1981 г. март—апрель *т. 36. вып. 2 (218)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТЭТА-ФУНКЦИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Б. А. Дубровин

СОДЕРЖАНИЕ

Полная интегрируемость системы (5.4.20) при всех n доказана С. В. Манаковым [41]. Доказательство полной интегрируемости основано не представлении этой системы в эквивалентном виде

$$[A,\ \dot{V}] = [[A,\ V],\ [B,\ V]], \tag{5.4.23}$$

где

$$[B,\ V] = \Omega,\quad A = I^2,\quad B = I. \tag{5.4.23$'$}$$

Системы (5.4.23) были явно проинтегрированы автором [42]. Все они имеют коммутационное представление вида

$$\left[\frac{d}{dt} - [B,\ V] + zB,\quad zA - [A,\ V]\right] = 0 \tag{5.4.24}$$

на матрицах, зависящих от лишнего параметра z; поэтому их решения выражаются через θ-функции римановых поверхностей Γ вида

$$\det(zA - [A,\ V] - w\cdot 1) = 0. \tag{5.4.25}$$

Совокупность этих поверхностей Γ совпадает с совокупностью всех плоских неособых алгебраических кривых (в $\mathbb{C}P^2$) степени n (их род равен $(n-1)(n-2)/2$) и их вырождений. Явные формулы для общего решения системы (5.4.23) могут быть получены из [42] и имеют вид $V = (v_{ij})$, где

$$v_{ij} = \pm\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\,\frac{\theta(A(P_i) - A(P_j) + tU + z_0)}{\theta(tU + z_0)\,\varepsilon(P_i,\ P_j)}\qquad (i \neq j) \tag{5.4.26}$$

$$\varepsilon(P,\ Q) = \frac{\sqrt{\partial_{U(P)}\theta[\nu](0)\,\partial_{U(Q)}\theta[\nu](0)}}{\theta[\nu](A(P) - A(Q))}, \tag{5.4.27}$$

$$\lambda_i = \lambda_i^0 \exp\left\{t\sum_{k\neq i} c_i^k b_k\right\}, \tag{5.4.28}$$

$$c_i^k = -\frac{d}{dP}\ln\varepsilon(P,\ P_i)|_{P=P_k}. \tag{5.4.28$'$}$$

Здесь $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ — произвольные ненулевые константы; θ-функция построена по кривой вида (5.4.25); $P_1, \ldots, P_n$ — бесконечно удаленные точки этой кривой, где $w/z \to a_i$ при $P \to P_i$; вектор U имеет вид

$$U = \sum_{j=1}^{n} b_j U(P_j), \tag{5.4.29}$$

где $U(P)$ — вектор периодов дифференциалов Ω_P с двойным полюсом в P; z_0 — произвольный вектор; наконец, ν — любой невырожденный (т. е. $\operatorname{grad}\theta[\nu](0) \neq 0$) нечетный полупериод.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕАБЕЛЕВА ЦЕПОЧКА ТОДА И ЕЕ ДВУМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

И. М. Кричевер

Уравнения неабелевой цепочки Тода были предложены А. Поляковым, нашедшим для них и полиномиальные интегралы. Эти уравнения, имеющие вид

$$\partial_t(\partial_t g_n \cdot g_n^{-1}) = g_{n-1}g_n^{-1} - g_n g_{n+1}^{-1},\qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1}$$

где g_n — матрицы порядка l, допускают коммутационное представление типа Лакса $\partial_t L = [P,\ L]$. Здесь

$$L\psi_n = g_n g_{n+1}^{-1}\psi_{n+1} - \dot{g}_n g_n^{-1}\psi_n + \psi_{n-1},\qquad \dot{g}_n = \partial_t g_n, \tag{2}$$

$$P\psi_n = \frac{1}{2}(g_n g_{n+1}^{-1}\psi_{n+1} + \dot{g}_n g_n^{-1}\psi_n - \psi_{n-1}). \tag{3}$$

Используя это представление, в настоящей работе получены явные выражения через θ-функции Римана для периодических решений, $g_{n+N} = g_n$, уравнений (1).

