Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 4, 1978, 41—52

УДК 513.015.7 + 517.944

ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД РИМАНОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ И УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ (КП). I

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Введение

Уравнение КП впервые рассматривалось в [5] как естественный с физической точки зрения двумерный аналог известного уравнения КдФ при изучении устойчивости солитонов и других решений уравнения КдФ относительно возмущений, поперечных к распространению волны. Степень универсальности физического вывода уравнения КП для волн в средах с дисперсией такая же, как и уравнения КдФ.

Уравнение КП допускает коммутационное представление типа Лакса (см. [3], [4])

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-A,\ \frac{\partial}{\partial y}-L\right]=0\Leftrightarrow\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t}=[A,\widetilde{L}];\quad \widetilde{L}=\frac{\partial}{\partial y}-L, \tag{1}$$

где $L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,y,t)$, $A=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}U+W(x,y,t)$, и имеет вид после исключения $W(x,y,t)$

$$0=\frac{3}{4}\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(6U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^3U}{\partial x^3}\right)\right). \tag{2}$$

Это — частный случай уравнений Захарова — Шабата вида (1). Полной теории этого уравнения не существует. Известен целый ряд серий его конечномерных классов точных решений, обладающих замечательными математическими свойствами (см. [1], [4], [6] — [8]). Однако еще при обсуждении работы [4] С. П. Новиковым и В. Е. Захаровым было высказано предположение, что уравнение КП обладает «алгебро-геометрическими» точными решениями, обобщающими известные конечнозонные или многосолитонные решения уравнения КдФ (см. [2]) и при этом зависящими от некоторого числа произвольных функций одной переменной. Это предположение возникло в связи с тем, что в [4] было найдено частное — в некотором смысле «солитоноподобное» — решение, содержащее функциональный параметр. Нахождению решений, зависящих от произвольных функций, посвящена данная работа. Мы существенно используем здесь технику, развитую И. М. Кричевером в его работе [9] о коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах не взаимно простого порядка.

§ 1. Матричный аналог многопараметрической функции Бейкера — Ахиезера. Стабильные расслоения над римановыми поверхностями

Напомним, что скалярная функция Бейкера — Ахиезера $\psi(\mathbf{x}, P; \mathbf{x}_0)$ определялась на римановой поверхности Γ рода g, $P\in\Gamma$, с отмеченной точкой $P_0=\infty$ и локальным параметром $z=k^{-1}$ около P_0 требованиями:

a) ψ мероморфна на $\Gamma \setminus P_0$, имеет g полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, не зависящих от x;

b) ψ имеет асимптотику $\psi = \exp\left[\sum_{i=1}^{g} k^i(x_i - x_{i0})\right]\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right)$ при $k \to \infty$ или $P \to P_0$ (см. [6], [10]).

Определим матричный (некоммутативный) аналог этой функции. Рассмотрим первоначально матричную $l \times l$ функцию $\Psi_0(\mathrm{x}, k; \mathrm{x}_0)$, где $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_s)$, обладающую следующими свойствами:

1) $\Psi_0(\mathrm{x}_0, k; \mathrm{x}_0) \equiv 1$;

2) матричные функции $A_i = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} \Psi_0^{-1} = A_i(\mathrm{x}, k)$ не зависят от x_0 и являются полиномами по k, они удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = [A_i, A_j]. \tag{3}$$

Следующее утверждение очевидно: если заданы величины $A_i(\mathrm{x}, k)$, удовлетворяющие уравнениям (3), то однозначно определена матричная функция $\Psi_0(\mathrm{x}, k; x_0)$ такая, что $\Psi_0 \equiv 1$ при $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ и $A_i = \Psi_{0\mathrm{x}_i}\Psi_0^{-1}$. Пусть всюду далее $\mathrm{x}_0 = (0, \ldots, 0)$ и $\Psi_0(\mathrm{x}, k; 0) = \Psi_0(\mathrm{x}, k)$. Пусть теперь задана произвольная (неособая) риманова поверхность Γ рода g с отмеченной точкой P_0, обозначаемой часто через $\infty = P_0$. Локальный параметр на Γ около P_0 обозначим через $z = k^{-1}$. Зададим на Γ неупорядоченный набор (γ) различных точек $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg})$ и набор (α) комплексных $(l-1)$-векторов $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{lg}$, где $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,l-1})$.

З а м е ч а н и е. Известна связь такого набора параметров с теорией голоморфных расслоений. Полный набор (γ, α) мы назовем «параметрами А. Н. Тюрина», так как, согласно [11], они определяют стабильное (в смысле Мамфорда) l-мерное векторное голоморфное расслоение степени lg над Γ вместе с «оснащением», т. е. с набором голоморфных сечений $\eta_1, \ldots, \eta_l$, который определен с точностью до умножения на постоянную матрицу A $(\eta_1, \ldots, \eta_l) \to (\eta_1, \ldots, \eta_l) A$. Точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$ — это точки линейной зависимости сечений η_j; в каждой точке γ_i мы имеем

$$\eta_l(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_{i,j}\eta_j(\gamma_i). \tag{4}$$

При $l = 1$ эти параметры сведутся к набору $(\gamma_1, \ldots, \gamma_g) \in S^g\Gamma \approx J(\Gamma)$.

