ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ГОМОТОПИЧЕСКОГО ТИПА CP^n

И. М. Кричевер

В работе [1] сформулирована гипотеза о том, что существования нетривиального действия группы S^1 на многообразии X гомотопического типа CP^n достаточно для инвариантности $\hat{A}$-рода $\hat{A}(x) \subset H^*(X, Q)$, там же доказано, что при некоторых условиях на действия с изолированными неподвижными точками $\hat{A}$-род действительно инвариантен. В настоящей заметке класс таких условий значительно расширен.

1. Если G — компактная группа Ли, то для любого G-многообразия определен гомоморфизм Гизина $p_!$: $\Omega^*_{SO}((M \times EG)/G) \to \Omega^*_{SO}(BG)$. Для векторного G-пучка ξ над M обозначим через ξ_G, соответствующий ему пучок над $(M \times EG)/G$, $e(\xi_G)$ — его эйлеров класс.

Теорема. *Если действие группы G на многообразии M имеет лишь изолированные неподвижные точки, то найдется такое представление $\Delta = \Delta' + \sum\limits_i \Delta_i$ (Δ_i — представление G в слое касательного пучка в i-й неподвижной точке; $\widetilde{\Delta}_i$ — представление в слое G-пучка ξ), что $e(\Delta)\cdot p_! e(\xi_G) = \sum\limits_i e(\widetilde{\Delta}_i)\, e(\Delta - \Delta_i)$, где $e(\Delta)$ — эйлеров класс пучка над BG, ассоциированного с представлением Δ.*

Лемма. *Если ε — гомоморфизм аргументации, то $\varepsilon(p_! e(\xi_G)) = \varepsilon D(e(\xi))$.*

2. Пусть на многообразии X h: $X \to CP^n$ — сохраняющая ориентацию гомотопическая эквивалентность, действие S^1 имеет лишь изолированные неподвижные точки. Заметим, что их число равно $n+1$.

Через δ обозначим представление S^1 с характером z^δ и соответствующий S^1-пучок над S^1-многообразием. Пусть δ_i $1 \leqslant i \leqslant n+1$,— представления в слоях над неподвижными точками S^1-пучка η', который получен из пучка $h^*\eta$ поднятием действия S^1 с базы.

Применяя результаты предыдущего пункта к S^1-пучку $m\eta'$, $0 \leqslant m \leqslant n$, получим в кольце $\Omega^*_{SO}(CP^\infty) = \Omega^*_{SO}[[u]]$ равенства

$$\prod_k e(\Delta_k)\, p_! e(m\eta'_{S^1}) = \sum_i e(\delta_i)^m \prod_k^{k \neq i} e(\Delta_k), \tag{1}$$

$$p_! e(m\eta'_{S^1}) = [h^* v^m \cap X] + \text{чл. старших степеней по } u.$$

Здесь $v = \sigma_1(\eta) \in \Omega^2_{SO}(CP^n)$, $\cap$ — оператор высечения Чеха. Обозначим $\zeta_j = p_! e\left(\sum\limits_l^{l \neq j} \eta' \otimes (-\delta_l)\right)$, тогда $\prod\limits_k e(\Delta_k)\,\zeta_j = \sum\limits_i \prod\limits_l^{l \neq j} e(\delta_i - \delta_l) \prod\limits_k^{k \neq i} e(\Delta_k)$. Отсюда следует

$$\prod_k e(\Delta_k)\,\zeta_j = \prod_l^{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l) \prod_k^{k \neq j} e(\Delta_k). \tag{2}$$

$\zeta_j = 1 +$ чл. старших степеней по u. Сравнивая коэффициенты при младшей степени u в равенстве (2), получим

Следствие 1. *Пусть представление Δ_j раскладывается в сумму одномерных представлений x_{js}, $1 \leqslant s \leqslant n$, тогда $\prod\limits_s x_{js} = \prod\limits_l^{l \neq j} (\delta_j - \delta_l)$.*

Замечание. Так как все $x_{js} \neq 0$, то $\delta_j \neq \delta_l$, если $j \neq l$. Значит, действие S^1 на CP^n, индуцированное представлением $-\sum\limits_i \delta_i$, имеет изолированные неподвижные точки. Представления, индуцированные этим действием, в слоях касательного и канонического пучков равны $\sum\limits_l^{l \neq j} (\delta_j - \delta_l)$ и δ_j соответственно.

