О БОРДИЗМАХ ГРУПП, СВОБОДНО ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СФЕРАХ

И. М. Кричевер

Целью настоящей работы является получение инвариантного доказательства некоторых соотношений между элементами бордизмов конечной группы G, возникающих при полусвободном действии G на компактном многообразии с изолированными особыми точками. Искомые соотношения в случае циклической группы для классических линзовых многообразий были получены в работах [1], [3], [4]. Для групп Цессенхауза, используя теорему классификации, при помощи ограничения на силовские подгруппы вопрос был решен в работе [4].

Мы рассматриваем такие унитарные представления группы G, ограничение которых на единичную сферу является свободным действием G. Пусть $A(G)$ — аддитивная полугруппа этих представлений. Действие G на S^{2n-1}, полученное ограничением n-мерного представления $\Delta \in A(G)$, также обозначим Δ. Это действие определяет элемент $\alpha(\Delta)$ бордизмов группы G. S^{2n-1}/Δ — многообразие, полученное из S^{2n-1} факторизацией по указанному действию G. Рассмотрим два n-мерных представления Δ и $\widetilde{\Delta}$ из $A(G)$. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Для любых n-мерных представлений* $\Delta, \widetilde{\Delta} \subset A(G)$ *существует элемент* $\gamma(\Delta, \widetilde{\Delta}) \in U^0(\mathrm{BG})$ *такой, что* $\alpha(\Delta) = \gamma(\Delta, \widetilde{\Delta}) \cap \alpha(\widetilde{\Delta})$. *Кроме того,* $\sigma_n(\widetilde{\Delta}) = \gamma(\Delta, \widetilde{\Delta}) \cdot \sigma_n(\Delta)$, *где* $\sigma_n(\Delta)$ *— старший класс Черна пучка над* BG, *полученного при гомоморфизме* $g: A(G) \to \mathrm{Vect}\ (\mathrm{BG})$.

Доказательство. В дальнейшем мы будем представлять BG как прямой предел вложенных многообразий $S^{2nk-1}/k\widetilde{\Delta}$. Пусть g_Δ—отображение $A(G) \to \mathrm{Vect}\ (S^{2n-1}/\Delta)$, ставящее в соответствие любому представлению пучок, ассоциированный с каноническим главным расслоением над S^{2n-1}/Δ. Из соображений размерности следует, что в пучке $g_\Delta(\widetilde{\Delta})$ имеется ненулевое сечение, т. е. отображение в ассоциированное с этим пучком расслоение на сферы. Легко видеть, что пространством этого расслоения является произведение сфер $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$, профакторизованное по следующему действию G: на первом сомножителе действует $\widetilde{\Delta}$, а на втором —Δ. Очевидно, что это же пространство является расслоением на сферы, ассоциированным с $g_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1}/\widetilde{\Delta} & & S^{2n-1} \times S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}\times\Delta \arrow[ll, "p_1"'] \arrow[rr, "p_2"] & & S^{2n-1}/\Delta \\
& S^{2n-1}/\widetilde{\Delta} \arrow[ul, "id"] \arrow[ur, "s_1"'] & & S^{2n-1}/\Delta \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

где s_i и p_i ($i = 0, 1$) — ненулевые сечения и проекции соответствующих пучков. Легко проверяется, что главное расслоение над S^{2n-1}/Δ, индуцированное каноническим главным расслоением над $S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}$ и отображением $p_1 \cdot s_2$, является каноническим. Тогда по определению получаем, что $[S^{2n-1}/\Delta,\ i \cdot p_1 \cdot s_2] = \alpha(\Delta)$, где i — вложение $S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}$ в BG, а для любого многообразия M и отображения f: $M \to X$ $[M, f]$ обозначает соответствующий элемент бордизмов пространства X. По двойственности существует единственный элемент $\gamma_1(\Delta, \widetilde{\Delta}) \in U^0(S^{2n-1}/\widetilde{\Delta})$ такой, что

$$[S^{2n-1}/\Delta,\ p_1 \cdot s_2] = \gamma_1(\Delta, \widetilde{\Delta}) \cap [S^{2n-1}/\widetilde{\Delta},\ \mathrm{id}].$$

Рассмотрим элементы $[S^{2n-1}/\Delta, s_2]$, $[S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}, f_0]$ из $U_*(\mathrm{Eg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta))$, где f_0—нулевое сечение пучка $g_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)$, а $\mathrm{Eg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)$—пространство этого пучка. Тогда $[S^{2n-1}/\Delta, s_2] = p_1^* \gamma_1(\Delta, \widetilde{\Delta}) \cap$ $\cap\ [S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}, f_0]$, так как при изоморфизме

$$p_{1*}: U_*(\mathrm{Eg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)) \to U_*(S^{2n-1}/\widetilde{\Delta})$$