Поставим теперь следующую задачу: найти вектор-функцию (размерности l) $\psi(\mathrm{x}, P)$ на римановой поверхности Γ, мероморфную на ней вне точки $P_0 = \infty$, со следующими свойствами:

1. Полюсы ψ имеют порядок 1, не зависят от x и лежат в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$; требуется, чтобы вычеты $\varphi_{i,j}(\mathrm{x})$ функций ψ_j, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_l)$, в точках γ_i были связаны соотношением

$$\varphi_{i,j}(\mathrm{x}) = \alpha_{i,j}\, \varphi_{i,l}(\mathrm{x}), \tag{5}$$

где $\alpha_{i,j}$ — константы, не зависящие от x.

2. В окрестности точки $P_0 = \infty$ вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(\mathrm{x}, P)$ должна представляться в виде

$$\boldsymbol{\psi}(\mathrm{x}, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Psi_0(\mathrm{x}, k), \tag{6}$$

где $\xi_0 \equiv (1, 0, \ldots, 0)$, $k = k(P)$.

Следуя схеме работы [9], основанной на технике Коппельмана [13] (см. также [14]), мы получаем следующее утверждение: 1) вектор-функция

ψ с требуемыми свойствами, которую в дальнейшем мы будем называть *вектор-функцией Бейкера — Ахиезера*, всегда существует и единственным образом определяется матрицей $\Psi_0(\mathrm{x}, k)$ и параметрами Тюрина (γ, α); 2) нахождение ψ сводится к сингулярному интегральному уравнению типа Мусхелишвили [15] на окружности S^1 (малой окружности на Γ — границе малой окрестности P_0) с ядром типа Коши, которое можно эффективно вычислить, зная риманову поверхность Γ и точку P_0. В гиперэллиптическом случае формулы оказываются наиболее простыми. Интегральное уравнение решается отдельно при каждом x; требование 1) на полюсы и вычеты ψ однозначно выделяет решение и тем самым определяет зависимость ψ от x.

Замечание. Можно построить целую матрицу $\hat{\Psi}(\mathrm{x}, P)$, где ψ это первая строка $\hat{\Psi}_1 = \psi$. Другими строками являются векторы, получаемые аналогично ψ после замены вектора $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0) = e_1$ на вектор $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ для $\hat{\Psi}_i$ в формуле (6). При $P \to P_0$ имеем

$$\hat{\Psi} = \left(\hat{1} + \sum_{s=1}^{\infty} \hat{\xi}_s(\mathrm{x}) k^{-s}\right) \Psi_0(\mathrm{x}, k).$$

Кроме параметров Тюрина (γ, α), произвол нашей конструкции сводится к выбору матрицы Ψ_0 или, что то же самое, к набору матриц $A_i(\mathrm{x}, k)$, полиномиальных по k и удовлетворяющих уравнениям совместности (3). Рассмотрим интересный для нас случай, когда имеется три параметра $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$. Для нас будут важны следующие примеры.

Пример 1. Пусть $l = 2$ и матрицы $A_i(\mathrm{x}, k)$ ищутся в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+u & 0 \end{pmatrix} = \hat{\varkappa} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = u(x, y, t),$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} + \hat{\gamma} = \hat{\varkappa}^2 + \hat{\gamma}, \tag{7}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} + k\hat{p} + \hat{q} = \hat{\varkappa}^3 + k\hat{p} + \hat{q},$$

где u, $\hat{\gamma}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$ зависят априори от x, y, t, $\hat{p}$, $\hat{q}$, γ — матрицы 2×2. Из уравнений совместности (3) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \gamma_{12} = \gamma_{21} = p_{12} = 0, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22}, \quad p_{11} = p_{22}, \\ u = u(x, t), \quad p_{11} = p_{11}(t), \quad p_{21} = p_{21}(x, t), \quad q_{12} = q_{12}(x, t), \\ q_{11, y} = q_{22, y} = \gamma_{11, t}, \ \gamma_{11} = \gamma_{11}(y, t), \quad p_{21, x} = q_{22} - q_{11} = q_{12, x}, \\ (q_{11} + q_{22}) = 0, \quad -q_{11, x} = q_{21} - uq_{12}, \\ u_t - q_{21, x} = u(q_{11} - q_{22}), \quad p_{21} = q_{12} + u. \end{gathered} \tag{8}$$

Из этих соотношений легко выводятся следующие:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} q_{12}, \quad q_{11} = a(x, t) + b(y, t) + c(t),$$
$$q_{22} = -a(x, t) + b(y, t), \qquad 2q_{12, x} = -u_x.$$

Накладывая дополнительные соотношения на Ψ_0, мы можем удалить «несущественные» функциональные параметры: можно считать, что $\hat{\gamma} \equiv 0$, $p_{11} \equiv 0$.

Во всех случаях из уравнений (8) мы получим

$$-q_{12}=\frac{u}{2}+\varphi(t),\quad u_t=q_{21,x}+uq_{12,x}=$$
$$=(uq_{12}-q_{11,x})_x+uq_{12,x}=-\frac{1}{4}(u_{xxx}+6uu_x+\varphi(t)u_x). \tag{9}$$

В частном случае $\varphi(t)\equiv 0$ мы имеем важный вывод: если $\hat{\gamma}=p_{11}=0$, то матрица $\Psi_0(\mathrm{x}, k)$ определяется одной функцией $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению КдФ (Кортевега — де Фриза)

$$u_t=-\frac{1}{4}(6uu_x+u_{xxx}). \tag{10}$$

Функция $u_0(x)=u(x, 0)$ определяет $u(x, t)$. Именно этот частный случай нам потребуется для построения решений уравнения КП, поэтому в дальнейшем будет предполагаться, что $\varphi(t)\equiv 0$.

