СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 40, № 4, 1976

УДК 513.83

И. М. КРИЧЕВЕР

ПРЕПЯТСТВИЯ К СУЩЕСТВОВАНИЮ S^1-ДЕЙСТВИЙ. БОРДИЗМЫ РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫВАЮЩИХ

Настоящая работа состоит из двух, на первый взгляд, совершенно разнородных частей, которые тем не менее объединяет единый подход. В первой части получают дальнейшее развитие результаты работы [1], в которой по каждому роду Хирцебруха $h: U_* \to Q$ был построен его эквивариантный аналог — гомоморфизм $h^G: U^G_* \to K(BG) \otimes Q$ из кольца бордизмов многообразий с действиями компактной группы Ли G в рациональный K-функтор универсального классифицирующего пространства BG. Исследование «эквивариантных родов Хирцебруха» позволило выразить значение рода h на классе бордизмов G-многообразия через инварианты его неподвижных подмногообразий. При этом громоздкие и малоэффективные формулы в общем случае оказались чрезвычайно простыми для симметрического аналога классического рода T_y-двухпараметрического рода $T_{x,y}$, значение которого на классе бордизмов комплексного проективного пространства CP^n равно $\sum\limits_{i=0}^{n} x^i y^{n-i}$. (Отметим, что это определение $T_{x,y}$-рода отличается от данного в [1] заменой y на $-y$.)

В настоящей работе для родов Хирцебруха A_k, $k=2, 3, \ldots$, задаваемых рядами $\dfrac{kte^t}{e^{kt}-1}$, доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.2. *Если действие компактной связной группы Ли G на многообразии X, первый класс Чженя касательного пучка которого $c_1(X) \in H^2(X, Z)$ делится на k, нетривиально, то*

$$A_k^G([X, G]) = 0;$$

в частности, $A_k([X]) = 0$.

Доказательство этой теоремы, как и результатов работы [1], основано на соображениях аналитичности функций, связанных с эквивариантными родами. Чтобы пояснить основную идею, рассмотрим S^1-многообразие X с изолированными неподвижными точками x_s. Пусть представление S^1 в слое касательного пучка над x_s есть $\sum\limits_{i=1}^{n} \eta^{l_{si}}$, где

η^j — j-ая степень стандартного одномерного представления S^1, тогда $A_k^{S^1}([X, S^1]) \in K(CP^\infty) \otimes Q = Q[[\eta - 1]]$ совпадает с разложением в лорановский ряд в проколотой окрестности 1 рациональной функции

$$\mathfrak{A}(\eta) = \sum_s \prod_{i=1}^n \frac{k\eta^{j_{si}}}{\eta^{kj_{si}} - 1}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}(\eta)$ не имеет полюса в 1. Оказывается, что если $c_1(X)$ делится на k, то $\mathfrak{A}(\eta)$ аналитична во всех корнях из 1, а значит, и всюду. Поскольку $\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}(\infty) = 0$, то $\mathfrak{A}(\eta) \equiv 0$ и, в частности, $A_k([X]) = 0$.

Как известно, алгебраическое многообразие X, заданное в CP^n системой однородных полиномов $P_{m_i}(x_0, \ldots, x_n)$, однозначно с точностью до диффеоморфизма определяется лишь их степенями m_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. В § 3 получены явные формулы, восстанавливающие класс бордизмов X по числам m_i [см. также (2)], а следовательно, и его мультипликативные роды. В сочетании с теоремой 2.2 эти формулы доказывают следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. *Если коэффициент при $(t-1)^n$ в разложении по степеням $t-1$ функции $t^{-2} \prod_{i=1}^{s} (t^{m_i} - 1)$ не равен нулю, то на многообразии X не существует нетривиального действия группы S^1.*

Развиваемые методы позволяют в § 4 перейти ко второй части настоящей работы и решить задачу о восстановлении класса бордизмов разветвленной накрывающей. Более точно: проекция $p: Y \to X$ разветвленной n-листной накрывающей многообразия X с ветвлением вдоль подмногообразия F определяет класс бордизмов $[Y, p] \in U_*(X) \otimes Q$. Если $v \in U^2(X)$ — класс кобордизмов, двойственный к F в X, то справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. *Класс кобордизмов, двойственный $[Y, p]$, равен*

$$\frac{v}{g^{-1}(n^{-1}g(v))} \in U^0(X) \otimes Q,$$

где

$$g(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{[CP^n]}{n+1} t^{n+1}.$$

Простым следствием этой теоремы являются формулы для родов разветвленной накрывающей и, в частности, известная сигнатурная формула Хирцебруха (3).

Следует отметить, что, хотя большая часть результатов практически без изменений переносится на другие теории, мы для определенности всюду, где не оговорено противное, подразумеваем, что многообразия, действия групп на них, пучки унитарны.

§ 1. Основные определения и необходимые сведения

Как уже говорилось выше, в настоящей работе продолжены исследования, начатые в работе (1). Чтобы сделать изложение результатов по возможности замкнутым, в этом параграфе собраны все необходимые сведения, содержащиеся в (1).

1. Два набора G-пучков $\Xi^{(1)}=\{\xi_i^{(1)}\}$ и $\Xi^{(2)}=\{\xi_i^{(2)}\}$, $1\leqslant i\leqslant r$, над G-многообразиями X_1 и X_2 называются бордантными, если найдется такой набор G-пучков $Z=\{\zeta_j\}$ над G-многообразием W, край которого изоморфен $X_1\cup -X_2$, что ограничение ζ_i на $X^{(i)}$, $j=0, 1$, изоморфно $\xi_i^{(j)}$. Обычным образом несвязное объединение наборов G-пучков превращает множество классов бордантных наборов, вещественная размерность базы которых равна n, а $\dim_{\mathbf{C}}\xi_i=\mu_i$, в группу $U_{n,\mu}^G$, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. Подгруппы $U_{n,0}^G$ естественно отождествляются с группами бордизмов G-многообразий.

Основными инвариантами набора G-пучков служат значения на его классе бордизмов «эквивариантных характеристических гомоморфизмов»

$$\chi^G : U_{n,\mu}^G\to U^{-n+k}(BG),$$

определяемых по каждому характеристическому классу в кобордизмах наборов векторных пучков $\chi\in U^k\left(\prod_{i=1}^r BU(\mu_i)\right)$.