В отличие от непрерывного случая, когда алгебро-геометрические конструкции дают лишь так называемые конечно-зонные решения, в разностном варианте все периодические решения уравнений Лакса оказываются алгебро-геометрическими. Это связано с тем, что оператор сдвига на период, с которым коммутирует L, является разностным оператором.

В работе [46] автором была получена классификация коммутирующих разностных операторов (см. также [47]). Там же была предложена конструкция квазипериодических решений разностных уравнений типа Захарова—Шабата и Лакса. Помимо общих решений подобного типа, у неабелевой цепочки Тода имеются сепаратрисные семейства решений, в терминологии [14] конечно-зонные решения ранга $l > 1$. Их размерность больше половины размерности фазового пространства.

Напомним сначала схему интегрирования ([15], [46]) «обычной» цепочки Тода

$$\left\{\begin{aligned} \dot{v}_n &= c_{n+1} - c_n, \\ \dot{c}_n &= c_n(v_n - v_{n-1}). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Пусть R — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g вида

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(z - z_i); \tag{5}$$

P^+ и P^- — точки кривой R вида $P^{\pm} = (\infty, \pm)$. Для интегрирования системы (4) вводится функция Бейкера — Ахиезера $\psi(n, t, P)$, мероморфная на R всюду, кроме точек P^+, P^-, имеющая там g полюсов и при $P \to P^{\pm}$ асимптотику вида

$$\psi(n, t, P)\,|_{P\to P^{\pm}} = i^n \lambda_n^{\pm 1} z^{\pm n}(1 + \xi_1^{\pm}(n, t)\, z^{-1} + \ldots)\exp\left(\mp \frac{tz}{2}\right). \tag{6}$$

Для этой функции существуют разностные операторы $L = (L^{nm})$ и $A = (A^{nm})$ такие, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = A\psi, \quad L\psi = z\psi. \tag{7}$$

Эти операторы имеют вид

$$L^{nm} = -i\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n,m-1} + v_n\delta_{n,m} + i\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}, \tag{8}$$

$$A^{nm} = \frac{i}{2}\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n,m-1} + w_n\delta_{n,m} + \frac{i}{2}\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}. \tag{9}$$

Здесь $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{2}(v_n - v_{n-1}) - \frac{1}{2}(\ln c_n)^{\cdot}$, причем

$$\sqrt{c_n} = \lambda_{n-1}/\lambda_n, \tag{9$'$}$$

$$v_n = \xi_1^+(n+1, t) - \xi_1^+(n, t). \tag{9$''$}$$

Условие совместности системы (7) совпадает с уравнениями цепочки Тода. Выражая функцию Бейкера — Ахиезера (6) через тэта-функции поверхности R и вычисляя коэффициенты λ_n, $\xi_1^+(n, t)$, получаем явный вид решений цепочки Тода:

$$v_n = \frac{d}{dt} \ln \frac{\theta((n+1)U + tV + z_0)}{\theta(nV + tV + z_0)}, \tag{10}$$

$$c_n = \frac{\theta((n+1)U + Vt + z_0)\,\theta((n-1)U + Vt + z_0)}{\theta^2(nU + Vt + z_0)}. \tag{11}$$

Здесь z_0 — произвольный вектор; векторы $U = (U_j)$, $V = (V_j)$ определяются так:

$$U_j = \int\limits_{P^-}^{P^+} \omega_j \tag{12}$$

($\omega_1, \ldots, \omega_g$ — канонический базис голоморфных дифференциалов на R),

$$2V_j = \oint\limits_{b_j} \Omega_{P^+} + \oint\limits_{b_j} \Omega_{P^-}, \tag{13}$$

где Ω_{P^+}, Ω_{P^-} — нормированные дифференциалы второго рода с двойными полюсами в точках P^+, P^- соответственно.

Периодические с периодом N решения цепочки Тода выделяются в нашей схеме так: риманова поверхность R должна иметь вид

$$w^2 = (P_N(z) + 1)(P_N(z) - 1), \tag{14}$$

где $P_N(z)$ — многочлен. Подчеркнем, что так получаются все периодические решения цепочки Тода.