Пример 2. Пусть $l=3$ и матрицы $A_i(\mathrm{x}, k)$ ищутся в виде

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\k+u&v&0\end{pmatrix}=\hat{\varkappa}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\u&v&0\end{pmatrix},$$
$$A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\k&0&0\\0&k&0\end{pmatrix}+\hat{d}=\hat{\varkappa}^2+\hat{d},\qquad A_3=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\varkappa^3,$$

где $\hat{d}(\mathrm{x})$ — матрица 3×3, $u(\mathrm{x})$ и $v(\mathrm{x})$ — функции, $\mathrm{x}=(x, y, t)$. Из соотношений (3) мы получаем набор уравнений

$$d_{12}=d_{13}=d_{23}=0,\quad d_{11,x}=u-d_{21},\quad d_{12,x}=v-d_{22}+d_{11}=0,$$
$$-d_{21,x}=d_{31},\ d_{22,x}=d_{21}-d_{32},\quad d_{23,x}=d_{33}-d_{22}=0,\ u_y-d_{31,x}= \tag{11}$$
$$=u(d_{11}-d_{33})+vd_{21},\ v_y-d_{32,x}=v(d_{22}-d_{33})-d_{31}=-d_{31},$$
$$-d_{33,x}=u-d_{32}.$$

Из этих уравнений вытекают уравнения

$$d_{32}=u+\frac{v_x}{3},\quad d_{33}-d_{11}=v,\quad d_{31}=-\left(u+\frac{2}{3}v_x\right)_x=-d_{21,x},$$
$$d_{11,x}=-\frac{2}{3}v_x,\quad d_{21}=u+\frac{2}{3}v_x,\quad \operatorname{Tr}\hat{d}=3d_{11}+2v=\varphi(y).$$

Таким образом, мы получаем уравнения

$$u_y=-u_{xx}-\frac{2}{3}v_{xxx}+\frac{2}{3}vv_x,\quad v_y=2u_x+v_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(2u+v_x). \tag{12}$$

Введем функцию $w(x, y)$, где $w_x=v$, $w_y=2u+v_x$. Из уравнений (12) получим

$$3w_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}(-w_{xxx}+2w_x^2). \tag{13}$$

Для $v=w_x$ получаем уравнение Буссинеска:

$$3v_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}(-v_{xxx}+4vv_x). \tag{14}$$

Уравнение (14) вполне интегрируемо методом обратной задачи рассеяния и обладает большим запасом точных решений. Это уравнение имеет порядок два (по y), где y играет роль времени. Мы имеем две произвольные функции $w(x, 0)$, $w_y(x, 0)$, полностью определяющие матрицу Ψ_0, если $\varphi=\operatorname{Tr}\hat{d}=0$.

Итак, в данном случае класс матриц Ψ_0 определяется решениями уравнения (13).

Пример 3. Пусть $l > 3$. Интересный для нас класс матриц $A_i(\mathrm{x}, k)$, где $\mathrm{x} = (x, y, t)$, мы будем искать в виде

$$A_1 = \hat{\varkappa} + \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ u_0, & u_1, & \ldots, & u_{l-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varkappa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ k & 0 & & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$A_2 = \hat{\varkappa}^2 + \hat{\gamma}, \; A_3 = \hat{\varkappa}^3 + \hat{p},$$

где $\hat{\gamma}$, $\hat{p}$ — матрицы $(l \times l)$, функции $u_0, \ldots, u_{l-2}$ зависят от x, y, t. Заметим, что матрица $\hat{\varkappa}$ обладает свойством $\hat{\varkappa}^l = k \cdot \hat{1}$. Для $l > 3$ среди матриц $\hat{\varkappa}^2$ и $\hat{\varkappa}^3$ нет скалярной матрицы (случаи $l = 2, 3$ в этом смысле были особыми). Для построения матрицы Ψ_0 необходимо найти классы решений уравнений совместности (3). Мы рассмотрим это более детально в следующей работе. Здесь мы отметим лишь, что «тривиальный» случай $u_\alpha = \hat{p} = \hat{\gamma} = 0$ приведет нас к нетривиальным решениям уравнения КП, зависящим от конечного числа параметров: римановой поверхности Г, точки $P_0 \in \Gamma$ и параметров Тюрина (γ, α), определяющих голоморфное расслоение над Г.

Замечание. При $l = 1$ имеем $\hat{\varkappa} = k$ и функциональные параметры несущественны. В этом случае мы получаем классическую скалярную функцию Бейкера — Ахиезера; соответствующие решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили см. в [6], [7].

§ 2. Решения уравнений КП

Нас будут интересовать особо те случаи, когда вектор-функция Бейкера — Ахиезера $\psi(\mathrm{x}, P)$ аннулируется линейными операторами в частных производных с коэффициентами, не зависящими от точки римановой поверхности Г. Оказывается, это свойство зависит лишь от выбора матрицы $\Psi_0(\mathrm{x}, k)$ и не зависит от Г, P_0 и параметров (γ, α). По-видимому, наша конструкция при выборе различных классов матриц $A_i = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} \Psi_0^{-1}$ дает возможность найти широкий класс таких матриц Ψ_0, приводящий, вообще говоря, к матричным линейным дифференциальным операторам T_q, $q = 1, \ldots, s$, таким, что $T_q\psi = 0$ (или $T_q\psi = \lambda_q(P)\psi$), $T_q = \sum_{k,\alpha} v_{kq}^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x_k^\alpha}$, $v_{kq}^\alpha(\mathrm{x})$ — матрицы $l \times l$, где $\lambda_q(P)$ — алгебраическая функция точки $P \in \Gamma$.