Обозначим для каждого G-пространства X через X_G пространство $(X\times EG)/G$. Аналогично определим для G-пучка ξ над X векторный пучок ξ_G над X_G. Тогда набору G-пучков Ξ будет соответствовать набор пучков Ξ_G над X_G. Значение гомоморфизма χ^G на классе бордизмов $[\Xi]\in U_{n,\mu}^G$ дается формулой

$$\chi^G(\Xi)=p_!(\chi(\Xi_G)),$$

где $p_! : U^*(X_G)\to U^{*-n}(BG)$ — гомоморфизм Гизина, индуцированный проекцией $p: X_G\to BG$. В дальнейшем гомоморфизм $U_*^G\to U^{-*}(BG)$, отвечающий характеристическому классу $1\in U^0$, будет обозначаться через χ_0^G.

Рассмотрим произвольное G-многообразие X. Как известно [см. (4)], существует его эквивариантное вложение в некоторый G-модуль $\tilde{\Delta}$. Обозначим через Δ максимальное прямое слагаемое $\tilde{\Delta}$, ограничение которого на нормальный делитель H группы G не содержит тривиальных слагаемых.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть набор G-пучков Ξ_s получен ограничением на F_s—G-подмногообразие X, неподвижное относительно действия H, набора G-пучков Ξ, тогда*

$$e(\Delta_G)\chi^G(\Xi)=\sum_s p_{s!}[e((-\nu_s)_G)\chi(\Xi_{sG})],$$

где $p_{s!}$ *— гомоморфизм Гизина, индуцированный проекцией* $p_s: F_{sG}\to BG$; $(-\nu_s)$ *— G-пучок над* F_s, *сумма которого с нормальным G-пучком* ν_s *к* F_s *в* X *равна G-пучку* $\Delta\times F_s\to F_s$; $e(\quad)$ *— эйлеров класс пучка.*

Чтобы разрешить уравнение на $\chi^G(\Xi)$, которое дает теорема 1.1 в случае, когда H совпадает с G, а это будет подразумеваться до конца настоящего параграфа, введем кольцо $U^*(BG)_{\mathscr{E}}$ — локализацию кольца $U^*(BG)$ по мультипликативному множеству $\mathscr{E}$ эйлеровых классов пучков, ассоциированных с представлениями G Δ, не имеющими тривиальных слагаемых.

Обозначим через $\overline{\chi}^G$ композицию гомоморфизмов

$$U^G_{*,*}\xrightarrow{\chi^G}U^*(BG)\to U^*(BG)_{\mathscr{E}}.$$

По теореме 1.1

$$\overline{\chi}^G(\Xi)=\sum_s\frac{1}{e(\Delta)}p_{s!}[e((-\nu_s)_G)\,\chi(\Xi_{sG})].$$

Поскольку $\nu_s+(-\nu_s)$ есть G-пучок $\Delta\times F_s\to F_s$, то

$$p_s^*(e(\Delta_G))=e((\nu_s+(-\nu_s))_G)=e(\nu_{sG})\,e((-\nu_s)_G).$$

Следовательно,

$$\overline{\chi}^G(\Xi)=\sum_s p_{s!}\left(\frac{\chi(\Xi_{sG})}{e(\nu_{sG})}\right). \tag{1.1}$$

Для того чтобы придать корректный смысл каждому слагаемому правой части этого равенства, покажем, что для G-пучка ζ над тривиальным G-многообразием F, не имеющим тривиальных слагаемых в представлении группы G в слое, и для любого класса кобордизмов $x\in U^*(F\times BG)$ формула

$$p_!\left(\frac{x}{e(\zeta_G)}\right) \tag{1.2}$$

определяет класс, принадлежащий $U^*(BG)_{\mathscr{E}}$.

Как известно, для G-пучка ζ имеет место разложение: $\zeta=\bigoplus_j \mathrm{Hom}_G(\Delta_j,\zeta)\otimes\Delta_j$, где суммирование ведется по множеству нетривиальных неприводимых представлений G Δ_j. Пусть $\varkappa_j=\mathrm{Hom}_G(\Delta_j,\zeta)$, тогда $e(\zeta_G)=\prod_j e(\varkappa_j\otimes\Delta_{jG})$.

Найдем $e(\varkappa\otimes\Delta_G)$ для произвольного пучка $\varkappa$ над F и представления G Δ:

$$e(\varkappa\otimes\Delta_G)=\prod_{m,l}\left(\lambda_m+\rho_l+\sum_{i,j>1}\alpha_{ij}\lambda_m^i\rho_l^j\right),$$

где λ_m, ρ_l — образующие Ву пучков $\varkappa\otimes 1$ и $1\otimes\Delta_G=p^*(\Delta_G)$ соответственно; $f(u,v)=u+v+\sum_{\ ,>1}\alpha_{ij}u^iv^j$ — формальная группа «геометрических кобордизмов». Напомним, что каждому однородному симметрическому полиному P_ω степени n от переменных Ву пучка соответствует характеристический класс степени n. Таким образом,

$$e(\varkappa \otimes \Delta_G) = p^*(e(\Delta_G)) + \sum_{\omega, \omega'} \beta_{\omega\omega'} P_\omega(\ldots, \lambda_m, \ldots) P_{\omega'}(\ldots, \rho_l, \ldots).$$

Обозначим через $\sigma(\varkappa, \Delta)$ сумму, стоящую в правой части равенства. Важно отметить, что степени всех характеристических классов $P_\omega(\ldots, \lambda_m, \ldots)$ больше нуля. Поэтому ряд

$$\frac{1}{e(\varkappa \otimes \Delta_G)} = \frac{1}{p^*(e(\Delta_G))} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\sigma(\varkappa, \Delta)}{p^*(e(\Delta_G))} \right)^i \right]$$

содержит лишь конечное число слагаемых отличных от нуля. Отсюда уже очевидна корректность выражения (1.2).

2. Рассмотрим категорию пар, состоящих из G-пучка ζ_0 над тривиальным G-многообразием, представление G в слое которого не имеет тривиальных слагаемых, и набора G-пучков $Z = \{\zeta_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, над той же базой. Группы бордизмов в этой категории обозначим через $R^G_{n,\mu}$, где n — вещественная размерность пространства пучка ζ_0, а $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$, $\mu_i = \dim_{\mathbf{C}} \zeta_i$.

