана, ослабленной трещиной.

Заседание 2 декабря 1981 г.

1. С. И. Похожаев «Об одном подходе к нелинейным уравнениям и его приложениях».

Нелинейные модели в современной физике, описываемые уравнениями Эмдена — Фаулера, Томаса — Ферми, Янга — Миллса и некоторыми другими, порождают соответствующие нелинейные операторы, действующие из одного банахова пространства X в другое. Эти операторы обладают двумя основными особенностями — антикоэрцитивностью и суперлинейностью подчиненного оператора.

Для исследования уравнений такого класса предложен [1] — [2] метод сферического расслоения исходного пространства. Этот метод основан на представлении искомого решения $u \in X$ в виде

$$u = r \cdot v, \tag{1}$$

где $r = \| u \| \in \mathbb{R}$ и $v \in S = \{w \in X \mid \| w \| = 1\}$. В случае вариационных задач имеем

$$\Phi'(u) = 0, \tag{2}$$

где Φ — дифференцируемый функционал, заданный на банаховом пространстве X. В этом случае решение уравнения (2) с $u \neq 0$ сводится к решению системы

$$\begin{cases} \Phi_r'(rv) = 0, \\ \Phi_\tau'(rv) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

относительно $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $v \in S$. Здесь Φ_r' — производная функционала $\Phi(rv)$ по r и и Φ_τ' — производная функционала $\Phi(rv)$ относительно касательного пространства к единичной сфере S в точке $v \in S$. Приложение этого метода к вопросам разрешимости, числа решений, отсутствия решения, существования периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений дано в работах [1] — [2].

Здесь приведем еще одно приложение к вопросу существования нетривиальных решений. Ограничимся примером.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ краевую задачу

$$\Delta u + \lambda(x)u + \mu(x) \mid u \mid^m \operatorname{sgn} u = 0 \text{ в области } \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0 \text{ на границе } \partial\Omega. \tag{5}$$

Здесь $1 < m < \frac{n+2}{n-2}$ при $n > 2$ и $1 < m$ — любое при $n = 1, 2$. Обозначим через λ_0— первое собственное число оператора Лапласа в области Ω с граничным условием Дирихле (5). Тогда при любых функциях $\lambda, \mu \in C(\overline{\Omega})$ таких, что $\lambda(x) < \lambda_0$ и $\mu(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$, краевая задача (4) — (5) обладает счетным множеством решений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. И. Похожаев, Об одном подходе к нелинейным уравнениям.— ДАН, 1979, **247**:6, с. 1327—1331.

[2] С. И. Похожаев. О периодических решениях некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифф. уравн., 1980, **16**:1, с. 109—116.

Заседание 9 декабря 1981 г.

1. В. Е. Захаров (Черноголовка) «Многомерные интегрируемые системы»

Рассматриваются гамильтоновские системы вида

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0. \tag{1}$$

Здесь $k = \{k_1, \ldots, k_d\}$ — d-мерный вектор, $d \geqslant 2$, H — трансляционно-инвариантный гамильтониан, представленный рядом по степеням a_k, a_k^*:

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* \, dk. \tag{2}$$

Вещественная функция ω_k называется законом дисперсии. Для систем (1) вводится представленный формальным рядом по степеням a_k, a_k^* нелинейный оператор — классическая матрица рассеяния S. Каждый член ряда для S алгоритмически вычисляется через коэффициенты гамильтониана H. Рассматриваются необходимые условия существования у системы (1) дополнительного интеграла движения I вида

$$I=\int f_k a_k a_k^* \, dk+\ldots \tag{3}$$

Закон дисперсии ω_k называется вырожденным, если на многообразии $\Gamma^{1,2}$, определяемом уравнениями

$$\omega_k=\omega_{k_1}+\omega_{k_2}, \quad k=k_1+k_2,$$

существует новая функция f_k, удовлетворяющая уравнению $f_k = f_{k_1} + f_{k_2}$. Вырожденные законы дисперсии существуют в размерности $d = 2$ и задаются параметризацией

$$p = \xi_1 - \xi_2,\ q = a(\xi_1) - a(\xi_2);\ \omega = b(\xi_1) - b(\xi_2). \tag{4}$$

Здесь p, q — компоненты вектора k.

Другим примером вырожденных законов дисперсии являются $\omega = pF(q/p)$, представляющие собой предельный случай законов (4) при $\xi_1 \to \xi_2$. Относительно каждого из многообразий законов дисперсии имеют место ослабленные теоремы единственности — размерность многообразия (4), задающего вырожденные законы дисперсии, в функциональном пространстве не может быть увеличена. В пространствах размерности $d > 2$ вырожденных законов дисперсии не существует.

Если дополнительный закон сохранения вида (3) существует, то имеет место альтернатива: либо закон дисперсии вырожден, либо классическая матрица рассеяния S тривиальна (то есть оператор S тождественный). В случае вырожденного закона дисперсии матрица нетривиальна, но на ее структуру наложены очень жесткие ограничения. Тривиальность матрицы S и выполнение этих ограничений легко проверяются непосредственно. Это дает нам в руки возможность доказывать несуществование у систем типа (1) интегралов движения типа (3). Среди гамильтоновых систем типа (1) при $d = 2$, обладающих законом дисперсии типа (4), содержатся (если a и b рациональны) интегрируемые методом обратной задачи, т. е. представляющие собой условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений

$$L_1 \frac{\partial\psi}{\partial t}=M_1\psi, \quad L_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}=M_2\psi; \tag{5}$$

здесь L_1, L_2, M_1, M_2— линейные, дифференциальные по x операторы. Для этих уравнений развита техника «одевания», позволяющая получать обширные классы точных (прежде всего, солитонных) решений.

В построенных уравнениях квазиклассическая процедура замены $\frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$; $\varepsilon \to 0$, приводит к новым уравнениям гиперболического типа, обладающим вырожденным законом дисперсии $\omega = pF(q/p)$. Для них построены бесконечные серии законов сохранения.

Рассматриваются другие способы построения интегрируемых многомерных систем.