Задача о нахождении решений уравнения КП требует выделения того случая, когда при $\mathrm{x} = (x, y, t)$ имеются два скалярных оператора T_1, T_2 вида, не зависящего от l и Ψ_0,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial t} - A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{3}{2} U(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} - W(x, y, t), \\ T_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x, y, t) \end{aligned} \tag{16}$$

такие, что $T_1\psi = T_2\psi = 0$. В этом случае из уравнения $[T_1, T_2]\psi = 0$ при всех $P \in \Gamma$ вытекает, что коэффициенты операторов T_1, T_2 удовлетворяют уравнению КП

$$[T_1, T_2] = 0$$

или после исключения W

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(6U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)\right)=0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{x}=(x, y, t)$ *и набор матриц* $A_i(\mathrm{x}, k)$, *полиномиальных по* k *и удовлетворяющих уравнениям* (3), *выбран в виде, указанном в примерах* 1,2,3 *из* § 1. *Тогда вектор-функция Бейкера — Ахиезера* $\psi(\mathrm{x}, P)$, *определенная по «данным обратной задачи»: матрице* $\Psi_0(\mathrm{x}, k)$, *алгебраической кривой* Γ, *точке* $P_0\in\Gamma$ *и параметрам* $(\gamma_1,\ldots, \gamma_{lg}, \alpha_{i,j})$ $(i=1,\ldots, lg, j=1,\ldots, l-1)$, *удовлетворяет уравнениям*

$$T_1\psi=\left[\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-U(x,y,t)\right]\psi=0,$$
$$T_2\psi=\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\frac{3}{2}U\frac{\partial}{\partial x}-W(x,y,t)\right]\psi=0,$$

где $U(x, y, t)$ — *некоторая скалярная функция* x, y, t. *Следовательно, она удовлетворяет уравнению КП*

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(6U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)\right)=0.$$

Следствие 1. a) *При* $l=2$ *каждое стабильное голоморфное расслоение, т. е. набор параметров Тюрина* (γ, α), *над кривой* Γ *с отмеченной точкой* $P_0=\infty$ *вместе с произвольным решением уравнения КдФ* $u(x, t)$ *порождают решение уравнения КП* (см. пример 1 из § 1). b) *При* $l=3$ *каждый набор параметров Тюрина* (γ, α) *над кривой* Γ *с отмеченной точкой* $P_0=\infty$ *и произвольное решение* $w(x, y)$ *уравнения Буссинеска* (14) *порождают решение уравнения КП* (см. пример 2 из § 1).

Доказательство теоремы. Рассмотрим вектор-функцию Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t, P)$ и найдем операторы T_1 и T_2, аннулирующие ψ. По определению в окрестности P_0 с локальным параметром $z=k^{-1}(P)$ вектор-функция ψ имеет вид

$$\psi(\mathrm{x}, P)=\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s(\mathrm{x})\,k^{-1}\right)\Psi_0(\mathrm{x}, k),$$

где $\xi_0=(1, 0, \ldots, 0)$. Для величин $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}, \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ имеем

$$\begin{aligned}
\psi_x\Psi_0^{-1}&=(\xi_0+\xi_1k^{-1})A_1+O(k^{-1}),\\
\psi_y\Psi_0^{-1}&=(\xi_0+\xi_1k^{-1})A_2+O(k^{-1}),\\
\psi_t\Psi_0^{-1}&=(\xi_0+\xi_1k^{-1}+\xi_2k^{-2})A_3+O(k^{-1}),\\
\psi_{xx}\Psi_0^{-1}&=(\xi_0+\xi_1k^{-1})(A_{1x}+A_1^2)+2\xi_{1x}k^{-1}A_1+O(k^{-1}),\\
\psi_{xxx}\Psi_0^{-1}&=(\xi_0+\xi_1k^{-1}+\xi_2k^{-2})(A_1^3+2A_{1x}A_1+A_1A_{1x}+A_{1xx})+\\
&\quad+3\xi_{1x}A_1^2k^{-1}+3\xi_{1xx}k^{-1}A_1+O(k^{-1}).
\end{aligned}\tag{17}$$

Из формул (17) вместе с видом матриц A_i, $i=1, 2, 3$, извлекается прямым вычислением, что разности

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\Psi_0^{-1},\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)\Psi_0^{-1}$$

представляются в виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\Psi_0^{-1}=U\psi\Psi_0^{-1}+O(k^{-1}),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)\Psi_0^{-1}=\left(\frac{3}{2}U\frac{\partial\psi}{\partial x}+W\psi\right)\Psi_0^{-1}+O(k^{-1}),$$

где $U=U(x, y, t)$, $W=W(x, y, t)$ — скалярные функции.

Функции

$$\varphi_1(\mathbf{x}, P) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U\right)\psi, \quad \varphi_2(\mathbf{x}, P) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{3}{2} U \frac{\partial}{\partial x} - W\right)\psi$$

имеют те же полюсы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$, что и ψ; вычеты их компонент φ_j в полюсах связаны соотношением (5) с теми же константами $\alpha_{i,j}$. Асимптотика φ_q ($q = 1, 2$) при $k \to \infty$ имеет вид (6) для $\xi_0 = 0$. Отсюда немедленно следует, что $\varphi_1 \equiv 0$ и $\varphi_2 \equiv 0$, по аналогии с [4]. Тем самым теорема доказана.