В обозначениях предшествующего пункта для каждого неподвижного подмногообразия F_s G-многообразия X пара (ν_s, Ξ_s) задает класс бордизмов, принадлежащий $R^G_{*,*}$. Сумма их определяет образ $[\Xi] \in U^G_{*,*}$ при гомоморфизме дважды градуированных колец

$$\beta^G : U^G_{*,*} \to R^G_{*,*}.$$

Равенство (1.1) приводит теперь к следствию:

Следствие. *Для каждого характеристического класса* $\chi \in U^k \left(\prod_{i=1}^{r} BU(\mu_i) \right)$ *гомоморфизм*

$$X^G : R^G_{**} \to U^*(BG)_{\mathscr{G}},$$

заданный для пары (ζ_0, Z) *формулой*

$$X^G(\zeta_0, Z) = p_1 \left(\frac{\chi(Z_G)}{e(\zeta_{0G})} \right),$$

удовлетворяет равенству $\bar{\chi}^G = X^G \circ \beta^G$.

Для группы S^1 все неприводимые представления η^j, $j = 0, \pm 1, \ldots,$ получаются возведением в j-ую тензорную степень стандартного одномерного представления η. При этом

$$e((\eta^m)_{S^1}) = g^{-1}(mg(u)) = [u]_m \in U^*(CP^\infty),$$

где $g(u)$ — логарифм формальной группы «геометрических кобордизмов», есть $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[CP^n]}{n+1}u^{n+1}$. Кольцо $U^*(CP^\infty)_{\mathscr{C}}$ изоморфно кольцу $U^*[[u]]\otimes Q[u^{-1}]$.

Пусть пучки ζ_0, ζ_i разложены в суммы

$$\zeta_0=\sum_l \varkappa_{j_l}\otimes\eta^{j_l},\qquad \zeta_i=\sum_m{}' \varkappa_{j_{mi}}\otimes\eta^{j_{mi}}.$$

Обозначим через $\lambda^s_{j_l}$ и $\lambda^t_{j_{mi}}$ образующие Ву пучков $\varkappa_{j_l}$ и $\varkappa_{j_{mi}}$ соответственно. Тогда если характеристический класс χ задан произведением симметрических полиномов $P_i(x_1,\ldots,x_{\mu_i})$, то имеет место

ЛЕММА 1.1. *Значение гомоморфизма X^G на классе бордизмов пары (ζ_0, Z) равно*

$$p_1\left(\frac{\prod_i P_i(\ldots,f([u]_{j_{mi}},\lambda^t_{j_{mi}}),\ldots)}{\prod_{l,s} f([u]_{j_l},\lambda^s_{j_l})}\right).$$

3. Остановимся на функториальных свойствах гомоморфизмов χ^G относительно гомоморфизмов групп $\alpha: G_1\to G$. Каждый G-пучок с помощью α естественно превращается в G_1-пучок. Такое превращение определяет гомоморфизм переноса:

$$\alpha^{\#}: U^G_{*,*}\to U^{G_1}_{*,*}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого характеристического класса χ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} U^G_{*,*} & \xrightarrow{\chi^G} & U^*(BG)\\ {\scriptstyle\alpha^{\#}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*}\\ U^{G_1}_{*,*} & \xrightarrow{\chi^{G_1}} & U^*(BG_1)\end{array}$$

коммутативна.

4. Каждому роду Хирцебруха, т. е. гомоморфизму $h: U_*\to Q$ по теореме Дольда ([5]) соответствует гомоморфизм функторов $\tilde h: U^*(\ )\to\to K(\ )\otimes Q$ такой, что h совпадает с композицией $U_*\cong U^*\xrightarrow{\tilde h}Q$.

ЛЕММА 1.2. *Значение гомоморфизма $\tilde h$ на образующей $u\in U^2(CP^\infty)$ равно*

$$\tilde h(u)=g_h^{-1}(\ln\eta)\in Q[[\eta-1]]=K(CP^\infty)\otimes Q,$$

где g_h^{-1} — ряд, функционально обратный ряду $g_h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h([CP^n])}{n+1}t^{n+1}$.

Определение. Эквивариантным родом Хирцебруха, соответствующим рациональному роду $h: U_*\to Q$, будет называться гомоморфизм

$$h^G=\tilde h\circ\chi^G_0: U^G_{ev}\to K(BG)\otimes Q.$$

Для тривиальной группы $\{e\}$, состоящей из одной единицы, $h^{\{e\}}$ ставит в соответствие G-многообразию X число $h([X])$, поэтому по теореме 1.2 мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 1.3. *Значение рода h на классе бордизмов G-многообразия X равно $\varepsilon(h^G([X, G]))$, где $\varepsilon: K(BG)\otimes Q\to Q$ —«аугментация».*

§ 2. Препятствия к существованию S^1-действий

Определим рациональные роды A_k, $k=2, 3, \ldots$, с помощью рядов $\dfrac{kte^t}{e^{kt}-1}$.

С точки зрения теории характеристических классов значение рода, задаваемого рядом $\dfrac{t}{h(t)}$, $h(t)=t+\sum\limits_{i=2}^{\infty} q_i t^i$, $q_i\in Q$, на классе бордизмов $[CP^n]$ равно коэффициенту при t^n в ряде $\left(\dfrac{t}{h(t)}\right)^{n+1}$. Как было доказано в работе ([6]), имеет место равенство $h(t)=g_h^{-1}(t)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если для S^1-пучка ξ над X разность $c_1(X)-c_1(\xi)$ делится на k в $H^2(X, Z)$, то ряд $A_k(p_1(e(\xi_{S^1})))\in Q[[\eta-1]]$ совпадает с разложением в 1 некоторого полинома от переменных η и η^{-1}.*

Доказательство. Пусть $E^{S^1}: R^{S^1}_{n,l}\to U^{-n+l}(CP^\infty)$ — гомоморфизм, определяемый условием следствия теоремы 1.1 в случае, когда характеристический класс есть e—эйлерова характеристика. Если $\lambda^s_{j_l}$, $\lambda^t_{j_m}$—образующие Ву пучков $\varkappa_{j_l}$ и $\varkappa_{j_m}$ таких, что $\zeta_0=\sum\limits_l \varkappa_{j_l}\otimes\eta^{j_l}$, а $\zeta=\sum\limits_m \varkappa_{j_m}\otimes\eta^{j_m}$, то для класса бордизмов $[\zeta_0, \zeta]\in R^{S^1}_{*,*}$ по лемме 1.1 имеем:

$$\widetilde{A}_k\circ E^{S^1}([\zeta_0, \zeta])=\widetilde{A}_k\circ p_1\left(\frac{\prod\limits_m\prod\limits_t f([u]_{j_m}, \lambda^t_{j_m})}{\prod\limits_l\prod\limits_s f([u]_{j_l}, \lambda^s_{j_l})}\right).$$