1. Итак, рассмотрим периодические решения уравнений (1). Ограничение L на пространство собственных функций оператора сдвига на период, т. е. $\psi_{n+N} = w\psi_n$, где ψ_n — l-мерный вектор, является конечномерным линейным оператором. Его матрица имеет вид

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} b_{N-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & wa_{N-1} \\ a_{N-2} & b_{N-2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & b_1 & 1 \\ w^{-1} & 0 & \ldots & 0 & a_0 & b_0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где блочные $l \times l$-элементы равны $b_n = -\dot{g}_n g_n^{-1}$, $a_n = g_n g_{n-1}^{-1}$.

Из представления Лакса следует, что коэффициенты полинома $Q(w, \lambda) = \det(\widetilde{L} - \lambda \cdot 1)$ являются интегралами уравнений (1). Однако, в отличие от абелева случая, они не независимы.

Лемма 1. *Полином $Q(w, \lambda)$ имеет вид*

$$(w - \lambda^N)^l + (w^{-1} - \lambda^N)^l + \sum_{k=1}^{l-1} \left(r_k^+(\lambda)(w - \lambda^N)^k + r_k^-(\lambda)(w^{-1} - \lambda^N)^k\right) - R_0(\lambda) + \sum a_{ij}\lambda^i w^j. \tag{16}$$

Последнее суммирование ведется по парам i, j таким, что $i \geqslant 0$, $i + N\,|\,j\,| \leqslant (N-1)l$. Полиномы $r_k^\pm$ имеют лишь k отличных от нуля коэффициентов:

$$r_k^\pm(\lambda) = \sum_{i=(N-1)(l-k)-k+1}^{(N-1)(l-k)} b_{ki}^\pm \lambda^i.$$

Коэффициенты a_{ij}, $b_{ki}^\pm$ являются полной системой интегралов в инволюции с единственным соотношением

$$R_0(\lambda) + (-\lambda^N)^l = \sum_k r_k^+(\lambda)(-\lambda^N)^k = \sum_k r_k^-(\lambda)(-\lambda^N)^k. \tag{17}$$

Число независимых интегралов равно $Nl^2 - l^2 + 1$.

Ограничения на вид полинома $Q(w, \lambda)$ эквивалентны следующему условию: все корни w уравнения $Q(w, \lambda) = 0$ при больших λ должны разлагаться в лорановские ряды по λ^{-1}, причем половина должна иметь вид $\lambda^N + O(\lambda^{N-1})$, а вторая половина $\lambda^{-N} + O(\lambda^{-N-1})$.

Рассмотрим алгебраическую кривую $\mathscr{R}$, заданную в C^2 уравнением $Q(w, \lambda) = 0$. В общем положении можно считать, что она неособа и что при почти всех λ уравнение $Q(w, \lambda) = 0$ имеет $2l$ различных корней w_j. Тогда каждой точке P кривой $\mathscr{R}$, т. е. $P = (w_j, \lambda)$, отвечает единственный собственный вектор $\varphi_n(t) = (\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^l)^t$, нормированный условием $\varphi_0^l \equiv 1$. Все остальные координаты $\varphi_n(t)$ являются мероморфными функциями на кривой $\mathscr{R}$. Их полюсы лежат в точках $\gamma_i(t)$, в которых обращается в нуль левый верхний главный минор $\tilde{L} - \lambda \cdot 1$ и в которых ранг $(\tilde{L} - \lambda \cdot 1) = Nl - 1$.

Лемма 2. *Число полюсов $\gamma_i(t)$ равно $Nl^2 - l^2 = g + l - 1$, где g — род кривой $\mathscr{R}$.*

Таким образом, каждому набору начальных данных $g_n(0)$ и $\dot{g}_n g_n^{-1}(0)$ сопоставляется кривая $\mathscr{R}$, т. е. полином Q, и набор $Nl^2 - l^2$ точек $\gamma_i(0)$ на ней. Ядром этого отображения являются решения, отличающиеся преобразованием $g_n \to Gg_n$, где G — постоянная матрица.

Рассмотрим задачу восстановления L по указанным данным.

Пусть Q, как в лемме 1; тогда $\mathscr{R}$ компактифицируется на бесконечности по λ точками $P_j^{\pm}$, в которых w имеет полюсы порядка N и нули кратности N соответственно.