Для потенциала $U(x, y, t)$ имеют место формулы:

$$\begin{aligned} l &= 2: \quad U(x, y, t) = -(u + 2\xi_{1x}^{(2)}), \quad \xi_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}), \\ l &= 3: \quad U(x, y, t) = -2\xi_{1x}^{(3)}, \quad \xi_1 = (\xi_{(1)}^1, \xi_1^{(2)}, \xi_1^{(3)}), \\ l &\geqslant 3: \quad U(x, y, t) = -2\xi_{1x}^{(l)}, \quad \xi_1 = (\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(l)}). \end{aligned} \tag{18}$$

Далеко не все параметры — произвольные функции, входящие в матрицу $\Psi_0(\mathbf{x}, k)$, — являются «существенными» в том смысле, что при их изменении потенциал $U(x, y, t)$ изменится. Мы заведомо можем утверждать, что те параметры, которые указаны в следствии 1a) и b), все являются «существенными».

Мы оставим до следующей работы общий вопрос об аналитическом виде наших решений при $l > 1$. Здесь мы рассмотрим простейшие случаи, в которых кривая Γ вырождается в рациональную кривую с особенностями и все может быть вычислено до конца.

Пример 1 (рациональная кривая Γ с набором «двойных» точек и параметром $z = k^{-1}$ около $P_0 = \infty$).

Пусть задан набор точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{Nl}$ и матрица Ψ_0 ищется в виде, не зависящем от функциональных параметров $A_1 = \Psi_{0x}\Psi_0^{-1} = \hat{\varkappa}$, $A_2 = \Psi_{0y}\Psi_0^{-1} = \hat{\varkappa}^2$, $A_3 = \Psi_{0t}\Psi_0^{-1} = \hat{\varkappa}^3$. Вектор-функция Бейкера — Ахиезера ψ ищется в виде

$$\psi = \left(\xi_0 + \sum_{q=1}^{Nl} \mathbf{a}_q(x, y, t)(k - \gamma_q)^{-1}\right)\Psi_0,$$

где $\mathbf{a}_q = (a_{q1}, \ldots, a_{ql})$, $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Эта функция однозначно определяется условиями (5) и равенствами в «двойных» точках:

$$1. \qquad \sum_{i=1}^{l} a_{si}\Psi_0^{ij} = \alpha_{sj}\left(\sum_{i=1}^{l} a_{si}\Psi_0^{il}\right)\Big|_{k=\gamma_s}, \tag{19}$$

$$2. \qquad \psi(x, y, t, \varkappa_{r1}) = \psi(x, y, t, \varkappa_{r2})$$

во всех точках $\varkappa_{11}, \varkappa_{12}, \varkappa_{21}, \varkappa_{22}, \ldots, \varkappa_{N1}, \varkappa_{N2}$ (точки $\varkappa_{r1} \sim \varkappa_{r2}$ «двойные»).

Набор параметров (γ, α) и двойных точек определяет вектор $\psi(x, y, t, P)$. Для потенциала имеем, используя (18), где k заменено на $-k$ в матрице $\hat{\varkappa}$,

$$U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{Nl} a_{jl}\right).$$

В случае $l = 2$ мы получаем

$$\Psi_0(x, y, t, k) = e^{-ky}\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\theta \\ -\sqrt{k}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \sqrt{k}(x + kt).$$

Выбирая вещественные γ, α, $\varkappa$, получим вещественные решения уравнения КП, где $U(x, y, t)$ рационально выражается через коэффициенты матрицы $\Psi_0^{ij}(x, y, t, k)$ в точках $k_m = \{\gamma_q, \varkappa_{r\varepsilon}\}$, т. е. через экспоненты $e^{k_m y}$, $\cos(\sqrt{k_m}(x + k_m t))$, $\sin(\sqrt{k_m}(x + k_m t))$ для всех этих точек k_m.

В простейшем случае $N = 1$, $l = 2$ получаем

$$a_{s1} = -a_{s2}\frac{\Psi_0^{11} - \alpha_s\Psi_0^{12}}{\Psi_0^{21} - \alpha_s\Psi_0^{22}} = \frac{-a_{s2}(\cos\theta_s - \alpha_s/\sqrt{\gamma_s}\sin\theta_s)}{-\sqrt{\gamma_s}\sin\theta_s - \alpha_s\cos\theta_s} = -a_{s2}\lambda_s(x + \gamma_s t),$$

$$s = 1, 2, \quad \theta_s = \sqrt{\gamma_s}(x + \gamma_s t).$$

Если положить $\alpha_s^2 = -\gamma_s$, то будем иметь $\lambda_s = -\alpha_s^{-1} = \mathrm{const}$.

Пусть $\varkappa_{11} = \varkappa_1$ и $\varkappa_{12} = \varkappa_2$. Решим теперь уравнение $\psi(x, \varkappa_1) = \psi(x, \varkappa_2)$. Пусть $\theta_3 = \sqrt{\varkappa_1}(x + \varkappa_1 t)$, $\theta_4 = \sqrt{\varkappa_2}(x + \varkappa_2 t)$,

$$D = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}}\sin\theta_3 \\ -\sqrt{\varkappa_1}\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & -\frac{1}{\sqrt{\varkappa_2}}\sin\theta_4 \\ \sqrt{\varkappa_2}\sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$, $\delta_{ij} = 1/(\varkappa_i - \gamma_j)$, $i, j = 1, 2$. Для потенциала $U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}(a_{12} + a_{22})$ из уравнения $\psi(x, \varkappa_1) = \psi(x, \varkappa_2)$ получаем

$$U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{a_1 e^{-\varkappa y} + c_1 e^{\varkappa y} + b_1(x, t)}{a_2 e^{-\varkappa y} + c_2 e^{\varkappa y} + b_2(x, t)}, \tag{20}$$