Чтобы найти ряд от $\eta-1$, стоящий в правой части равенства, необходимо применить гомоморфизм A_k к коэффициентам формальной группы $f(u, v)$, которая перейдет при этом в $f_{A_k}(u, v)$; заменить u на $\widetilde{A}_k(u)$. Симметрические полиномы от переменных $\lambda^t_{j_m}$ и $\lambda^s_{j_l}$ при композиции $\widetilde{A}_k\circ p_1$ перейдут в рациональные числа, отличные, быть может, от нуля, лишь когда степень полиномов не превосходит размерности F-базы ζ_0 и ζ.

Так как $g^{-1}_{A_k}(t)=\dfrac{e^{kt}-1}{ke^t}$, то

$$f_{A_k}(u, v)=g^{-1}_{A_k}(g_{A_k}(u)+g_{A_k}(v))=\frac{(1+r_k(u))^k(1+r_k(v))^k-1}{k(1+r_k(u))(1+r_k(v))},$$

где введено обозначение $r_k(t)=e^{g_{A_k}(t)}-1$.

По лемме 1.2

$$\widetilde{A}_k([u]_j) = g_{A_k}^{-1}(jg_{A_k}(\widetilde{A}(u))) = g_{A_k}^{-1}(j\ln\eta) = \frac{\eta^{kj}-1}{k\eta^j}.$$

Ряд $r(u)$ переходит в

$$e^{g_{A_k}(g_{A_k}^{-1}(\ln\eta))} - 1 = \eta - 1.$$

Таким образом, ряд $\widetilde{A}_k \circ E^{S^1}([\zeta_0, \zeta])$ получается из ряда

$$\prod_{m,t}\frac{\eta^{kj_m}(1+r_k(\lambda_{j_m}^t))^k-1}{k\eta^{j_m}(1+r_k(\lambda_{j_m}^t))}\cdot\prod_{l,s}\frac{k\eta^{j_l}(1+r_k(\lambda_{j_l}^s))}{\eta^{kj_l}-1+\eta^{kj_l}\widetilde{r}(\lambda_{j_l}^s)} =$$

$$= \prod_{m,t}\frac{\eta^{kj_m}(1+r_k(\lambda_{j_m}^t))^k-1}{k\eta^{j_m}(1+r_k(\lambda_{j_m}^t))}\cdot\prod_{l,s}\left[\frac{k\eta^{j_l}(1+r_k(\lambda_{j_l}^s))}{\eta^{kj_l}-1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{\dim F}(-1)^i\left(\frac{\eta^{kj_l}}{\eta^{kj_l}-1}\right)^i\widetilde{r}_k^i(\lambda_{j_l}^s)\right]$$

заменой симметрических полиномов от $\lambda_{j_m}^t$ и $\lambda_{j_l}^s$ на некоторые рациональные числа. Здесь $\widetilde{r}_k(t) = (1+r_k(t))^k - 1$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 2.1. *Ряд* $\widetilde{A}_k \circ E^{S^1}([\zeta_0, \zeta])$ *совпадает с разложением в* 1 *функции*

$$\frac{\prod_l \eta^{j_l}}{\prod_m \eta^{j_m}} R(\eta^k),$$

где $R(\eta)$ *— рациональная функция, имеющая полюсы в корнях* j_l*-степени из* 1.

Следовательно, $A_k \circ p_!(e(\xi_{S^1}))$ имеет вид

$$\sum_s \frac{\prod_l \eta^{j_{ls}}}{\prod_m \eta^{j_{ms}}} R_s(\eta^k). \tag{2.1}$$

Здесь $\sum_l \eta^{j_{ls}}$ и $\sum_m \eta^{j_{ms}}$ — разложения на неприводимые представления представлений S^1 в слоях нормального пучка к неподвижному подмногообразию F_s и ограничения ξ на него соответственно.

Обозначим через $\mathfrak{A}(\eta)$ рациональную функцию (2.1). Так как $\widetilde{A}_k \circ p_!(e(\xi_{S^1})) \in Q[[\eta-1]]$, то $\mathfrak{A}(\eta)$ не имеет полюсов в 1. Нашей непосредственной целью будет доказательство отсутствия полюсов во всех корнях из 1. Для этого воспользуемся теоремой 1.1. Далее F_s будут обозначать неподвижные подмногообразия действия циклической подгруппы порядка n группы S^1. В обозначениях теоремы 1.1

$$\widetilde{A}_k \circ p_! (e(\xi_{S^1})) = \prod_d \frac{k\eta^{j_d}}{\eta^{kj_d}-1} \cdot \sum_s \widetilde{A}_k \circ p_{s!} [e(((-\nu)+\xi_s)_{S^1})]. \tag{2.2}$$

Первый множитель правой части этого равенства—это $\dfrac{1}{\widetilde{A}_k(e(\Delta_{S^1}))}$. Поскольку $\Delta = \sum_d \eta^{j_d}$ не содержит тривиальных представлений Z_n, то все j_d не делятся на n.

Рассмотрим теперь произвольный S^1-пучок ζ над S^1-многообразием F таким, что действие подгруппы Z_n на нем тривиально. Он представим в виде суммы S^1-пучков ζ_r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Образующая подгруппы Z_n в слое пучка ζ_r действует умножением на $\exp\left(\frac{2\pi i}{n} r\right)$, поэтому действие ее на пучке $\widetilde{\zeta}_r = \zeta_r \otimes \eta^{-r}$ тривиально. Так как $\zeta_r = \widetilde{\zeta}_r \otimes \eta^r$, то

$$\widetilde{A}_k \circ p_! (e(\zeta_{S^1})) = \widetilde{A}_k \circ p_! \left(\prod_r e(\widetilde{\zeta}_r \otimes \eta^r)\right).$$