мы получаем предыдущее равенство. Пусть D — изоморфизм двойственности D: $U_*(\mathrm{Eg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)) \to U^*(\mathrm{Mg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta))$ (как обычно, $M\xi$ — пространство Тома пучка ξ). Тогда $t_2^{(1)} = p_1^*\gamma_1(\Delta, \widetilde{\Delta})\cdot t_1^{(1)}$, где $t_1^{(1)} = D[S^{2n-1}/\Delta, s_2]$, а $t_1^{(1)} = D[S^{2n-1}/\widetilde{\Delta}, f_0]$. Повторяя изложенную выше конструкцию для представлений $\Delta + (m-1)\widetilde{\Delta}$, $m\widetilde{\Delta}$, получим аналогичное равенство $t_2^{(m)} = p^*\gamma_m(\Delta, \widetilde{\Delta})\cdot t_1^{(m)}$ в $U^*\,\mathrm{Mg}_{m\widetilde{\Delta}}(\Delta + (m-1)\widetilde{\Delta})$. Из конструкции кобордизмов, предложенной Квилленом в работе [2], легко вытекает, что $j^*\gamma_k(\Delta, \widetilde{\Delta}) = \gamma_l(\Delta, \widetilde{\Delta})$, j — вложение $S^{2nl-1}/l\widetilde{\Delta}$ в $S^{2nk-1}/k\widetilde{\Delta}$. Тем самым определен элемент $\gamma(\Delta, \widetilde{\Delta}) \in U^0(\mathrm{BG})$ такой, что $\alpha(\Delta) = \gamma(\Delta, \widetilde{\Delta}) \cap \alpha(\widetilde{\Delta})$. Заметим, что нормальный пучок к S^{2n-1}/Δ при вложении s_2 есть пучок $g_\Delta(\widetilde{\Delta})$. Действительно, из диаграммы (1) видно, что s_2 — вложение в пространство расслоений на сферы. Значит, нормальный пучок в $\mathrm{Eg}_{\widetilde{\Delta}}(\Delta)$ есть сумма одномерного тривиального и нормального в пространстве расслоения на сферы; отсюда следует, что он изоморфен нормальному пучку к ненулевому сечению в пучке $g_\Delta(\widetilde{\Delta})$. Аналогично для представлений $\Delta + (m-1)\widetilde{\Delta}$ и $m\widetilde{\Delta}$ соответствующий нормальный пучок в $\mathrm{Eg}_{m\widetilde{\Delta}}(\Delta + (m-1)\widetilde{\Delta})$ есть $g_{\Delta+(m-1)\widetilde{\Delta}}(m\widetilde{\Delta})$. Существует изоморфизм

$$\varphi_m\colon U^*(\mathrm{Mg}_{m\widetilde{\Delta}}(\Delta)) \to U^*(\mathrm{Mg}_{m\widetilde{\Delta}}(\Delta + (m-1)\widetilde{\Delta})),$$

порожденный умножением на класс Тома пучка $g_{m\widetilde{\Delta}}((m-1)\widetilde{\Delta})$. Тогда $\varphi_m^{-1}t_2^{(m)} = p^*\gamma_m(\Delta, \widetilde{\Delta})\,\varphi_m^{-1}t_1^{(m)}$. Если взять теперь ограничение этого равенства на базу, то из замечания о нормальном пучке легко получить, что $f_0^*(\varphi_m^{-1}t_1^{(m)}) = \sigma_n(g_{m\widetilde{\Delta}}(\Delta))$, $f_0^*(\varphi_m^{-1}t_2^{(m)}) = s_1^*p_2^*\sigma_n(g_{\Delta+(m-1)\widetilde{\Delta}}(\widetilde{\Delta})) = \sigma_n(g_{m\widetilde{\Delta}}(\widetilde{\Delta}))$. Перейдя к пределу по m, получим доказываемое равенство:

$$\sigma_n(\widetilde{\Delta}) = \gamma(\Delta, \widetilde{\Delta})\,\sigma_n(\Delta).$$

Примечание при корректуре. В последнее время автором получено доказательство соотношений, аналогичных соотношениям теоремы 1, для неподвижных подмногообразий.

Теорема 2. *Для элемента $\alpha(X, \xi) \in U_*(BG)$, определяемого G-пучком над тривиальным G-пространством X, выполняется равенство*:

$$\alpha(X, \xi) = f_!\left(\frac{\sigma_{Nk}(1 \otimes N\eta)}{\sigma_k(\xi_G)}\right) \cap [S^{2Nk-1}/N\Delta, i],$$

где $\Delta \in A(G)$ является ограничением действия группы G на слой, $k = \dim_C \xi$, а N произвольное такое, что $Nk \geqslant k + \dim_C X$. Кроме того $\eta = g(\Delta)$, а ξ_G образ пучка ξ при естественном гомоморфизме $\mathrm{Vect}_G(X) \to \mathrm{Vect}(X \times BG)$, f — проекция $X \times \mathrm{BG} \to \mathrm{BG}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Г. Каспаров, Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов, Изв. АН, сер. матем. 33 : 4 (1969).

[2] D. Quillen, Elementary proof of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Preprint, Inst. for Advanced study, Princeton.

[3] А. С. Мищенко, Многообразия с действием группы Z_p и неподвижные точки, Матем. заметки 4 : 4 (1968), 381—386.

[4] С. П. Новиков, Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН, сер. матем. 32 : 6 (1969).

Поступило в Правление общества 15 июня 1971 г.