где

$$a_1 = \delta_{11} - \delta_{12}, \quad c_1 = \delta_{21} - \delta_{22}, \quad a_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\delta_{11}\delta_{12}, \quad c_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\delta_{21}\delta_{22},$$

$$b_1(x, t) = d_{11}(\delta_{12} - \delta_{11}) + d_{12}(\delta_{21}\lambda_1 - \delta_{11}\lambda_1 + \delta_{12}\lambda_2 - \delta_{22}\lambda_2) + d_{22}(\delta_{22} - \delta_{21});$$

$$b_2(x, t) = d_{11}(\delta_{12}\delta_{21}\lambda_1 - \delta_{22}\delta_{11}\lambda_2) + (d_{21} - \lambda_1\lambda_2 d_{12}) \times (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{22}) + d_{22}(\delta_{22}\delta_{11}\lambda_1 - \delta_{21}\delta_{12}\lambda_2).$$

Числитель и знаменатель выражения (20) для частного решения уравнения КП (под знаком производной) являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами функций $e^{-\varkappa y}$, $e^{\varkappa y}$, $\cos\theta_3\cos\theta_4$, $\sin\theta_3\cos\theta_4$, $\cos\theta_3\sin\theta_4$, $\sin\theta_3\sin\theta_4$, если $\lambda_s = -\alpha_s^{-1}$ и $\alpha_s^2 = -\gamma_s$. Если все λ_s, $\gamma_s < 0$ и $\varkappa_s$ вещественны, то мы имеем вещественные решения с асимптотикой $U(x, y, t) \to 0$, $y \to \pm\infty$. Возможны тригонометрический случай ($\varkappa_s > 0$) и гиперболический ($\varkappa_s < 0$).

Если $\prod_{i, j=1}^{2}\delta_{ij} < 0$, то при фиксированных x_0, t_0 особенность в решении (20) обязательно имеется, и при этом только в одной точке $y^*(x_0, t_0)$. В тригонометрическом случае ($\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$) мы имеем всегда $\prod_{i, j=1}^{2}\delta_{ij} > 0$. Наличие особенности при данных x, t зависит от разрешимости уравнения $4a_2c_2 \leqslant b_2^2(x, t)$ при дополнительном условии $b_2(x, t)/c_2 < 0$, где $a_2c_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\prod_{i, j=1}^{2}\delta_{ij} > 0$. Можно показать, что в тригонометрическом случае для этих частных решений особенности всегда возникают, находясь при этом в области $|y| < \mathrm{const}$, равномерно ограниченной при всех x и t.

Пример 2 (рациональная кривая Γ с более сложными вырождениями). Пусть задан опять набор точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{Nl}$ и часть пар точек $\varkappa_{i1}$

и $\varkappa_{i2}$ слились: $\varkappa_{i1} \to \varkappa_{i2}$, $i = i_1, \ldots, i_p$. Функцию ψ мы ищем в виде

$$\psi(x, y, t, k) = \left(\xi_0 + \sum_{q=1}^{Nl} a_q(x, y, t)(k-\gamma_q)^{-1}\right)\Psi_0(x, y, t, k).$$

$1 = 1'$.

$$\sum_{i=1}^{l} a_{si}\Psi_0^{ij} = \alpha_{sj}\left(\sum_{i=1}^{l} a_{si}\Psi_0^{il}\right)\Big|_{k=\gamma_q}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l-1,\ 1 \leqslant q \leqslant Nl.$$

$2 \to 2'$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial k}\Big|_{k=\varkappa_{i1}=\varkappa_{i2}} = 0, \qquad i = i_1, \ldots, i_p,$$

$$\psi(x, y, t, \varkappa_{i1}) = \psi(x, y, t, \varkappa_{i2}), \qquad i \neq i_1, \ldots, i_p.$$

Опять мы имеем решение $U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{Nl} a_{jl}\right)$.

В простейшем случае $N = 1$, $l = 2$, $p = 1$, $\varkappa_{11} = \varkappa_{12} = \varkappa$ мы получим рациональное по x, y, t решение уравнения КП, если $\varkappa = 0$, $\alpha_s^2 = -\gamma_s$, $a_{s1} = -a_{s2}\lambda_s$, где $\lambda_s = -\alpha_s^{-1}$, как и в примере 1. Уравнение $2'$ приобретет вид

$$-\frac{\mathbf{a}_1}{\gamma_1^2} - \frac{\mathbf{a}_2}{\gamma_2^2} = \left(\xi_0 - \frac{\mathbf{a}_1}{\gamma_1} - \frac{\mathbf{a}_2}{\gamma_2}\right)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial k}\Psi_0^{-1}\right)_{k=0} =$$

$$= \left(\xi_0 - \frac{\mathbf{a}_1}{\gamma_1} - \frac{\mathbf{a}_2}{\gamma_2}\right)\begin{pmatrix} y - \frac{x^2}{2} & t - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{12} \\ -\frac{1+x}{2} & y - \frac{x}{2} - x^2 \end{pmatrix},$$

где $-\gamma_s = \lambda_s^{-2}$, $\mathbf{a}_s = (-\lambda_s a_{s1}, a_{s2})$, $\xi_0 = (1,0)$,

$$U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}(a_{12} + a_{22}).$$

Это рациональное решение не убывает при $x \to \infty$, $y = y_0$, $t = t_0$ и поэтому не содержится среди известных рациональных решений (см. обзор [10], [8]).