Если через Λ_r^m обозначить образующие Ву пучков $\widetilde{\zeta}_r$, то

$$\widetilde{A}_k \circ p_! (e(\zeta_{S^1})) = \widetilde{A}_k \circ p_! \left(\prod_{r,m} f(\Lambda_r^m, [u]_r)\right) =$$

$$= \widetilde{A}_k \circ p_! \left[\prod_{m,r} \frac{(1+r_k(\Lambda_r^m))^k \eta^{kr} - 1}{k\eta^r (1+r_k(\Lambda_r^m))}\right] = \widetilde{A}_k \circ p_! \left[\prod_r \frac{\sum_{i=0}^{\mu_r} \eta^{kri} P_i(\ldots, \Lambda_r^m, \ldots)}{\prod_m \eta^r (1+r_k(\Lambda_r^m))}\right],$$

где $\mu_r = \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\zeta}_r$, а $P_i(\ldots, \Lambda_r^m, \ldots)$—симметрический ряд. Обозначим через $\rho_i \in U^*(BU(\mu_r))$ характеристический класс, определяемый симметрическим рядом

$$\frac{P_i(x_1, \ldots, x_{\mu_r})}{\prod_m (1+r_k(x_m))},$$

а через ρ_ω—произведение $\prod_{r=0}^{n-1} \rho_{i_r} \in U^*\left(\prod_{r=0}^{n-1} BU(\mu_r)\right)$, $\omega = (i_0, \ldots, i_{n-1})$, $0 \leqslant i_r \leqslant \mu_r$. Этот характеристический класс задает гомоморфизм

$$\mathrm{P}_\omega^{S^1} : R_{*,\mu}^{S^1} \to U^*(CP^\infty)_{\mathscr{C}}.$$

Воспользовавшись для него следствием теоремы 1.1, так же как и при доказательстве леммы 2.1, непосредственно из формул получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Ряд* $A_k \circ \mathrm{P}_\omega([\zeta_0, Z])$ *совпадает с разложением в* 1 *функции*

$$\frac{\prod\limits_{l} \eta^{j_l}}{\prod\limits_{m,r} \eta^{j_{mr}}} \cdot M_\omega(\eta^k), \tag{2.3}$$

где $M_\omega(\eta)$ — *рациональная функция с полюсами в корнях* j_l-*степени из* 1.

Соответственно $\tilde{A}_k \circ p_1(e(\zeta_{S^1}))$ совпадает с разложением в 1 рациональной функции

$$\sum_{\omega} \prod_{r} \eta^{kri_r - r\mu_r} Q_\omega(\eta), \tag{2.4}$$

где рациональная функция $Q_\omega(\eta)$ имеет вид суммы функции (2.3) по всем неподвижным подмногообразиям S^1-многообразия F. Ее разложение в 1 совпадает с рядом $\tilde{A}_k \circ \rho_\omega^{S^1}(\tilde{\zeta}_r, \ldots, \tilde{\zeta}_{n-1})$. Следовательно, $Q_\omega(\eta)$ не имеет полюса в 1. Докажем, что она не имеет полюсов в корнях n-ой степени из 1.

Действительно, проекция α группы S^1 на факторгруппу $S^1/Z_n = S^1$ индуцирует отображение $\alpha: CP^\infty \to CP^\infty$, при котором $\alpha^*(\eta) = \eta^n$. Так как действие Z_n на пучках $\tilde{\zeta}_r$ тривиально, то они являются образами при гомоморфизме $\alpha^\#$ некоторых пучков $\tilde{\zeta}'_r$. По теореме 1.2

$$\tilde{A}_k \circ \rho_\omega^{S^1}(\alpha^\# \tilde{\zeta}'_1, \ldots, \alpha^\# \tilde{\zeta}'_{n-1}) = \alpha^* \tilde{A}_k \circ \rho_\omega^{S^1}(\tilde{\zeta}'_1, \ldots, \tilde{\zeta}'_{n-1}),$$

и если $Q'_\omega(\eta)$ — рациональная функция, разложение в 1 которой совпадает с $\tilde{A}_k \circ \rho_\omega^{S^1}(\tilde{\zeta}'_1, \ldots, \tilde{\zeta}'_{n-1})$, то $Q_\omega(\eta) = Q'_\omega(\eta^n)$. Поскольку $Q'_\omega(\eta)$ не имеет полюса в 1, то $Q_\omega(\eta)$ не имеет полюсов в корнях n-степени из 1. Следовательно, сумма (2.4) регулярна в точках $\exp\left(\frac{2\pi i}{n} p\right)$. Если n взаимно просто с k, то из (2.2) следует, что в таких точках регулярна и функция $\mathfrak{A}(\eta)$. Для доказательства регулярности $\mathfrak{A}(\eta)$ в остальных корнях из 1 мы воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 2.3. *Пусть представление группы* S^1 *в слое* S^1-*пучка* ζ *над* X *над точкой неподвижного подмногообразия* F_s *равно* $\sum\limits_{i=1}^{n} \eta^{j_{si}}$, *тогда если* $c_1(\zeta)$ *делится на* k, *то все суммы* $\sigma_s = \sum\limits_{i=1}^{n} j_{si}$ *сравнимы между собой по модулю* k.

Доказательство. Действие S^1 на ζ естественно индуцирует действие S^1 на детерминанте ζ — одномерном комплексном пучке ξ, являющемся l-ой внешней степенью ζ, $l = \dim \zeta$. Представление S^1 в слое S^1-пучка ξ над точками F_s при этом есть η^{σ_s}.

Рассмотрим теперь иное действие S^1 на ξ. Поскольку $c_1(\xi) = c_1(\zeta)$, то $\xi = \varkappa^k$, где одномерный пучок $\varkappa$ таков, что $c_1(\varkappa) = \frac{1}{k} c_1(\xi)$. Как доказано в работе [7], существует поднятие действия S^1 на многообразии X на пространство расслоения $\varkappa$, превращающее его в S^1-пучок. Это действие индуцирует действие в пространстве представления ξ. При этом если η^{δ_s} — представления в слоях пучка $\varkappa$ над точками F_s, то представления в слоях пучка ξ над ними есть $\eta^{k\delta_s}$.

Сравнивая два действия S^1 на ξ и вспоминая, что представления в слоях одномерного пучка над неподвижными точками определены однозначно с точностью до умножения их всех на η^N, получаем:

$$\sigma_s = k\delta_s + N.$$

Тем самым лемма доказана.