Лемма 3. *Для любого набора $Nl^2 - l^2$ точек γ_i общего положения существует единственная вектор-функция $\psi_n(t, P)$:*

1° мероморфная на $\mathscr{R}$ вне $P_j^{\pm}$ с полюсами в γ_i;

2° если сформировать из $\psi_n(t, \lambda_j^{\pm})$, как из столбцов, матрицы $\psi_n^{\pm}(t, \lambda)$, то они имеют вид

$$\psi_n^{\pm}(t, \lambda) = \lambda^{\pm n}\left(\sum \xi_{n,s}^{\mp}(t)\,\lambda^{-s}\right)e^{\mp\lambda t/2}, \qquad \xi_{n,0}^{-} = 1. \tag{18}$$

Здесь $\lambda_j^{\pm}$ — прообразы λ в окрестностях $P_j^{\pm}$.

Лемма 4. *Функция $\psi_n(t)$ удовлетворяет уравнениям*

$$L\psi_n = \lambda\psi_n, \quad (\partial_t - P)\psi_n = 0,$$

где $g_n = \xi_{n,0}^{+}$.

Заметим, что функции $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ отличаются нормировкой $\rho_n(t) = \psi_n(\psi_0^l)^{-1}$.

Следствие. *Матрицы g_n удовлетворяют уравнениям* (1). *В силу ограничений на Q построенные решения периодичны, $g_{n+N} = g_n$.*

Для ψ_n можно построить формулы типа Бейкера — Итса аналогично [15]. Вычисляя по ним $\xi_{n,0}^{\pm}$, получим теорему.

Теорема 1. *Для любого полинома вида* (16) *и любого набора $Nl^2 - l^2$ точек γ_i общего положения функции*

$$g_n(t) = (g_n^-)^{-1} g_n^+ c^n \tag{19}$$

являются периодическими решениями уравнения (1), *где матричные элементы матриц $g_n^{\pm}$ равны*

$$g_{n,ij}^{\pm} = \theta(\omega_j^{\pm} + \vec{U}n + \vec{V}t + \vec{Z}_i)\,\theta^{-1}(\omega_j^{\pm} + \vec{Z}_i). \tag{19'}$$

Постоянные векторы $\vec{U}$, $\vec{V}$ задаются периодами дифференциалов третьего и второго родов с полюсами в точках $P_j^{\pm}$; $\omega_j^{\pm}$ — образы точек $P_j^{\pm}$ при преобразовании Абеля, $\vec{Z}_i$ — образы при преобразовании Абеля дивизоров $\gamma_1, \ldots$

..., γ_{g-1}, γ_{g+i}, $1 \leqslant i \leqslant l$. Константа c определяется из условия периодичности $g_N = g_0$.

Общее решение имеет вид $G_1 g_n G_2$, где G_i — постоянные матрицы.

Замечание. Вычисление всех параметров, входящих в формулы теоремы, по начальным данным $g_n(0)$ и $\dot{g}_n g_n^{-1}(0)$ использует лишь квадратуры и решение алгебраических уравнений, причем последнее необходимо лишь при нахождении $\vec{Z}_i$. Все остальные параметры $\vec{\omega}_j^{\pm}$, U, $\vec{V}$ и т. д. выражаются в квадратурах через интегралы.

2. Рассматривая особые случаи кратных собственных значений операторов L и сдвига на период, ограничимся случаем максимального вырождения кратности l. Тогда полином Q имеет вид $Q(w, \lambda) = Q_1^l(w, \lambda)$, $Q_1 = w + w^{-1} + \sum_{i=0}^{N} a_i \lambda^i$. Каждой точке гиперэллиптической кривой $\mathcal{R}$, заданной уравнением $Q_1(w, \lambda) = 0$, отвечает l-мерное подпространство совместных собственных функций. Пусть $\Psi_n(t, P)$ — матрица, столбцы которой образуют базис в этом подпространстве, нормированный условием $\Psi_0(0, P) = 1$. Тогда Ψ_n — мероморфная матрица, имеющая lN полюсов γ_s, причем

$$\varphi_{n,s}^{ij} = \alpha_s^j \varphi_{n,s}^{il}; \quad \varphi_{n,s}^{ij} = \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^{ij}, \tag{20}$$