У т в е р ж д е н и е. Рациональные решения получаются при всех $N \geqslant 1$, если накладывать вместо условия $2'$ условие $2''$ в точке $\varkappa = 0$.

$$2''. \qquad \frac{d\psi}{dk} = 0, \ldots, \frac{d^N\psi}{dk^N} = 0.$$

Г и п о т е з а. 1) Эти решения исчерпывают все рациональные решения уравнения КП, не убывающие при $x \to \infty$. 2) При всех четных N среди этих решений имеются решения без особенностей.

§ 3. Многопараметрические вариации оснащенных расслоений. Решения уравнения КП рода $g = 1$, $l = 2$

В случае $l = 1$ для уравнения КдФ была известна роль динамических систем по x и t на параметры $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, через которые просто выражался конечнозонный потенциал $u(x, t)$ (см. [2], гл. II, §§3,4). Однако в случае $l = 1$ использование этих уравнений можно было элиминировать, опираясь на явные формулы для скалярной функции Бейкера — Ахиезера, через θ-функцию Римана (см. [2], [10]). В данной работе видно, что при $l > 1$ ситуация резко усложняется: вычисление вектор-функции Бейкера — Ахиезера $\psi(\mathrm{x}, P)$ не доводится до конца, а сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений на окружности, следуя методу [9] (см. § 1). Вместе с тем для наших целей нет нужды знать весь вектор $\psi(\mathrm{x}, P)$, достаточно знать лишь один коэффициент разложения величины $\psi\Psi_0^{-1}$ в точке P_0, через который выражается функция $U(x, y, t)$ (см. формулы 18)). Надеясь на большую эффективность ответа для $U(x, y, t)$, мы обратимся здесь к вычислению x, y, t — динамики параметров Тюрина (γ, α) модулей голоморфных оснащенных расслоений, обобщающей на $l > 1$ уравнения Дубровина на параметры $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ для $l = 1$ в теории КдФ.

Рассмотрим вектор-функцию Бейкера — Ахиезера $\psi(\mathrm{x}, P)$, определенную по следующим данным: алгебраической кривой Γ рода g, набору параметров Тюрина $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{lg})$, отмеченной точке $P_0 = \infty \in \Gamma$ и «затравочной» матричной функции $\Psi_0(\mathrm{x}, k)$ (см. § 1), $\mathrm{x} = (x, y, t)$.

Обозначим через Ψ матрицу Вронского вектора ψ. Имеют место следующие элементарные свойства матрицы Вронского:

a) $\Psi_x\Psi^{-1}$ — рациональная матричная функция точки $P_0 \in \Gamma$, имеющая вид

$$\Psi_x\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_l \end{pmatrix} = \hat{\chi}(x, P)$$

(т. е. скалярные функции χ_α рациональны);

b) при $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 = \mathbf{0}$ полюсы матрицы $\Psi_x\Psi^{-1} = \overline{\chi}(\mathbf{0}, P)$ совпадают с $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$, а отношения вычетов функций χ_j в точках γ_i совпадают с параметрами $\alpha_{i,j}$: $\alpha_{i,j} = \chi_j\chi_l^{-1}|_{P=\gamma_i}$.

Определение. Зависимость от x полюсов матрицы $\hat{\chi}$ и отношений вычетов функций χ_j в этих полюсах называется x-*динамикой* параметров Тюрина (γ, α).

Рассмотрим вектор-функцию Бейкера — Ахиезера, соответствующую выбору матриц A_i в виде $A_i = \varkappa^i$, $i = 1, \ldots, l(g+1) - 1 = N$. Она определяет многопараметрическую вариацию параметров Тюрина. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Существует коммутативная $l(g+1) - 1$-мерная группа преобразований пространства модулей оснащенных l-мерных векторных голоморфных расслоений степени lg над неособой алгебраической кривой рода g. Ее генераторы задаются мероморфными векторными полями.*

Заметим, что это пространство модулей l^2g-мерно. Для $l = 1$ оно совпадало с тором Якоби $J(\Gamma)$, который сам и являлся этой группой. При $l > 1$ все пространство модулей уже не является группой. На этом пространстве действует группа $\mathrm{GL}(l, \mathbf{C})$, переставляющая оснащение. Важно отметить, что действие построенной нами группы размерности $l(g+1) - 1$ не коммутирует с действием $\mathrm{GL}(l, \mathbf{C})$ и тем самым не определено на пространстве модулей расслоений без оснащений.

Заметим, что для одной переменной x эта динамика обсуждалась в [9] (§ 3), и там был найден алгоритм вычисления правых частей уравнений $\gamma_{ix} = \ldots$, $\alpha_{ix} = \ldots$ В этой работе мы получим для рода $g = 1$ и $l = 2$ своеобразный аналог «тождества следов», связывающий γ, α с интересующим нас потенциалом $U(x, y, t)$, позволяющий замкнуть уравнения (x, y, t)-динамики параметров γ, α. Следует отметить, что явного выражения $U(x, y, t)$ через $\gamma_i(\mathrm{x})$, $\alpha_i(\mathrm{x})$ и $u(x, t)$ пока не получено.