Каждый член суммы (2.1) таков, что при умножении переменной η на $\theta = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ он умножается на $\theta^{(\Sigma j_{ls} - \Sigma j_{ms})}$. В предположениях теоремы все показатели $\Sigma j_{ls} - \Sigma j_{ms}$, как легко следует из леммы 2.3, сравнимы по модулю k. Следовательно, существует число N такое, что $\mathfrak{A}(\theta\eta) = \theta^N \mathfrak{A}(\eta)$.

Тем же свойством обладают и рациональные функции $Q'_\omega(\eta)$, определенные выше. Поэтому они регулярны во всех точках $\exp\left(\frac{2\pi i}{k} q\right)$, $0 \leqslant q \leqslant k-1$. Функции $Q_\omega(\eta)$, входящие в сумму (2.4), регулярны в точках $\exp\left(\frac{2\pi i}{kn} ql\right)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$. Из равенства (2.2) окончательно вытекает аналитичность $\mathfrak{A}(\eta)$ во всех корнях из 1 и, как следствие, утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. *Если действие компактной связной группы Ли G на многообразии X, первый класс Чженя касательного пучка которого $c_1(X) \in H^2(X, Z)$ делится на k, нетривиально, то*

$$A_k^G([X, G]) = 0,$$

в частности, $A_k([X]) = 0$.

Доказательство. В случае, когда $G = S^1$, утверждение теоремы следует из того, что, как видно из явных формул, каждый член суммы (2.1) стремится к 0 при $\eta \to 0$ и $\eta \to \infty$. Значит, $\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}(\infty) = 0$ и по предыдущей теореме $\mathfrak{A}(\eta) \equiv 0$. Для произвольной компактной связной группы Ли G воспользуемся теоремой 1.2. Если $A_k^G([X, G]) \neq 0$, то найдется вложение $\alpha : S^1 \to G$ такое, что $\alpha^* A_k^G([X, G]) \neq 0$, но это противоречит равенству $\alpha^* A_k^G([X, G]) = A_k^{S^1}([X, S^1]) = 0$.

2. Ориентируемый случай. Как говорилось уже во введении, хотя мы для определенности всюду ограничиваемся унитарной структурой, практически без изменений все результаты переносятся и

на ориентируемый случай. В частности, замечая, что A_2-род совпадает с классическим A-родом, а условие теоремы 2.2 в случае $k=2$ — с условием спинорности X, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2'. *Если действие компактной связной группы Ли G на спинорном многообразии нетривиально, то $A^G([X, G])=0$ и, в частности, A-род его равен нулю.*

Впервые эта теорема была доказана в работе (8) с помощью принципиально иного метода — с помощью теоремы Атьи — Зингера об индексе.

§ 3. Мультипликативные роды алгебраических многообразий

Эффективность любых препятствий зависит от эффективности способа их вычислений. Язык теории формальных групп позволяет успешно решить задачу о вычислении рациональных родов алгебраических многообразий, а следовательно, и значения на них предъявленной выше системы препятствий к существованию S^1-действий.

В работе (2) получена формула для производящего ряда классов бордизмов гиперповерхностей, задаваемых в CP^n уравнением m-ой степени (теорема 4.11). Этим же методом можно получить формулы для классов бордизмов произвольного алгебраического многообразия. Однако для того чтобы попутно получить результаты, подготавливающие доказательство теорем следующего параграфа, мы изберем иной путь.

Пусть алгебраическое многообразие X_n задается системой однородных полиномов $P_{m_i}(x_0, \ldots, x_n)$, степени которых m_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Не ограничивая общности можно считать, что X_n находится в общем положении с подмногообразием CP^{s-1}, заданным в CP^n условием $x_0=\ldots=x_{n-s}=0$, т. е. $X_n \cap CP^{s-1}=\varnothing$. Тогда проекция $p: CP^n \setminus CP^{s-1} \to CP^{n-s}$ — подмногообразие, у которого последние s однородных координат равны нулю, индуцирует отображение $\pi: X_n \to CP^{n-s}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Класс кобордизмов $\gamma(n; m_1, \ldots, m_s) \in U^0(CP^{n-s})$, двойственный классу бордизмов $[X_n, \pi] \in U_{2(n-s)}(CP^{n-s})$, равен*

$$j_{n-s}^*\left(\prod_{i=1}^{s} \frac{[u]_{m_i}}{u}\right),$$

где $j_{n-s}: CP^{n-s} \to CP^\infty$ — вложение.

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что если j_{n_1,n_2} — вложение CP^{n_1} в CP^{n_2}, $n_1 \leqslant n_2$, то

$$j_{n_1,n_2}^*\gamma(n_2+l; m_1, \ldots, m_s)=\gamma(n_1+l; m_1, \ldots, m_s).$$

Следовательно, существует класс бордизмов $\gamma(m_1, \ldots, m_s) \in U^0(CP^\infty)$ такой, что

$$j_{n-s}^*\gamma(m_1, \ldots, m_s)=\gamma(n; m_1, \ldots, m_s).$$

Пространство $CP^N \setminus CP^{s-1}$ естественно отождествляется с пространством расслоения $E(s\eta)$ — s-кратной суммы канонического пучка над CP^{N-s} с самим собой. Пусть $r: X_N \to E(s\eta)$ — вложение, тогда $[X_N, \pi] = p_*([X_N, r])$, где изоморфизм $p_*: U_*(E(s\eta)) \to U_*(CP^{N-s})$ индуцирован проекцией p. Класс бордизмов $[X_N, r]$ равен $p^*\gamma(N; m_1, \ldots, m_s) \cap [CP^{N-s}, f_0]$, где $\cap$ — оператор высечения Чеха, а f_0 — нулевое сечение. (Это следует из известной формулы $p_*(p^*(a) \cap b) = a \cap p_*(b)$.) Поэтому класс кобордизмов двойственный $[X_N, r]$ при изоморфизме $U_*(E(s\eta)) \to \widetilde{U}^*(M(s\eta))$ равен $p^*\gamma(N; m_1, \ldots, m_s) \cdot t(s\eta)$. Как обычно, $M(\ )$ и $t(\ )$ — пространство и класс Тома пучка соответственно.