α_s^j — константы, не зависящие от n и t. В окрестности $P^{\pm}$ прообразов $\lambda = \infty$ Ψ_n имеет вид

$$\Psi_n^{\pm}(t, \lambda) = \lambda^{\pm n} \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^{\pm}(t) \lambda^{-s} \Big) e^{\mp \lambda t/2}. \tag{21}$$

Лемма 5. *Для любого набора данных (γ_s, α_s^j) (называемых, как и в [14], параметрами Тюрина) общего положения существует и единственна матричная функция Ψ_n, удовлетворяющая условиям (20) и (21), нормированная требованием $\xi_{n,0}^{-} \equiv 1$.*

Так же, как и ранее, доказывается, что $\xi_{n,0}^{+}$ является периодическим решением уравнений (1).

3. В заключение приведем конструкцию периодических решений уравнений

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n}, \tag{22}$$

к которым, как было найдено в [48], приводит двумеризация по Захарову — Шабату пары Лакса для абелевой цепочки Тода. Эти уравнения обобщают, помимо уравнений самой цепочки, и уравнение sin-gordon, соответствующее периодическим решениям $\varphi_{n+2} = \varphi_n$.

Рассмотрим неособую алгебраическую кривую $\mathcal{R}$ рода g с двумя отмеченными точками $P^{\pm}$.

Лемма 6. *Для произвольного набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ общего положения существуют и единственны функции $\psi_n(z_+, z_-, P)$:*

1° мероморфные вне $P^{\pm}$ с полюсами в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$;

2° в окрестности $P^{\pm}$ они представимы в виде

$$\psi_n(z_+, z_-, P^{\pm}) = e^{kz_{\pm}} \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^{\pm}(z_+, z_-) k^{-s} \Big) k^{\pm n};$$

$\xi_{n,0}^{\pm} = 1$, $k^{-1} = k^{-1}(P^{\pm})$ — локальные параметры в окрестностях $P^{\pm}$.

Лемма 7. *Имеют место следующие равенства:*

$$\partial_{z_+} \psi_n = \psi_{n+1} + (\partial_{z_+} \varphi_n) \psi_n, \quad \partial_{z_-} \psi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} \psi_{n-1}; \quad e^{\varphi_n} = \xi_{n,0}^{-}.$$

Условия совместности этих равенств эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-}\varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

совпадающим с (22), *записанным в конусных переменных.*

Теорема 2. *Для каждой неособой комплексной кривой* $\mathscr{R}$ *с двумя отмеченными точками формула*

$$\varphi_n = \ln \frac{\theta(\omega^+ + U_1 t + U_2 x + U_3 n + W)}{\theta(\omega^- + U_1 t + U_2 x + U_3 n + W)} + \ln \frac{\theta(\omega^- + W)}{\theta(\omega^+ + W)} + nc \tag{23}$$

задает решения уравнений (22).

Здесь $\omega^\pm = (\omega_1^\pm, \ldots, \omega_g^\pm)$ — образы $P^\pm$ при отображении Абеля; векторы U_i зависят от точек $P^\pm$ и являются векторами периодов абелевых дифференциалов второго и третьего родов с правильно подобранными особенностями в $P^\pm$ (см., аналогично, [15]).

Выделим среди построенных решений периодические $\varphi_{n+N} = \varphi_n$. Для этого необходимо, чтобы на $\mathscr{R}$ существовала функция $E(P)$, имеющая в $P^\pm$ полюс и нуль соответственно N-порядка.

Пусть $\mathscr{R}$ задано в C^2 уравнением

$$w^N - E^m + E\left(\sum a_{ij}E^i w^j\right) = 0; \tag{24}$$

$N(i+1) + mj \leqslant Nm - 2$; N взаимно просто с m. Эта кривая N-листно накрывает E-плоскость, над $E = 0$ и $E = \infty$ все листы склеиваются, т. е. функция $E(P)$, задаваемая проекцией $\mathscr{R}$, обладает нужными свойствами.