Для матрицы Вронского $\Psi(\mathrm{x}, P)$, вектор-функции Бейкера — Ахиезера $\psi(\mathrm{x}, P)$, введенной для построения решений уравнений КП для $l = 2$ (см. теорему 1 из § 2 и пример 1 из § 1), мы получим

$$B_1 = \Psi_x\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-U & 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \qquad U = -u - 2\xi_{1x}^{(2)},$$

$$B_2 = \Psi_y\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ v_1 & k \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \qquad v_1 = \xi_{1y}^{(2)}. \tag{21}$$

$$B_3 = \Psi_t\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1 & k + \frac{U}{2} \\ k^2 - \frac{Uk}{2} + \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix} + O(k^{-1}).$$

Методом [9] мы из формул (21) извлекаем уравнения для γ_1, γ_2, α_1, α_2

$$\begin{cases} \gamma_{ix} = (-1)^i(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}, \\ \alpha_{ix} = \alpha_i^2 - U + (-1)^i(\zeta(\gamma_2 - \gamma_1) + \zeta(P_0 - \gamma_2) - \zeta(P_0 - \gamma_1)), \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \gamma_{iy} = 1, \\ -\alpha_{iy} = -v_1, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \gamma_{it} = (-1)^i\left(\alpha_1\alpha_2 + \frac{U}{2}\right)(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}, \\ \alpha_{it} = \alpha_i(\omega_4 - \omega_1) + \frac{\alpha_i^2 U}{2} - \omega_3 - \wp(P_0 - \gamma_i) + \\ \qquad + (-1)^i\left(\alpha_i^2 + \frac{U}{2}\right)(\zeta(\gamma_1 - \gamma_2) + \zeta(P_0 - \gamma_1) - \zeta(P_0 - \gamma_2)). \end{cases} \tag{24}$$

Здесь по определению $\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z)$, где $\wp$ — функция Вейерштрасса (см. [12]).

В работе [9] с одним параметром x можно было считать $U(x, 0, 0)$ произвольной функцией от x, что заменяло функциональный параметр $u(x)$ в матрице $A_1 = \Psi_{0x}\Psi_0^{-1}$. В нашем случае необходимо вычислить именно U как функцию γ, α и коэффициента $u(x, t)$ матрицы $\Psi_{0x}\Psi_0^{-1} = A_1$. Для этого мы используем коммутирование потоков (22) — (24) по переменным x, y, t. Из совместности (22), (23) по переменным x, y получаем

$$B_{2x} - B_{1y} = [B_1, B_2] \Rightarrow v_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(\wp(P_0 - \gamma_1) - \wp(P_0 - \gamma_2)), \tag{25}$$

$$U_y = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)_y \text{ или } U = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + u_0(x, t). \tag{26}$$

Используя совместность потоков по парам переменных x, t и y, t, мы получим связь $u_0(x, t)$ и $u(x, t)$, где $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ

$$u_t = -\frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$$

(см. пример 1 из § 1). Вид уравнения на u_0 типа КдФ ввиду громоздкости формул мы здесь не приводим.

Остальные параметры, входящие в уравнения (24), приобретут вид

$$\omega_4 - \omega_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}[\wp(P_0 - \gamma_1) - \wp_2(P_0 - \gamma_2)] + \frac{U'}{2}, \tag{27}$$

$$\omega_3 = Z_2 - \frac{U^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - 2Z_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}Z_2 + \frac{U''}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}(2\wp'(\gamma_1 - \gamma_2) - \wp'(P_0 - \gamma_1) - \wp'(P_0 - \gamma_2)\right], \tag{28}$$

где $Z_1 = \zeta(\gamma_1 - \gamma_2) + \zeta(P_0 - \gamma_1) - \zeta(P_0 - \gamma_2)$, $Z_2 = \wp(P_0 - \gamma_1) - \wp(P_0 - \gamma_2)$. Если функциональный параметр $u_0(x, t)$ обращается в нуль, то уравнения (22) — (24) станут автономной системой на параметры Тюрина $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$. Во всех случаях, подставляя (25) — (28) в уравнения (22) — (24), мы получим набор коммутирующих потоков по всем переменным для x, y, t, где в правые части явно входит $u_0(x, t)$.

Вывод. Каждое решение уравнений (22) — (24), из которых исключены $U, v_1, \omega_1 - \omega_4, \omega_3$, в силу формул (25) — (28) порождает решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Тем самым элиминировано использование сингулярных интегральных уравнений для $g = 1$, $l = 2$. В принципе эта процедура автоматически обобщается на все $l \geqslant 2$, $g \geqslant 1$, хотя формулы становятся громоздкими.

Московский энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Институт теоретической физики
АН СССР им. Л. Д. Ландау

Поступила в редакцию
22 марта 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bordag L. A., Its A. R., Matveev V. B., Manacov S. V., Zakharov V. E., Two-dimension solitons of Kodomtzev — Petviashvily equations, preprint, KMU, 1977.
2. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **XXXI**, вып. 1 (1976), 55—136.
3. Дрюма В. С., Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ **19**, № 12 (1973), 219—225.
4. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I, Функц. анализ **8**, вып. 3 (1974), 43—53.
5. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И., Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН СССР **192**, № 4 (1970), 753—756.
6. Кричевер И. М., Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, ДАН СССР **227**, № 2 (1976), 291—294.
7. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 15—31.
8. Кричевер И. М., О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемых системах n частиц на прямой, Функц. анализ **12**, вып. 1 (1978), 76—78.
9. Кричевер И. М., Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов, Функц. анализ **12**, вып. 3 (1978), 20—31.
10. Кричевер И. М., Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН **XXXII**, вып. 6 (1977), 183—208.
11. Тюрин А. Н., Классификация векторных расслоений над алгебраическими кривыми, Изв. АН СССР, серия матем. **29** (1965), 658—680.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.
13. Koppelman W., Singular integral equations, boundary value problem and Rieman — Rocht theorem, J. Math. and Mech. **10**, № 2 (1961), 247—277.
14. Родин Ю. Л., Краевая задача Римана для дифференциалов на римановых поверхностях, Ученые записки Пермск. ун-та **17**, вып. 2 (1960), 83—85.
15. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.