С другой стороны, класс, двойственный к вложению алгебраического многообразия X_N в CP^N, равен эйлерову классу пучка $\sum_{i=1}^{s} \eta^{m_i}$. Действительно, пространство расслоения $E\eta^m$ отождествляется с наборами комплексных чисел $(x_0, \ldots, x_N, y)$, $|\vec{x}|^2 = 1$, со следующим соотношением эквивалентности $(x_0, \ldots, x_N, y) \sim (zx_0, \ldots, zx_N, z^m y)$, $z \in S^1$. Отображение $x_0, \ldots, x_N) \to (x_0, \ldots, x_N, \ldots, P_{m_i}(x_0, \ldots, x_N), \ldots)$ корректно определяет сечение пучка $\sum_{i=1}^{s} \eta^{m_i}$, трансверсально пересекающее нулевое сечение — CP^N по X^N. Следовательно, при гомоморфизме $f_0^*: U^*(M(s\eta)) \to U^*(CP^{N-s})$ класс, двойственный $[X_N, r]$ перейдет в $e\left(\sum_{i=1}^{s} \eta^{m_i}\right)$.

Поскольку $f_0^*(t(s\eta)) = e(s\eta)$, то мы приходим к формуле:

$$\prod_{i=1}^{s} e(\eta^{m_i}) = \gamma(N, m_1, \ldots, m_s) \cdot \prod_{i=1}^{s} e(\eta).$$

Окончательно: $\gamma(m_1, \ldots, m_s) = \prod_{i=1}^{s} \frac{[u]_{m_i}}{u}$, и теорема доказана.

Для комплексного проективного пространства CP^N класс бордизмов многообразия, двойственного u^k, есть CP^{N-k}. Поэтому если обозначить через $CP(u)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} [CP^n] u^n$, то справедливо

Следствие 1. *Класс бордизмов многообразия X_n, заданного системой однородных полиномов $P_{m_i}(x_0, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, равен коэффициенту при u^{n-s} в ряде*

$$\left[\prod_{i=1}^{s} \frac{[u]_{m_i}}{u}\right] \cdot CP(u).$$

Ряд $CP(u)$ равен $\frac{dg(u)}{du}$. Следовательно, значение рода h на классе бордизмов многообразия X_n равно

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{u^{n-s+1}} \prod_{i=1}^{s} \frac{g_n^{-1}(m_i g_h(u))}{u} \cdot \frac{dg_h(u)}{du} du.$$

Интеграл берется по окружности $|u|=\varepsilon$. Производя ставшую уже привычной замену $u=g_h^{-1}(\ln t)$, получим:

$$h([X_n]) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'} [g_h^{-1}(\ln t)]^{-n-1} \cdot \prod_{i=1}^{s} g_h^{-1}(\ln t^{m_i})\, d\ln t. \tag{3.1}$$

Контур C' — это окружность $|t-1|=\varepsilon$.

Следствие 2. *Значение рода A_k на $[X_n]$, где $n+1-\sum_{i=1}^{s} m_i = kd$, равно коэффициенту при $(t-1)^n$ в разложении по степеням $t-1$ функции $k^{n-s}t^{d-1}\prod_{i=1}^{s}(t^{m_i}-1)$.*

Доказательство. Так как $g_{A_k}^{-1}(\ln t) = \frac{t^k-1}{kt}$, то

$$A_k([X_n]) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\left(\frac{kt}{t^k-1}\right)^{n+1}\prod_{i=1}^{s}\frac{t^{km_i}-1}{kt^{m_i}}\, d\ln t =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\frac{k^{n+1-s}t^{kd}}{(t^k-1)^{n+1}}\prod_{i=1}^{s}(t^{km_i}-1)\, d\ln t =$$

$$= \frac{k^{n-s}}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\frac{z^d}{(z-1)^{n+1}}\prod_{i=1}^{s}(z^{m_i}-1)\, d\ln z,$$

где $z=t^k$.

Если x — образующая $H^2(CP^n, Z)$, а $j: X_n \to CP^n$ — вложение, то $c_1(X_n) = \left(n+1-\sum_{i=1}^{s} m_i\right) j^*x$. Из доказанного следствия и теоремы 2.2 вытекает утверждение теоремы **A**, сформулированной во введении.

Приведем формулы для $T_{x,y}$-рода алгебраических многообразий. Значение $T_{x,y}$-рода на классе бордизмов $[CP^n]$ равно $\sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i}$. Подставляя в (3.1)

$$g_{T_{x,y}}^{-1}(\ln t) = \frac{t^{x-y}-1}{xt^{x-y}-y}$$

и заменяя t^{x-y} на z, получим

Следствие 3. *Значение $T_{x,y}$-рода на классе бордизмов алгебраического многообразия X_n есть коэффициент при $(z-1)^n$ в разложении по степеням $z-1$ функции*

$$\frac{1}{x-y}\cdot\frac{(xz-y)^{n+1}}{z}\prod_{i=1}^{s}\frac{z^{m_i}-1}{xz^{m_i}-y}.$$

Замечание. При $x=1$, а $y=-1$, 0 получаются формулы для сигнатуры и рода Тодда алгебраических многообразий соответственно.

§ 4. Бордизмы разветвленных накрывающих

Пусть на многообразии Y действует конечная циклическая группа Z_n. Будем предполагать, что вне множества неподвижных точек, являющегося подмногообразием (не обязательно связным) вещественной коразмерности 2, действие Z_n свободно. Тогда фактор многообразия Y по этому действию является гладким многообразием X, а проекция $p: Y\to X$ есть разветвленное накрытие над X с ветвлением вдоль подмногообразия неподвижных точек F.

Наша задача состоит в вычислении класса бордизмов как самого многообразия Y в терминах класса бордизмов X и инвариантов нормального пучка ν к подмногообразию F, так и класса бордизмов $[Y, p]\in U_*(X)\otimes Q$. (Здесь и далее многообразия F и $p(F)$ отождествляются.) Если $v\in U^2(X)$ — класс кобордизмов, двойственный классу бордизмов, задаваемому вложением F в X, то справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. *Класс кобордизмов, двойственный $[Y, p]$, равен*

$$\frac{v}{g^{-1}(n^{-1}g(v))}\in U^0(X)\otimes Q.$$

Доказательство. Пусть $p_1: Y_1\to X$ и $p_2: Y_2\to X$ — n-листные разветвленные накрывающие многообразие X с ветвлением вдоль подмногообразия F. Предположим, что нормальные пучки F в Y_1 и Y_2 изоморфны, тогда класс бордизмов $[Y_1, p_1]-[Y_2, p_2]$ равен классу, задаваемому проекцией многообразия $\tilde{M}$, склеенного из дополнений N_1 и $-N_2$ открытых трубчатых окрестностей F в Y_1 и Y_2 по изоморфизму их краев.