Следствие. *Пусть* $\mathscr{R}$ *вида* (24); *тогда формулы* (23) *дают периодические решения уравнений* (22).

Замечание (Б. А. Дубровин). Методы, развитые в главе 4 настоящего обзора, позволяют, в частности, эффективизировать формулу (23) для решений уравнения (22). Подстановка (23) в (22) дает после простых преобразований следующее соотношение:

$$a\,\frac{\theta(U_3 + W)\,\theta(U_3 - W)}{\theta^2(W)} = b + \partial_{U(P^+)}\partial_{U(P^-)} \ln \theta(W). \tag{25}$$

Здесь W — произвольный g-мерный вектор; для каждой точки $P \in \mathscr{R}$ $U(P)$ — вектор периодов дифференциала с двойным полюсом в точке P ($2U_{1,2} = U(P^+) \pm U(P^-)$); константы a и b имеют вид

$$a = \varepsilon^{-2}(P^+, P^-), \quad b = \frac{d}{dP}\frac{d}{dQ}\ln \varepsilon(P, Q)\,|_{P=P^+,\, Q=P^-} \tag{25'}$$

(величина $\varepsilon(P, Q)$ определена формулой (5.4.27)). Это — хорошо известное тождество в теории абелевых функций (см. [8], формула (39)). Применяя к (25) теорему сложения, получаем следующую систему (в обозначениях главы 4):

$$a\hat{\theta}[n](2U_3) = b\hat{\theta}[n](0) + \partial_{U(P^+)}\partial_{U(P^-)}\hat{\theta}[n](0), \tag{26}$$

где

$$n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g.$$

Здесь $U_3 = A(P^+) - A(P^-)$, поэтому система (26) вместе с системой (4.2.4) позволяет восстановить по матрице периодов не только канонические уравнения кривой $\mathscr{R}$, но и образ отображения Абеля $A\colon \mathscr{R} \to J(\mathscr{R})$ (хотя для этого нужно решать трансцендентное относительно U_3 уравнение (26)).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
[2] Н. Г. Чеботарёв. Теория алгебраических функций.— М.: Гостехиздат, 1948.
[3] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1972.
[4] P. Griffiths, J. Harris. Principles of Algebraic Geometry.— Wiley Intersci. Publ., 1978.
[5] J. Igusa. Theta-functions.— Springer, 1972.
[6] A. Krazer. Lehrbuch der Thetafunktionen.— New York, Chelsea, 1970.
[7] H. F. Baker. Abelian functions.— Cambridge, 1897.
[8] J. Fay. Theta-functions on Riemann surfaces.— Lect. notes in math., 352, Springer, 1973.
[9] Э. И. Зверович. Краевые задачи теории аналитических функций.— УМН, 1971, 26:1, с. 113—181.
[10] В. В. Голубев. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.
[11] А. И. Маркушевич. Введение в классическую теорию абелевых функций.— М.: Наука, 1979.
[12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Том 3.— М.: Наука, 1967.
[13] Теория солитонов. Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
[14] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, 35:6, с. 47—68.
[15] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, 32:6, с. 183—208.
[16] И. М. Кричевер. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функц. анализ, 1977, 11:2, с. 15—32.
[17] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, 31:1, с. 55—136.
[18] Н. И. Ахиезер. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.— ДАН, 1961, 141:2, с. 263—266.
[19] H. F. Baker. Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators» by J. L. Burchnall and T. W. Chaundy. Proc. Royal Soc. London, 1928, A118, p. 584—593.
[20] С. П. Новиков. Периодическая задача Кортевега — де Фриза 1. Функц. анализ, 1974, 8:3, с. 54—66.
[21] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности.— ДАН, 1976, 229:1, с. 15—18.
[22] И. М. Кричевер. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц на прямой.— Функц. анализ, 1980, 14:4.
[23] Б. А. Дубровин. О гипотезе С. П. Новикова в теории тэта-функций и нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили. ДАН, 1980, 251:3, 541—544.
[24] R. Hirota. Recent developments of direct methods in soliton theory.— Preprint of Hiroshima University, 1979.
[25] А. Н. Тюрин. Геометрия дивизора Пуанкаре многообразия Прима.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, 39, с. 1003—1043.
[26] F. Schottky. Über die Moduln der Thetafunktionen.— Acta Math., 1903, 27, S. 235—288.
[27] C. Neumann. De probleme quodam mechanico, quod ad priman integralium ultraellipticorum classem revocatum.— J. reine und angew. Math., 1859, 56, S. 46—63.
[28] J. Moser. Various aspects of integrable hamiltonian systems.— Preprint of Courant Inst., 1978.
[29] А. П. Веселов. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом.— Функц. анализ, 1980, 14:1, с. 48—50.