Из (1) и (2) получаем

$$\prod_j \prod_l^{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l)\, p_!(m\eta'_{S^1}) = \sum_i [e(\delta_i)^m \zeta_i \prod_j^{j \neq i} \prod_l^{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l). \tag{3}$$

Из сделанного выше замечания следует, что

$$(4)\qquad \prod_j \prod_l^{l\neq j} e(\delta_j-\delta_l)\,\breve{p}_! e(m\eta_{S^1}) = \sum e(\delta_i)^m \prod_j^{j\neq i} \prod_l^{l\neq j} e(\delta_j-\delta_l)$$

$$\breve{p}_! e(m\eta_{S^1}) = [CP^{n-m}] + \text{чл. старших степеней по } u.$$

Здесь $\breve{p}$: $(CP^n \times S^\infty)/S^1 \to CP^\infty$.

3. Рассмотрим произвольный мультипликативный Q-род. Ему соответствуют гомоморфизмы колец Q: $\Omega^*_{SO} \to Z$ и Q^*: $\Omega^*_{SO}(CP^\infty) \to Z[[u]]$. Из равенства (2) и из того, что $e(\delta)=g^{-1}(\delta g(u))$, где $g(u)=\sum \frac{[CP^n]}{n+1}u^{n+1}$ — логарифм формальной группы «геометрических» кобордизмов, следует $\zeta_j = \prod_l^{l\neq j} g^{-1}((\delta_j-\delta_l)\,g(u))\cdot\left[\prod_s g^{-1}(x_{js}g(u))\right]^{-1}$. Тогда $Q^*(\zeta_j)$ равны

$$(5)\quad Q^*(\zeta_j) = \prod_l^{l\neq j} g_Q^{-1}((\delta_j-\delta_l)\,g_Q(u))\cdot\left[\prod_s g_Q^{-1}(x_{js}g_Q(u))\right]^{-1},\quad g_Q(u)=\sum \frac{Q[CP^n]}{n+1}u^{n+1}.$$

Следствие 2. *Пусть для некоторого мультипликативного рода такого, что все $s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$, где λ_i — коэффициенты соответствующего ряда Хирцебруха, выполняется условие: Действие группы S^1 на многообразии таково, что выражения* (5) *не зависят от j, тогда $p_i(X) = h^*p_i(CP^n)$, p_i — характеристические классы Понтрягина.*

Примеры выражений (5) для некоторых классических родов.

a) $\hat{A}$-род: $$\prod_l^{l\neq j} \left(t^{\delta_j-\delta_l} - t^{\delta_l-\delta_j}\right)\cdot\prod_s \left(t^{x_{js}} - t^{-x_{js}}\right)^{-1}.$$

b) L-род: $$\prod_l^{l\neq j} \frac{(1+t)^{\delta_j-\delta_l}-(1-t)^{\delta_j-\delta_l}}{(1+t)^{\delta_j-\delta_l}+(1-t)^{\delta_j-\delta_l}}\cdot\prod_s \frac{(1+t)^{x_{js}}+(1-t)^{x_{js}}}{(1+t)^{x_{js}}-(1-t)^{x_{js}}}.$$

Доказательство. Применим к равенствам (3) и (4) гомоморфизм Q^*. Из сравнения коэффициентов при младшей степени u получаем, что $Q([h^*v^m \cap X]) = Q([v^m \cap CP^n])$. Отсюда и из того, что $H^*(X, Z)$ — урезанное кольцо полиномов, и вытекает доказываемое утверждение.

4. Следует отметить, что результаты этой заметки полностью переносятся на тот случай, когда X — квазикомплексное многообразие, а действия S^1 сохраняют комплексную структуру в стабильном касательном пучке.

Следствие 3. *Пусть для некоторого мультипликативного рода Q: $\Omega^*_u \to Z$, удовлетворяющего условиям следствия 2, выражения* (5) *не зависят от j, тогда классы Черна инвариантны, $c_i(X) = h^*(c_i(CP^n))$.*

Дополним набор примеров выражения (5) для некоторых родов.

c) T-род: $$\prod_l^{l\neq j} \left(1-(1-t)^{\delta_j-\delta_l}\right)\cdot\prod_s \left(1-(1-t)^{x_{js}}\right)^{-1}.$$

d) Эйлерова характеристика c_n: $$\prod_l^{l\neq j} \frac{(\delta_j-\delta_l)\,t}{1-t+(\delta_j-\delta_l)\,t}\cdot\prod_s \frac{1-t+x_{js}t}{x_{js}t}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Petrie, Smoth S^1 actions on homotopy complex projective spaces and related topics, Bull. AMS 78:2, 105—154.

[2] И. М. Кричевер, Действия конечных циклических групп на квазикомплексных многообразиях, Матем. сб. 90:2 (1973).

Поступило в Правление общества 19 декабря 1972 г.