Проекции $p_1: N_1\to N$ и $p_2: -N_2\to -N$, где N — дополнение к трубчатой окрестности F в X, задают отображение $g: \tilde{M}\to M$, являющееся n-листным накрытием. Многообразие M склеено из N и $-N$ по тождественному изоморфизму краев.

ЛЕММА 4.1. *Класс бордизмов $[\tilde{M}, g]\in U_*(M)\otimes Q$ равен $n[M, \mathrm{id}]$, где* id *— тождественное отображение M в себя.*

Доказательство. Класс бордизмов однозначно определяется числами $(c_\omega(\tilde{M})g^*m, \langle\tilde{M}\rangle)$, где $c_\omega(\tilde{M})=c_{i_1}(\tilde{M})\cdots c_{i_r}(\tilde{M})$, $\omega=(i_1, \ldots, i_r)$, а $c_i(\tilde{M})$ — классы Чженя касательного пучка $\tilde{M}$; $m\in H^s(M)$ и $s+2(i_1+\ldots+i_r)=\dim M$. Здесь, как обычно, $(a, \langle M\rangle)$ — значение класса когомологий на фундаментальном цикле.

Утверждение леммы следует из равенств: $(c_\omega(\tilde{M})\cdot g^*m, \langle\tilde{M}\rangle)= =(g^*(c_\omega(M)m), \langle\tilde{M}\rangle)=(c_\omega(M)m, g_*\langle\tilde{M}\rangle)=n(c_\omega(M)m, \langle M\rangle)$, верных в силу того, что g — накрытие.

Пусть $j: M\to X$ — естественное отображение, задаваемое вложением N в X, тогда $[\tilde{M}, p]=j_*([\tilde{M}, g])=n([M, j])$. Поскольку очевидно равенство $[M, j]$ нулю, то $[Y_1, p_1]=[Y_2, p_2]$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно для каждого пучка ξ над F такого, что $\xi^n=\nu$, построить разветвленную накрывающую Y, нормальный пучок в которой к F есть ξ, и найти класс кобордизмов, двойственный $[Y, p]$.

Пусть $f: X\to CP^N$ — отображение такое, что $f^*(\eta)=\xi$ (η — канонический пучок над CP^N, где N — достаточно большое). Для алгебраического многообразия X_N, заданного однородным полиномом степени n и не содержащего точку $(0, 0, \ldots 0, 1)$, корректно определен прообраз f^*X_N, который является разветвленным накрытием над X. В обозначениях предыдущего параграфа класс, двойственный $[f^*X_N, p]$, равен $f^*\gamma(N, n)$. Доказываемая теорема следует из теоремы 3.1 и того, что $f^*(g^{-1}(ng(u)))=v$.

З а м е ч а н и е. Так как пучок ν является n-ой тензорной степенью некоторого пучка, то ряд с рациональными коэффициентами

$$\frac{1}{g^{-1}(n^{-1}(g(e(\nu))))}-\frac{n}{e(\nu)}=-\frac{CP^1}{2}(n-1)-\frac{CP^2}{3}\,\frac{n^2-1}{n}e(\nu)-$$
$$-\frac{(CP^1)^2}{4}\,\frac{n^2-3n+3}{n^2}e(\nu)+\ldots$$

определяет элемент из кольца целочисленных кобордизмов $U^*(F)$.

С л е д с т в и е 1. *Класс кобордизмов разветвленной накрывающей Y равен*:

$$n[X]+\varepsilon\left[\left(\frac{1}{g^{-1}(n^{-1}g(e(\nu)))}-\frac{n}{e(\nu)}\right)\cap F\right],$$

где $\varepsilon: U_*(F)\to U_*$ — «аугментация».

Полученные формулы позволяют находить значения рациональных родов Хирцебруха на классах бордизмов разветвленных накрывающих. Так, например, имеет место

С л е д с т в и е 2. *Значение рода $T_{x,y}$ на классе бордизмов разветвленной накрывающей есть*

$$nT_{x,y}([X])+\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}T_{x,y}([e^i(\nu)\cap F]),$$

где a_i — коэффициенты при t^i в разложении по степеням t функции
$$t\,\frac{x(1-ty)^{\frac{1}{n}}-y(1-tx)^{\frac{1}{n}}}{(1-ty)^{\frac{1}{n}}-(1-tx)^{\frac{1}{n}}}.$$

В ряде случаев бывает удобно записывать формулы для класса бордизмов разветвленной накрывающей в терминах инвариантов нормального пучка к F в самой разветвленной накрывающей. Поскольку $e(\nu)=g^{-1}(ng(e(\xi)))$, то из следствия 1 получаем

Следствие 1′. *Класс бордизмов разветвленной накрывающей равен*

$$n([X])+\varepsilon\left[\left(\frac{1}{e(\xi)}-\frac{n}{g^{-1}(ng(e(\xi)))}\right)\cap F\right].$$

Следствие 2′ (Хирцебрух). *Если b_i — коэффициенты при t^i в разложении по степеням t функции* — $t\dfrac{(1+t)^n+(1-t)^n}{(1+t)^n-(1-t)^n}$, *то*

$$\operatorname{Sign}([Y])=n\operatorname{Sign}([X])+\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1}\operatorname{Sign}([e^i(\xi)\cap F]).$$

Поступило
26.III.1975

Литература

1 **Кричевер И. М.**, Формальные группы и формула Атьи — Хирцебруха, Изв. АН СССР. Сер. матем., 38 (1974), 1289—1304.

2 **Бухштабер В. М.**, Характер Чженя — Дольда в теории кобордизмов. I, Матем. сб., 83 (125) (1970), 575—595.

3 **Hirzebruch F.**, The signature of ramified coverings, Global Analysis papers on honour of Kodairu, Tokyo, 1969.

4 **Palais R.**, Theory of G-spaces, Memoirs A. M. S., 1960.

5 **Dold A.**, Relations between ordinary and extraordinary cohomology, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus, 1962.

6 **Новиков С. П.**, Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32 (1968), 1245—1263.

7 **Stewart T.**, Lifting group actions in fibre bundles, Ann. Math., 74 (1961), 192—198.

8 **Atiyah M., Hirzebruch F.**, Spin-manifolds and group actions, Essay Topol. and Relat. Topics, Berlin et al., 1970, 28—38.