[30] К. Кирхгоф. Механика.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
[31] А. М. Переломов, Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости.— Функц. анализ, 1981, 15:2.
[32] H. Weber. Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. Math. Ann., 1878, 14, p. 173—206.
[33] F. Kötter. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I, II — J. reine und angew. Math., 1892, 109, S. 51—81, 89—111.
[34] В. А. Стеклов. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков, 1893.
[35] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Периодическая задача для уравнений Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией.— ДАН, 1974, 219:3, с. 19—22.
[36] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— В сб.: Современные проблемы математики, 1980, 15, с. 3—94.
[37] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения: ДАН, 1980, 253:6, с. 1293—1297.
[38] A. Andreotti, A. L. Mayer. On period relations for abelian integrals on algebraic curves.— Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 3. 1967, 21:2, p. 189—238.
[39] H. M. Farkas, H. E. Rauch. Period relations of Schottky type on Riemann surfaces.— Ann. Math., 1970, 92:3, p. 434—461.
[40] R. Garnier. Sur une classe de systemas differentiel abelien deduits theorie des equations lineaires.— Rend. Circ. Matem. Palermo, 1919, 43:4, p. 155—191.
[41] С. В. Манаков. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела.— Функц. анализ, 1976, 10:4, с. 93—94.
[42] Б. А. Дубровин. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия.— Функц. анализ, 1977, 11:4, с. 28—41.
[43] А. М. Переломов. Когерентные состояния и тэта-функции.— Функц. анализ, 1972, 6:4, с. 47—57.
[44] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
[45] Б. А. Дубровин. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановой поверхности.— Функц. анализ, 1981.
[46] И. М. Кричевер. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— УМН, 1976, 33:4, с. 215—216.
[47] D. Mumford, P. van Moerbeke. The spectrum of difference operators and algebraic curves.— Acta Mathem., 1979.
[48] А. В. Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.— Письма ЖЭТФ, 1974, 30, с. 443—448.
[49] И. В. Чередник. Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании».— ДАН, 1980, 252:5, с. 1104—1108.
[50] С. Ленг. Введение в алгебраические и абелевы функции.— М.: Мир. 1976.
[51] О. Форстер. Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.
[52] F. Kötter. Die von Steklow und Liapunow entdeckten intergralen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit.—Sitzungsber. Königlich Preuslischen Akad. Wiss. Berlin, 1900, 6, S. 79—87.
[53] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Периодические и условно периодические аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега де Фриза.— ЖЭТФ, 1974, 67:12, 2131—2143.
[54] Б. А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.— Функц. анализ, 1975, 9:3, 41—51.

[55] P. D. L a x. Periodic solutions of Korteweg — de Vries equation — Comm. Pure and Appl. Math., 1975, **28**, 141—188.

[56] H. P. M c K e a n, P. Van M o e r b e k e. The spectrum of Hill's equation.— Invent Math., 1975, **30**, 217—274.

[57] В. А. М а р ч е н к о, И. В. О с т р о в с к и й. Периодическая задача Кортевега де Фриза.— Матем. сб., 1974, **95**:3, 331—356.

[58] H. P. M c K e a n, E. T r u b o w i t z. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points.— Comm. Pure Appl. Math., 1967, **29**, 143—226.

[59] И. М. К р и ч е в е р. Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений.— ДАН **227**:2, 1976, 291—294.

[60] А. Р. И т с, В. Б. М а т в е е в. Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега—де Фриза.—ТМФ, 1975, **23**:1, с. 51—67.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
30 сентября 1980 г.